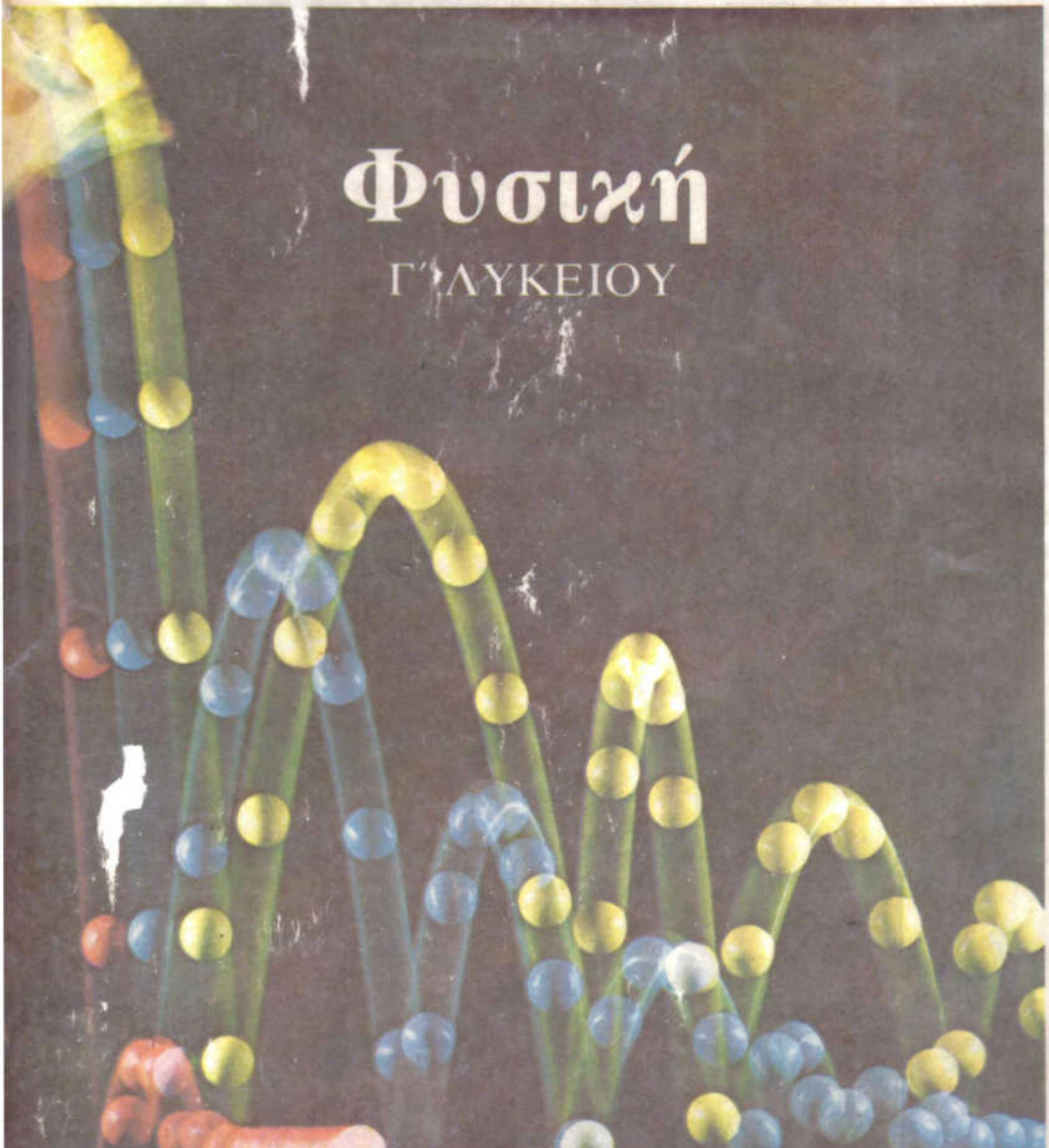
Βλάχος Ι. - Ζάχος Κ. - Κόκκοτας Π. - Τιμοθέου Γ.

Φυσική

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ - ΑΘΗΝΑ

ΒΛΑΧΟΣ Ι. – ΖΑΧΟΣ Κ. – ΚΟΚΚΟΤΑΣ Π. – ΤΙΜΟΘΕΟΥ Γ.

ΦΥΣΙΚΗ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

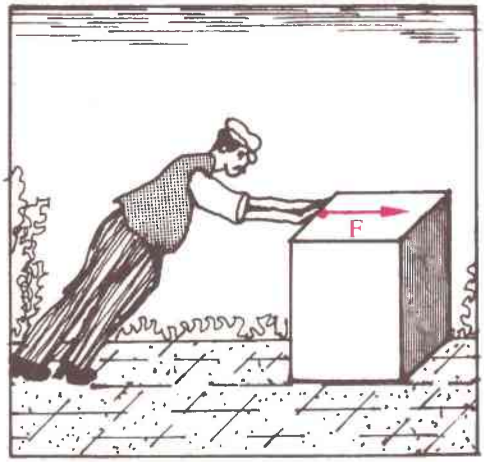
Στην εικόνα του εξωφύλλου φαίνονται τα στιγμιότυπα τριών όμοιων σφαιρών που πέφτουν από το ίδιο ύψος και συγκρούονται με το δάπεδο. Λόγω των διαφορετικών υλικών οι τρεις σφαίρες αναπηδούν σε διαφορετικά ύψη.

1
Έργο - Ενέργεια

1.1. Σχέση έργου - ενέργειας. Πραγματική σημασία του έργου.

Όπως γνωρίζουμε, μια δύναμη παράγει έργο, όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της. Όμως η δήλωση αυτή δεν είναι καθόλου κατατοπιστική για το τι είναι το έργο και τι ακριβώς εκφράζει.

Γιαυτό θα δούμε το έργο σε συνδυασμό με το τι μπορεί να κάνει μια δύναμη.

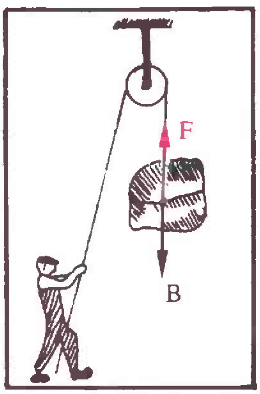


Σχ. 1.1

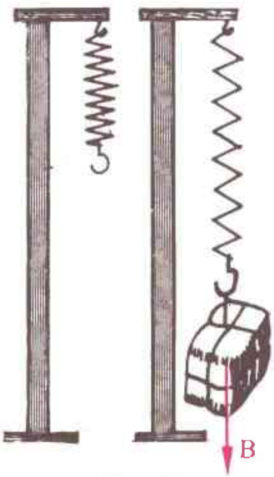
1. Είναι γνωστό ότι μια δύναμη μπορεί να μετακινήσει ένα σώμα. Π.χ. ο εργάτης ασκώντας δύναμη $\vec{F}$ μετακινεί το κιβώτιο προς τα δεξιά, σχ. 1.1., ή ανυψώνει το σώμα Σ, σχ. 1.2.

2. Η δύναμη μπορεί να παραμορφώσει ένα σώμα, π.χ. το βάρος $\vec{B}$ επιμηκύνει το ελατήριο, σχ. 1.3.

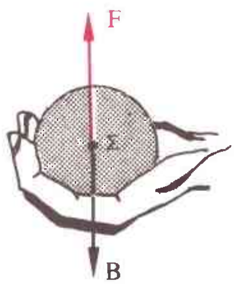
3. Μια δύναμη μπορεί να ισορροπεί το βάρος $\vec{B}$ ενός σώματος. Έτσι ασκώντας με το χερι μας μια δύναμη $\vec{F}$ ισορροπούμε το σώμα Σ, σχ. 1.4.



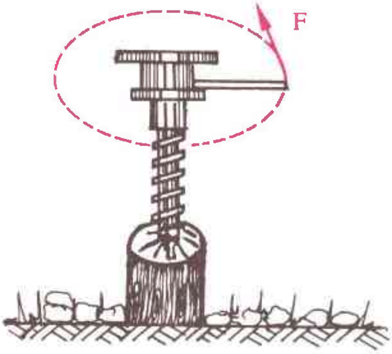
Σχ. 1.2



Σχ. 1.3



Σχ. 1.4

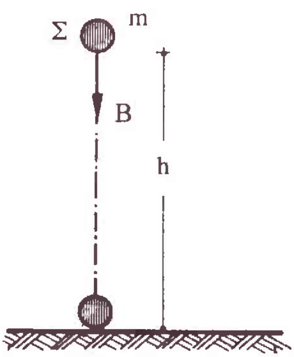


Σχ. 1.5

4. Με ορισμένες προϋποθέσεις μια δύναμη μπορεί να προκαλέσει περιστροφή, π.χ. η δύναμη $\vec{F}$ περιστρέφει το τρυπάνι, σχ. 1.5.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις η δύναμη κάνει μια συγκεκριμένη δουλειά, ωστόσο σύμφωνα με τον επιστημονικό ορισμό του έργου η δύναμη στην περίπτωση (3) δεν παράγει έργο, αφού δε μετακινεί το σημείο εφαρμογής της. Όπως μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς σε όλα τα παραδείγματα εκτός από το 3º, για την εκτέλεση της συγκεκριμένης δουλειάς δαπανάται ενέργεια, γεγονός που σημαίνει ότι το έργο συνδέεται άμεσα με την κατανάλωση ενέργειας. Αυτό γίνεται περισσότερο σαφές, αν φανταστούμε ότι στα παραδείγματα που μελετήσαμε, τη συγκεκριμένη δουλειά την κάνει κάποια μηχανή αντί του ανθρώπου κι' αυτό γιατί οι μηχανές καταναλώνουν ενέργεια μόνο όταν λειτουργούν, ενώ ο άνθρωπος καταναλώνει ενέργεια συνέχεια, ακόμη και όταν δεν εργάζεται.

Στην περίπτωση (1), για να μετακινήσει το κιβώτιο μια μηχανή, πρέπει να καταναλώσει καύσιμα, δηλαδή ενέργεια. Το ίδιο ισχύει και για τον ανυψωτή, που θα ανυψώσει το σώμα του σχήματος 1.2. μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Στη δεύτερη περίπτωση μια μηχανή μπορεί να επιμηκύνει, ή και να συσπειρώσει το ελατήριο, άρα πάλι χρειάζεται ενέργεια. Επίσης στην περίπτωση (4) μια μηχανή μπορεί να στρέφει το τρυπάνι, δηλαδή και πάλι απαιτείται ενέργεια. Αντίθετα στην τρίτη περίπτωση, αν τοποθετήσουμε το βιβλίο πάνω στο θρανίο, εξασφαλίζουμε την ισορροπία του χωρίς κατανάλωση ενέργειας. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι κάθε φορά που παράγεται έργο, δαπανάται ενέργεια.



Σχ. 1.6

Αλλά ποια είναι η ποσοτική σχέση μεταξύ του έργου που παράγεται και της ενέργειας που δαπανάται;
Γνωρίζουμε ότι ένα σώμα, σχ. 1.6, σε ύψος h περικλείει δυναμική ενέργεια Bh και, όταν φτάσει στο έδαφος, η ενέργεια αυτή έχει μηδενιστεί, ενώ το έργο που θα έχει παραχθεί είναι

$$W = Fs$$

$$\text{ή} \quad W = Bh$$

Δηλαδή κατά την πτώση του σώματος παράχθηκε έργο ίσο με τη δυνα-

μική ενέργεια που δαπανήθηκε. Μπορούμε λοιπόν γενικεύοντας να διατυπώσουμε την πρόταση:

«Κάθε φορά που παράγεται έργο έχουμε δαπάνη ενέργειας ίσης με το παραγόμενο έργο».

Ας επανέλθουμε όμως στο παράδειγμα του σχήματος 1.6. Το σώμα Σ φτάνοντας στο έδαφος έχει αποκτήσει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και συνεπώς κινητική ενέργεια.

$$E\kappa = \frac{1}{2} m\upsilon^2, \text{ όπου m είναι η μάζα του.}$$

Επειδή η πτώση είναι ελεύθερη, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\upsilon = gt$$

$$\text{και } h = \frac{1}{2} gt^2,$$

από τις οποίες με απαλοιφή του χρόνου t βρίσκουμε $\upsilon = \sqrt{2gh}$.
Έτσι η κινητική ενέργεια είναι:

$$E\kappa = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m(\sqrt{2gh})^2 = mgh$$

$$\text{ή} \quad E\kappa = Bh$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι ίση με τη δυναμική που είχε στο ύψος h.
Σ' αυτή την περίπτωση το έργο Fs = Bh εκφράζει την ποσότητα της δυναμικής ενέργειας που μετατράπηκε σε κινητική.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

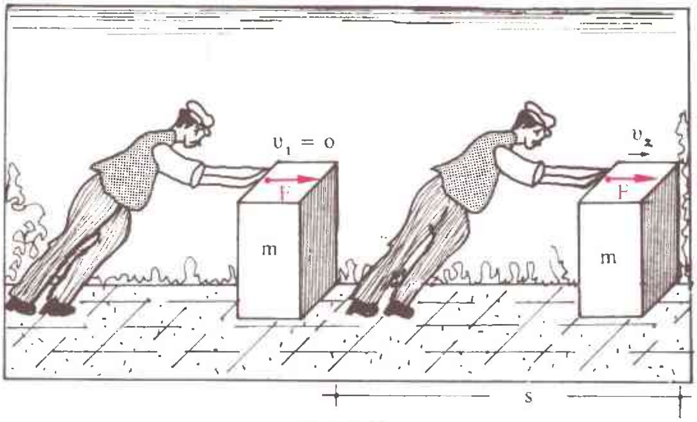
Μείωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος —— **μέσω του έργου Fs** ——→ **Αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος**

Ας εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα. Ο εργάτης στο σχήμα 1.1. δαπανώντας χημική ενέργεια E_x ασκεί στο κιβώτιο δύναμη $\vec{F}$ και το μετακινεί έστω κατά διάστημα s. Αν υποθέσουμε ότι οι τριβές είναι αμελητέες, τότε το έργο της δύναμης θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια που έχει αποκτήσει το κιβώτιο στο τέλος του διαστήματος s, σχ. 1.7.

$$\text{Πράγματι } W = Fs, \text{ όπου } F = m\gamma \text{ και } s = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

$$\text{Έτσι } W = m\gamma \frac{1}{2}\gamma t^2 \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = E_x$$



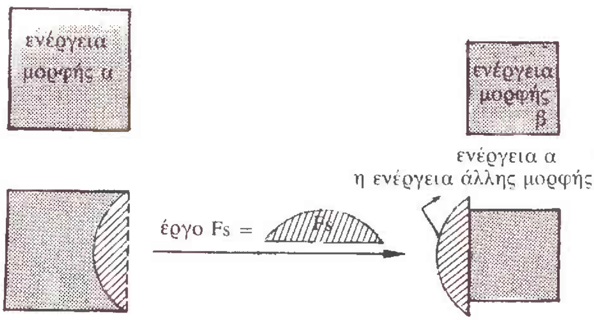
Σχ. 1.7

Και σ' αυτή λοιπόν την περίπτωση το έργο Fs δείχνει την ποσότητα της ενέργειας, που από χημική έγινε κινητική.
Αν κατά τη μετακίνηση του κιβωτίου η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ δεν είναι αμελητέα, τότε ένα μέρος της χημικής ενέργειας του εργάτη μέσω του έργου Ts θα μετατραπεί σε θερμότητα Q, ενώ το υπόλοιπο μέσω του έργου (F − T)s θα γίνει κινητική ενέργεια του κιβωτίου.
Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σχηματικά:

Μείωση της χημικής ενέργειας του εργάτη —(μέσω έργου (F−T)s)→ Κινητική ενέργεια κιβωτίου

Μείωση της χημικής ενέργειας του εργάτη —(μέσω έργου Ts)→ Θερμότητα Q

Γενικά το έργο (W = Fs), όπως το περιγράψαμε **εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας, ή τη μετατροπή της από μια μορφή σε άλλη.** Στην παρακάτω σχηματική παράσταση η ενέργεια της μορφής α (που έχει ένα σώμα Α) μειώθηκε κατά Fs, ενώ η ενέργεια της μορφής β (που έχει ένα άλλο σώμα Β) αυξήθηκε κατά το ίδιο ποσό.



Σε πολλά βιβλία το έργο χαρακτηρίζεται κατά σύμβαση «θετικό» ή «αρνητικό» και αντίστοιχα «παραγόμενο» ή «καταναλισκόμενο».
Με την έννοια που δώσαμε στο έργο, ότι δηλαδή αυτό εκφράζει μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σ' ένα άλλο ή μετατροπή από μια μορφή σε μιαν άλλη, οι παραπάνω χαρακτηρισμοί έχουν το εξής νόημα:
Για το σώμα Α του οποίου η ενέργεια μειώνεται το έργο είναι «αρνητικό», ή «καταναλισκόμενο», ενώ για το σώμα Β του οποίου η ενέργεια αυξάνεται το έργο είναι «θετικό» ή «παραγόμενο».
Η σύμβαση αυτή για πρακτικούς κυρίως λόγους διατηρείται στην ανάπτυξη και μελέτη μερικών θεμάτων.
Στην πράξη είναι γενικά δύσκολο να υπολογίσουμε άμεσα πόση ενέργεια μεταφέρεται από ένα σώμα σ' ένα άλλο, ή μετατρέπεται από μια μορφή σε άλλη. Π.χ. δεν μπορούμε να βρούμε άμεσα τη μείωση της χημικής ενέργειας του εργάτη, σχ. 1.7, που έγινε κινητική ενέργεια και θερμότητα.
Επειδή όμως η ενέργεια που μεταφέρεται ή μετατρέπεται, εκφράζεται, όπως είπαμε, με το έργο Fs, το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις μπορεί να υπολογιστεί, τελικά επιτυγχάνουμε μέσω αυτού τον υπολογισμό της μεταφερόμενης ή μετατρεπόμενης ενέργειας.

1.2. Έργο σταθερής δύναμης

Γνωρίζουμε ότι, αν μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της προς τη διεύθυνσή της κατά διάστημα s, σχ. 1.8, παράγει έργο W που δίνεται από τη σχέση W = Fs

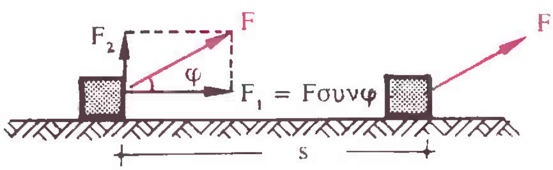


Σχ. 1.8

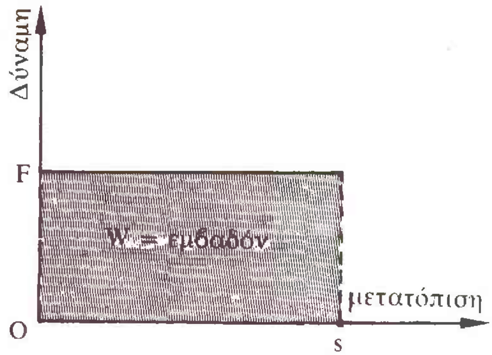
Στην περίπτωση που η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει γωνία φ με τη μετατόπιση, σχ. 1.9, αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, από τις οποίες η πρώτη έχει τη διεύθυνση της μετατόπισης και η δεύτερη είναι κάθετη σ' αυτή.

Σύμφωνα με τον ορισμό έργο παράγει μόνο η συνιστώσα $\vec{F}_1$, με αποτέλεσμα το έργο της $\vec{F}$ να είναι

$$W = F_1 s \qquad (1.1)$$



Σχ. 1.9



Σχ. 1.10

Χαρακτηριστικό παράδειγμα δύναμης, που το έργο της είναι μηδέν, είναι η κεντρομόλος δύναμη στην κυκλική κίνηση ή το βάρος ενός σώματος, όταν το σώμα μετατοπίζεται σε οριζόντιο επίπεδο.

Η γραφική παράσταση μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από $\chi = 0$ μέχρι $\chi = s$ φαίνεται στο σχήμα 1.10. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμμου είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης, δηλαδή

$$\text{Εμβαδόν} = Fs = W$$

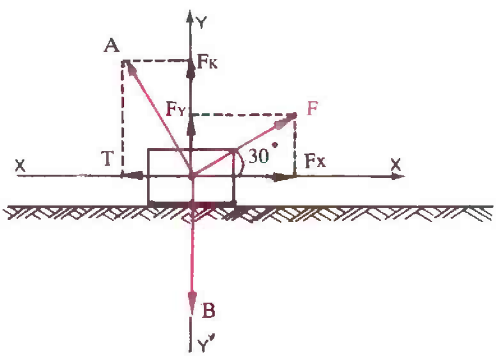
Παράδειγμα

Μια δύναμη F = 100N που σχηματίζει γωνία θ = 30° με το οριζόντιο επίπεδο ασκείται σε σώμα μάζας m = 10kg και το μετατοπίζει κατά διάστημα S = 2m. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το οριζόντιο επίπεδο είναι n = 0,2.

1) Ποιές δυνάμεις ασκούνται στο σώμα;
2) Πόσο είναι το έργο κάθε δύναμης;
3) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος στο τέλος του διαστήματος των 2m;

Δίνεται $g = 10 m/sec^2$

Λύση



1) Στο σώμα ασκούνται, εκτός από τη δύναμη F, το βάρος του B και η αντίδραση A, που αναλύεται στην Fκ και την τριβή T.

Η τριβή T υπολογίζεται ως εξής:

Επειδή κατά τον άξονα YY΄ το σώμα δεν κινείται,

πρέπει $(\Sigma F)_Y = 0$ (α)

ή $F_K + F_Y - B = 0$ (β)

και επειδή $F_Y = F\eta\mu 30$

θα είναι $F_K = B - F\eta\mu\, 30$

Άρα η τριβή T είναι:

$$T = nF_K = n(B - F\eta\mu\, 30).$$

2) Το έργο των B, F_K, F_Y είναι μηδέν, γιατί είναι κάθετες στη μετατόπιση. Το έργο της F_X είναι $W = F_X S$ και με αντικατάσταση:

$$W = F\sigma\upsilon\nu 30 s = 100\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,2\text{Joule} = 173{,}2\text{Joule}$$

Το έργο της τριβής T είναι $W_T = Ts$ και με αντικατάσταση:

$$W_T = n(B - F\eta\mu 30)s \Rightarrow$$

$$W_T = 0{,}2(10\cdot 10 - 100\cdot\frac{1}{2})\cdot 2\text{Joule} \Rightarrow$$

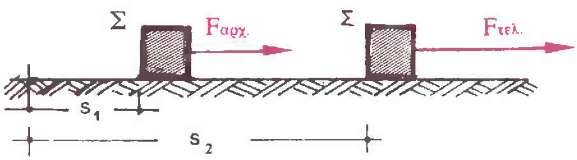
$$W_T = 20\text{Joule}$$

3(Η κινητική ενέργεια Εκ του σώματος, είναι ίση με το έργο της δύναμης F_X, αν αφαιρέσουμε το έργο της τριβής, το οποίο έγινε θερμότητα.

$$E_K = W - W_T = (173{,}2 - 20)\text{Joule} = 153{,}2\ \text{Joule}$$

1.3. Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα Σ, σχ. 1.11, που μετακινείται σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση μιας δύναμης, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση, δηλαδή είναι $F = f(s)$ σχήμα 1.12.

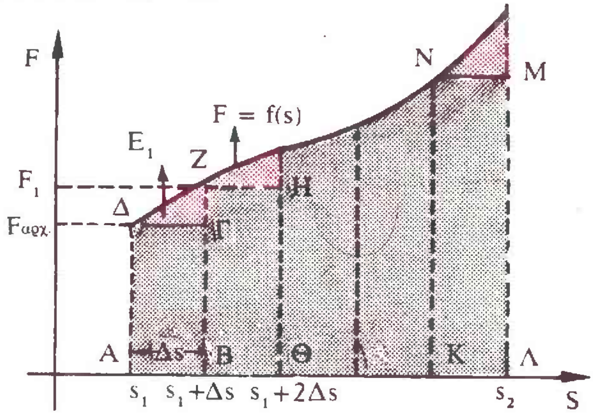


Σχ. 1.11

Ποιο θα είναι το έργο W της μεταβλητής αυτής δύναμης, αν το σώμα μετακινηθεί από τη θέση s_1, στη θέση s_2; Είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό αυτού του έργου δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $W = Fs$, αφού η δύναμη

δεν έχει σταθερό μέτρο. Σ' αυτή την περίπτωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Σ' ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων F και s παριστάνουμε γραφικά τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης σε συνάρτηση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της και χωρίζουμε τη μετατόπιση $s_2 - s_1$ σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών μετατοπίσεων Δs, σχ. 1.12.



Σχ. 1.12

Αν θεωρήσουμε μια στοιχειώδη μετατόπιση Δs από το s_1 στο $s_1 + \Delta s$, μπορούμε γι' αυτή να υποθέσουμε τη δύναμη σχεδόν σταθερή και ίση με $F_{αρχ.}$ Έτσι το έργο της δύναμης γι' αυτή τη στοιχειώδη μετατόπιση είναι

$$\Delta W_{αρχ.} = F_{αρχ.} \Delta s \qquad (1.2.)$$

Όμοια κατά την επόμενη στοιχειώδη μετατόπιση από το $s_1+\Delta s$ στο $s_1+2\Delta s$ η δύναμη έχει σχεδόν σταθερή τιμή και ίση με F_1, σχ. 1.12.

Το έργο γι' αυτή τη μετατόπιση είναι

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s \qquad (1.3)$$

Τελικά το έργο W της μεταβλητής δύναμης, για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση s_1 στη θέση s_2, είναι κατά προσέγγιση το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού όρων, όπως εκείνοι των εξισώσεων (1.2) και (1.3), δηλαδή

$$W = \Delta W_{αρχ.} + \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots$$

ή

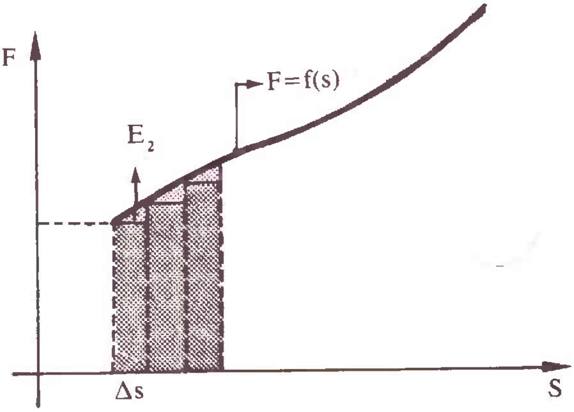
$$W = F_{αρχ.} \Delta s + F_1 \Delta s + F_2 \Delta s + \ldots \qquad (1.4)$$

Από το σχήμα 1.12 συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου παραλληλογράμου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το έργο $\Delta W_{αρχ.}$ της σχέσης (1.2) και κατά

προσέγγιση ίσο με το εμβαδό ΑΒΖΔ. Έτσι η εξίσωση (1.4) παίρνει ακριβώς τη μορφή

$$W = E_{ΑΒΓΔ} + E_{ΒΘΗΖ} + \ldots + E_{ΚΛΜΝ}. \tag{1.5}$$

Η διαφορά των δυο εμβαδών $E_{ΑΒΖΔ} - E_{ΑΒΓΔ} = E_1$, μικραίνει όσο το Δs γίνεται μικρότερο.

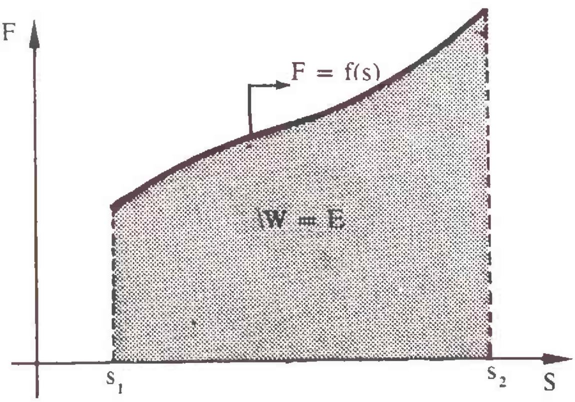


Σχ. 1.13

Πράγματι από τη σύγκριση των σχημάτων (1.12) και (1.13) φαίνεται ότι για μικρότερο Δs είναι $E_2 < E_1$.

Έτσι, αν ο αριθμός των στοιχειωδών μετατοπίσεων γίνει πολύ μεγάλος, τότε το $Δs \to 0$, και τότε το εμβαδόν $E_1 \to 0$.

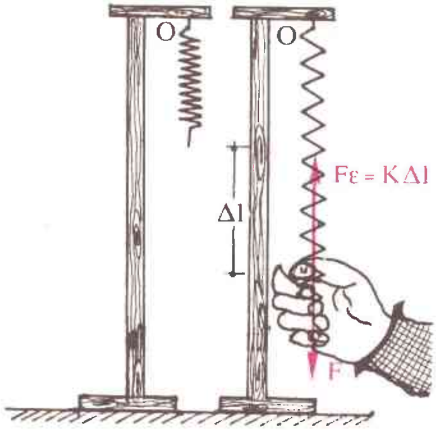
Στην περίπτωση αυτή, όπως προκύπτει από την εξίσωση (1.5), το ολικό έργο W είναι ίσο αριθμητικά με το εμβαδόν Ε μεταξύ της καμπύλης F = f(s) και του άξονα S ανάμεσα στα όρια s_1 και s_2, σχ. 1.14.



Σχ. 1.14

1.4. Υπολογισμός της ενέργειας παραμορφωμένου ελατηρίου

Ας θεωρήσουμε ένα ελατήριο σταθεράς K στερεωμένο σε ένα ακλόνητο σημείο O, σχ. 1.15. O άνθρωπος ασκεί στο ελεύθερο άκρο του δύναμη κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το σημείο εφαρμογης της να κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα.



Σχ 1.15

Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η δύναμη να είναι συνεχώς αντίθετη της δύναμης επαναφοράς* του ελατηρίου.

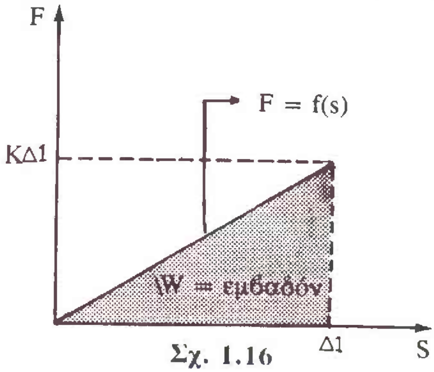
Όταν το ελεύθερο άκρο μετατοπιστεί κατά Δl, τότε η δύναμη επαναφοράς $\vec{F}_\varepsilon$ έχει μέτρο $F_\varepsilon = K\Delta l$ και είναι αντίθετη της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί ο άνθρωπος, δηλαδή

$$F = F_\varepsilon = K\Delta l$$

Το πρόβλημα που τίθεται είναι, πόση ενέργεια μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στο ελατήριο.

Όπως είδαμε στην παράγραφο (1.1), ο υπολογισμός της ζητούμενης ενέργειας μπορεί να γίνει μέσω του έργου Fs. Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ δεν είναι σταθερή, θα καταφύγουμε στη διαδικασία που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Έτσι σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων παριστάνουμε γραφικά τη δύναμη σε συνάρτηση με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της και όπως είναι γνωστό προκύπτει η ευθεία του σχήματος 1.16.



Σχ. 1.16

Το έργο της μεταβλητής δύναμης που ζητάμε θα είναι ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τρίγωνου του σχήματος 1.16.

Έτσι $$W = E = \frac{1}{2}(\Delta l)(K\Delta l)$$

ή $$W = \frac{1}{2}K(\Delta l)^2 \qquad (1.6)$$

Το έργο αυτό εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στο

* Η δύναμη επαναφοράς ενός ελατηρίου περιγράφεται από το νόμο του Hooke και είναι $F_\varepsilon = K\Delta l$, όπου K η σταθερά του ελατηρίου και Δl η επιμήκυνση ή η συσπείρωσή του. Στη συνέχεια όταν αναφέρονται δυνάμεις ελατηρίων, θεωρείται ότι αυτές υπακούουν στο νόμο του Hooke.

ελατήριο και αποθηκεύτηκε σ' αυτό με τη μορφή δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή η δυναμική ενέργεια ενός παραμορφωμένου ελατηρίου δίνεται από την εξίσωση

$$E_{\Delta}=\frac{1}{2}K(\Delta l)^2 \qquad (1.7)$$

Παράδειγμα

Ένα ελατήριο σταθεράς Κ έχει το ένα άκρο του στερεωμένο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν στο ελεύθερο άκρο του ασκηθεί οριζόντια δύναμη F = 10N. προκαλείται συσπείρωση x_1 = 0,1m. Πόση χημική ενέργεια πρέπει να καταναλώσει ένας άνθρωπος για να προκαλέσει στο ελατήριο συσπείρωση x_2 = 0,2m;



Λύση

Όταν το ελατήριο συσπειρωθεί κατά x_1 έχουμε

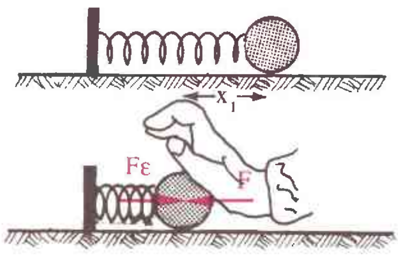
$$F_{\varepsilon} = F \Rightarrow Kx_1 = F \Rightarrow K = \frac{F}{x_1} \Rightarrow$$

$$K = 100N/m$$

Η χημική ενέργεια που καταναλώνει ο άνθρωπος αποθηκεύεται στο ελατήριο με τη μορφή δυναμικής ενέργειας. Έτσι

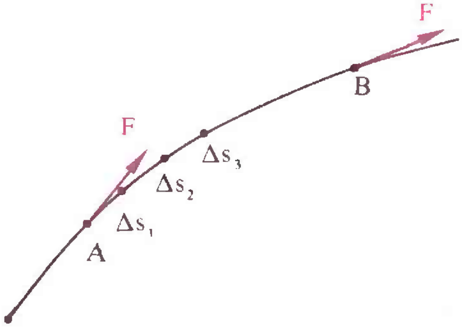
$$E_x=E_{\Delta} \quad \Rightarrow \quad E_x=\frac{1}{2}Kx_2^2=$$

$$=\frac{1}{2}100(0,2)^2 Joule = 2Joule$$



1.5. Έργο δύναμης σταθερού μέτρου, που εφάπτεται σε καμπύλη τροχιά

Ας θεωρήσουμε μια δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου, που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της πάνω στην καμπύλη του σχήματος 1.17, μένοντας πάντα εφαπτόμενη στην τροχιά.



Σχ. 1.17

Για να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης, χωρίζουμε την καμπύλη τροχιά σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών τμημάτων Δs, σχ. 1.17. Κάθε τέτοιο στοιχειώδες τμήμα μπορούμε να το θεωρούμε σχεδόν ευθύγραμμο και τότε η δύναμη θα είναι κάθε φορά παράλληλη σ' αυτό.

Έτσι το έργο της $\vec{F}$ για κάθε τέτοιο στοιχειώδες τμήμα θα είναι

$$\Delta W = F\Delta s$$

και το ολικό έργο για τη μετατόπιση από το A στο B

$$W_{AB} = F\Delta s_1 + F\Delta s_2 + \ldots + F\Delta s_\nu \Rightarrow$$

$$W_{AB} = F(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_\nu) \Rightarrow$$

$$W_{AB} = F(AB) \qquad (1.8)$$

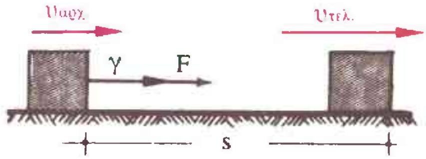
Δηλαδή **το έργο μιας δύναμης σταθερού μέτρου, που είναι πάντα εφαπτόμενη σε καμπύλη τροχιά, είναι ίσο με το γινόμενο του μέτρου της επί το μήκος της τροχιάς.**

1.6 Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

Είδαμε στα προηγούμενα ότι η ενέργεια που μεταφέρεται σ' ένα σώμα, προκαλώντας έτσι αύξηση στην ενέργειά του, υπολογίζεται μέσω του έργου Fs. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, που ο υπολογισμός του έργου είναι δύσκολος ή ακόμη και αδύνατος, π.χ. αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι άγνωστη, ενώ αντίθετα είναι εύκολος ο υπολογισμός της μεταβολής της ενέργειας του σώματος.

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα μάζας m που κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{αρχ.}$, σχ. 1.18.

Υποθέτουμε ότι κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα άγνωστη δύναμη $\vec{F}$ και ότι μετά διάστημα s το σώμα έχει ταχύτητα $\vec{υ}_{τελ.}$. Αν η δύναμη $\vec{F}$ είνα συγγραμμική της ταχύτητας $\vec{υ}_{αρχ.}$ και έχει μέτρο σταθερό, η κίνηση του σώματος θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη και θα ισχύουν οι σχέσεις:



Σχ. 1.18

$$υ_{τελ.} = υ_{αρχ.} + γt$$

$$\text{και} \quad s = υ_{αρχ.}t + \frac{1}{2}γt^2,$$

από τις οποίες με απαλοιφή του χρόνου t βρίσκουμε

$$υ^2_{τελ.} = υ^2_{αρχ.} + 2γs \Rightarrow s = \frac{υ_{τελ.}^2 - υ_{αρχ.}^2}{2γ} \qquad (1.9)$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W = Fs = mγs, \text{ που από την (1.9.) γίνεται}$$

$$W = \frac{1}{2}mυ^2_{τελ.} - \frac{1}{2}mυ^2_{αρχ.} \text{ και τελικά}$$

$$\frac{1}{2}mυ^2_{αρχ.} + W = \frac{1}{2}mυ^2_{τελ.} \qquad (1.10)$$

Την εξίσωση (1.10) την αποδείξαμε για μια σταθερή δύναμη F, επειδή η απόδειξη ήταν σχετικά εύκολη. Με την ίδια όμως μορφή μπορεί αυτή να γραφεί για την περίπτωση περισσότερων δυνάμεων ή ακόμη και για την περίπτωση που κάποιες από τις δυνάμεις δεν είναι σταθερές. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (1.10) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}mυ^2_{αρχ.} + W_1 + W_2 + \ldots = \frac{1}{2}mυ^2_{τελ.},$$

ή

$$\frac{1}{2}mυ^2_{τελ.} - \frac{1}{2}mυ^2_{αρχ.} = W_1 + W_2 + \ldots \qquad (1.11)$$

όπου τα έργα W_1, W_2 ... εκφράζουν την αύξηση ή την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του σώματος, δηλαδή προσθέτονται ή αφαιρούνται από την αρχική του κινητική ενέργεια. Η εξίσωση (1.11) αποτελεί τη μαθηματική έκφραση ενός θεωρήματος, που είναι γνωστό ως θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας και διατυπώνεται ως εξής:

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια ενός σώματος ισούται με την ενέργεια που προσφέρεται ή αφαιρείται μέσω του έργου των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Παράδειγμα

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται σώμα μάζας m = 30kgr με ταχύτητα υ_o = 20m/sec. Κατά τη διεύθυνση και τη φορά της ταχύτητας ασκείται στο σώμα, για t = 5sec, δύναμη F = 50N. Ζητούνται

α) το έργο της δύναμης
β) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Λύση

α) Το σώμα με την επίδραση της δύναμης F αποκτάει σταθερή επιτάχυνση $\gamma = \frac{F}{m}$ και σε χρόνο t διανύει διάστημα

$$s = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\gamma t^2 = (20 \cdot 5 + \frac{1}{2}\,\frac{50}{30}\,25)m \Rightarrow$$

$$s = 120{,}83m$$

Το έργο της δύναμης F είναι:

$$W = Fs = (50 \cdot 120{,}83)Joule \Rightarrow W = 6041{,}5Joule$$

β) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

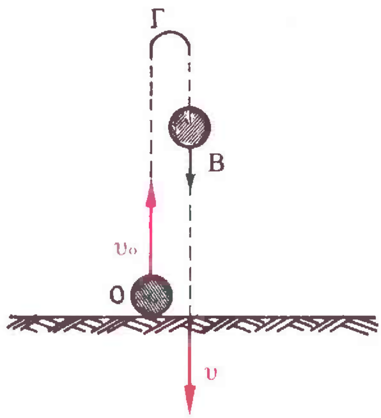
$$\Delta E\kappa = W \Rightarrow \Delta E\kappa = 6041{,}6Joule$$

1.7. Έργο κατά μήκος κλειστής διαδρομής

Από ένα σημείο Ο του εδάφους ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$, σχ. 1.19. Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, η μοναδική δύναμη που δρα στο σώμα είναι η βαρυτική B = mg, που το ανάγκαζει τελικά να επιστρέψει στο ίδιο σημείο με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon}_o$. Έτσι, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, έχουμε

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + W = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \text{ και επειδή } \upsilon = \upsilon_o$$

έχουμε W = 0.



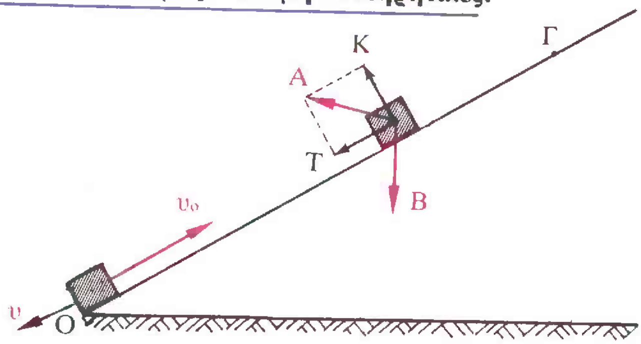
Σχ. 1.19

Δηλαδή το έργο W της βαρυτικής δύναμης B = mg για μια κλειστή διαδρομή Ο → Γ → Ο είναι ίσο με μηδέν.

Τέτοιες δυνάμεις, που το έργο τους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι

ίσο με μηδέν και κατά συνέπεια δεν προκαλούν τελικά καμιά μεταβολή στην ενέργεια του σώματος στο οποίο ασκούνται, ονομάζονται **συντηρητικές.** Στις συντηρητικές δυνάμεις εκτός από τις βαρυτικές ανήκουν οι δυνάμεις του **ηλεκτροστατικού πεδίου** καθώς και οι ελαστικές δυνάμεις των παραμορφωμένων ελατηρίων.

Αντίθετα, δυνάμεις που το έργο τους κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής δεν είναι μηδέν, δηλαδή που προκαλούν μεταβολή στην ενέργεια του σώματος στο οποίο ασκούνται, ονομάζονται **μη συντηρητικές.**



Σχ. 1.20

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης. Από τη βάση Ο ενός κεκλιμένου επιπέδου, ρίχνεται κατά μήκος του ένα σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$, σχ. 1.20. Το σώμα φτάνει σ' ένα σημείο Γ και γυρίζει πάλι στη βάση Ο του επιπέδου, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μικρότερη από εκείνη με την οποία ρίχτηκε.

Δηλαδή κατά την κίνηση του σώματος κατά μήκος της κλειστής διαδρομής Ο → Γ → Ο έχουμε μια μείωση στην ενέργειά του,

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Από τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα κατά μήκος της κλειστής διαδρομής, το βάρος $\vec{B}$ σαν συντηρητική δύναμη και η συνιστώσα $\vec{K}$ της αντίδρασης $\vec{A}$ του επιπέδου σαν κάθετη στην κίνηση δεν προκαλούν καμιά μεταβολή στην ενέργεια του σώματος, αφού το έργο τους είναι ίσο με μηδέν.

Άρα πρέπει να δεχτούμε ότι η μεταβολή της ενέργειας του σώματος προέρχεται από το έργο της τριβής και μόνο.

Δηλαδή η τριβή είναι μια μη συντηρητική δύναμη, γιατί το έργο της κατά μήκος της κλειστής διαδρομής Ο → Γ → Ο δεν είναι μηδέν.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Σ' ένα σώμα μάζης m = 20kgr, που αρχικά ηρεμούσε πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, ασκείται οριζόντια δύναμη F = 30N. Όταν το σώμα έχει απομακρυνθεί κατά 8m από την αρχική του θέση, η ταχύτητά του είναι 4m/sec.

Να υπολογιστούν:

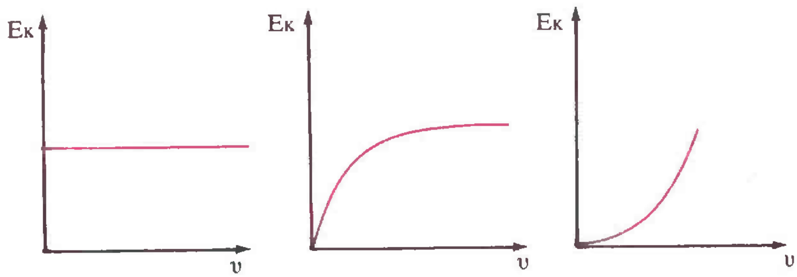
α) Η κινητική ενέργεια, όταν το σώμα έχει διανύσει διάστημα 8m.

β) Το ποσό της ενέργειας που προσφέρθηκε μέσω της δύναμης F κατά το παραπάνω διάστημα.

γ) Πώς δικαιολογείται η διαφορά των αποτελεσμάτων στις προηγούμενες ερωτήσεις;

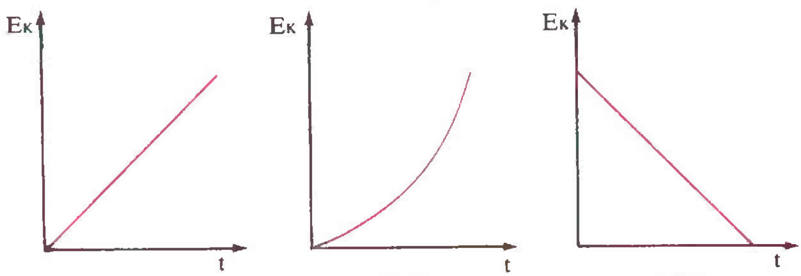
(**Απ.** α) 160Joule, β) 240Joule, γ) τριβές)

2. Ποια από τις παρακάτω καμπύλες παριστάνει την κινητική ενέργεια ενός σώματος σε συνάρτηση με την ταχύτητά του;



(α)   (β)   (γ)

3. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h. Ποια από τις παρακάτω καμπύλες παριστάνει την κινητική του ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο πτώσης;



(α)   (β)   (γ)

4. Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου αυξάνεται από 10m/sec σε 15m/sec και κατόπιν από 15m/sec σε 20m/sec.

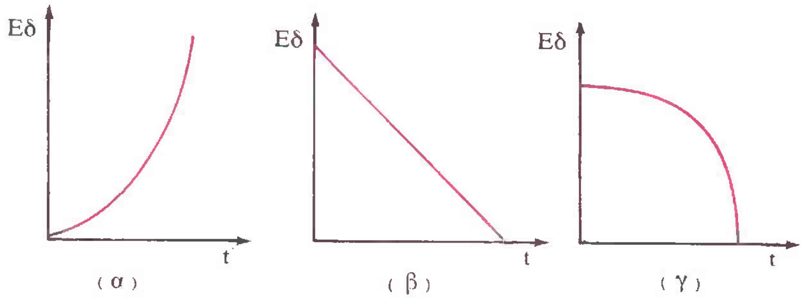
Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου είναι:

α) μεγαλύτερη στην πρώτη περίπτωση;
β) μεγαλύτερη στη δεύτερη περίπτωση;
γ) ίδια και στις δυο περιπτώσεις;

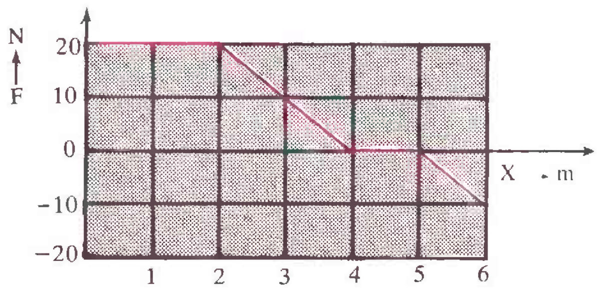
5. Όταν ένα αυτοκίνητο φρενάρει και σταματάει, η αύξηση της θερμοκρασίας στα φρένα θεωρούμε ότι είναι ανάλογη της κινητικής του ενέργειας. Η αύξηση της θερμοκρασίας των φρένων είναι 20°C, όταν η ταχύτητα είναι 10m/sec. Πόση είναι η αύξηση της θερμοκρασίας των φρένων όταν η ταχύτητα είναι 30m/sec;

Α 40°C
Β 60°C
Γ 80°C
Δ 120°C
Ε 180°C

6. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h. Ποια από τις παρακάτω καμπύλες παριστάνει τη δυναμική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο πτώσης.



7. Σώμα μάζας 10kgr αρχίζει να κινείται με την επίδραση δύναμης F που μεταβάλλεται με την απόσταση x, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Πόσο μεταβλήθηκε η κινητική ενέργεια του σώματος, όταν αυτό μετατοπίστηκε κατά 4m;
β) Πόσο είναι το έργο της δύναμης, όταν το σώμα μετακινηθεί κατά 6m;
γ) πόση είναι η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό έχει διανύσει διάστημα 6m;

(**Απ.** α) αυξήθηκε κατά 60Joule, β) 55Joule, γ) $\sqrt{11}\frac{m}{sec}$)

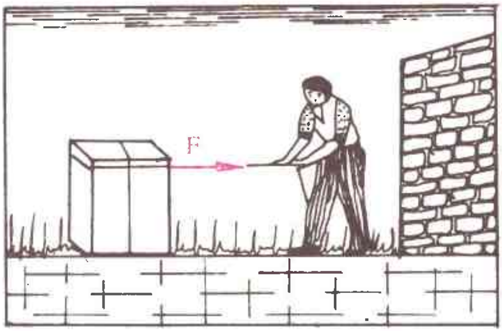
8. Ο εργάτης μετακινεί το κιβώτιο μάζας 100kgr ασκώντας σ' αυτό σταθερή δύναμη F = 500N. Επειδή το σκοινί γλυστράει από τα χέρια του, όταν αυτός έχει κινηθεί κατά s = 10m, το κιβώτιο έχει μετακινηθεί κατά s_1 = 6m. Αν ο συντελεστής τριβής είναι n = 0,05, να υπολογισθούν:

α) η ενέργεια που κατανάλωσε ο εργάτης.

β) η ενέργεια που δόθηκε στο κιβώτιο.

γ) Πόση είναι η κινητική ενέργεια που απόκτησε το κιβώτιο, στο τέλος της διαδρομής.

($g = 10m/sec^2$)



(**Απ.** α) 5000Joule, β) 3000Joule, γ) 2700Joule)

9. Ένα αυτοκίνητο με μάζα m = 1500kgr κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα 115,2km/h. Ο οδηγός σβήνει τη μηχανή, οπότε η ταχύτητα του αυτοκινήτου πέφτει στα 100,8km/h μέσα σε 3sec. Ζητούνται:

α) Η συνολική αντίσταση που επιβραδύνει το όχημα.

β) Πόση ισχύ πρέπει να αναπτύσσει η μηχανή, για να κινείται το αυτοκίνητο με 30m/sec;

γ) Με 1 λίτρο βενζίνη πόση απόσταση θα διανύσει το όχημα , αν κινείται με σταθερή ταχύτητα $108\frac{km}{h}$, δεδομένου ότι 1 λίτρο βενζίνης, όταν καεί, αποδίδει $8\cdot10^6$Joule;

(**Απ.** α) 2000N, β) $6\cdot10^4$Watt, γ) 4000m)

10. Μια μάζα m = 5kgr μετατοπίζεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια κατά x = 3m από μια δύναμη F = 50N, που σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία θ = 45°. Ποιο είναι το συνολικό έργο των δυνάμεων:

α) αν η επιφάνεια είναι λεία

β) αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι n = 0,3;

Δίνεται $g = 10m/sec^2$.

(**Απ.** α) 106Joule, β) 92,6Joule)

11. Αυτοκίνητο έχει μάζα 1000kgr και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 54km/h. Η δύναμη $F_{αντ}$ που αντιστέκεται στην κίνηση του οχήματος, δίνεται από τη σχέση:

$$F_{αντ} = 30υ(N)$$

α) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου;

β) Πόση ενέργεια απαιτείται, για να μετακινηθεί το αυτοκίνητο κατά 1km;

γ) Με ποιο ρυθμό μετατρέπεται η ενέργεια που παρέχει η μηχανή του αυτοκινήτου σε θερμότητα;

δ) Υπολογίστε την ισχύ που αποδίδει η μηχανή του αυτοκινήτου σε HP.

(Δίνεται 1HP = 745,7Watt)

(Απ. α) 112500Joule, β) $4{,}5\cdot10^5$Joule, γ) 6750Joule/sec, δ) 9,05HP)

12. Σώμα μάζας 2kgr αρχίζει να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση δύο δυνάμεων $F_1 = F_2 = 5N$ κάθετων μεταξύ τους, για χρονικό διάστημα 2sec.

Να προσδιοριστούν:

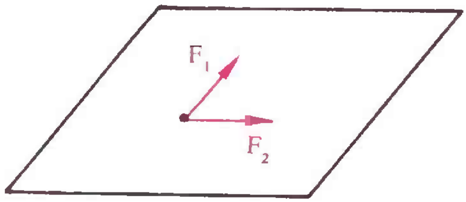
α) Η διεύθυνση κατά την οποία θα κινηθεί το σώμα.

β) Η απόσταση που θα διανύσει σε 2sec.

γ) Το έργο που κάνει κάθε δύναμη.

δ) Το έργο της συνισταμένης, αν η αρχική ταχύτητα του σώματος ήταν μηδέν.

(Απ. β) 7,07m, γ) 25Joule, δ) 50Joule)



13. Ένας εργάτης σπρώχνει σε ανηφορικό δρόμο κιβώτιο μάζας m = 100kgr ασκώντας δύναμη F = 1000N παράλληλη προς το δρόμο, ο οποίος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ = 30°. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι n = 0,2 και το σώμα έχει μετακινηθεί κατά 20m, να βρεθούν:

α) Πόση χημική ενέργεια έχει καταναλώσει ο εργάτης για να μετακινήσει το κιβώτιο;

β) Με ποιες μορφές εμφανίζεται η ενέργεια αυτή και τι ποσοστό αντιστοιχεί σε κάθε μια;

($g = 10m/sec^2$)

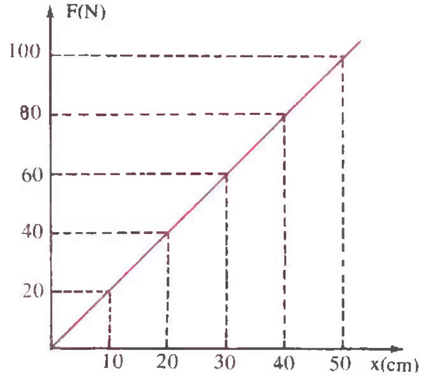
(Απ. α) 20000Joule, β) 50% δυναμική, 33% κινητική, 17% θερμότητα).

14. Ένας άνθρωπος συμπιέζει με τα χέρια του συμμετρικά ένα ελατήριο και το συσπειρώνει από τα 40cm στα 10cm. Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 500N/m να βρεθεί η χημική ενέργεια που κατανάλωσε ο άνθρωπος. Αν οι δύο δυνάμεις των χεριών του είναι αντίθετες, πόσο έργο παράγει η κάθε δύναμη;

(Απ. α) 22,50Joule, β) 11,25Joule)

15. Η δύναμη F που ασκείται σε ένα ελατήριο μεταβάλλεται με την επιμήκυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Πόση ενέργεια πρέπει να δαπανηθεί, για να επιμηκυνθεί το ελατήριο κατά 20cm;



β) Πόση ενέργεια πρέπει επιπλέον να προσφερθεί, για να επιμηκυνθεί το ελατήριο κατά 10cm ακόμα;

γ) Πόση ενέργεια έχει τελικά αποθηκευτεί στο ελατήριο;

(**Απ.** α) 4Joule, β) 5Joule, γ) 9 Joule)

16. Ένα ελατήριο είναι κατακόρυφο με το κάτω άκρο του στερεωμένο. Στο άλλο άκρο τοποθετείται σώμα βάρους 10N. Η σταθερά του ελατηρίου είναι K = 200N/m.

α) Πόση χημική ενέργεια πρέπει να καταναλώσει ένας άνθρωπος, για να προκαλέσει νέα συσπείρωση του παραμορφωμένου από το σώμα ελατηρίου κατά x_2 = 5cm;

β) Αν ο άνθρωπος αφήσει το ελατήριο ελεύθερο, σε ποιο ύψος θ' ανέβει το σώμα;

(**Απ.** α) 0,25Joule, β) h = 0,1m)

17. Από δύο ελατήρια Α και Β, το Α είναι σκληρότερο από το Β. Σε ποιο από τα δύο αποθηκεύεται περισσότερη ενέργεια:

α) αν τεντωθούν κατά το ίδιο μήκος;

β) αν τεντωθούν με την ίδια δύναμη;

18. Πάνω σ' ένα λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ακίνητο ένα κιβώτιο μάζας m = 60kgr. Ένας εργάτης σπρώχνει το κιβώτιο με σταθερή οριζόντια δύναμη.

α) Πόση επί πλέον χημική ενέργεια καταναλώνει ο εργάτης, μέχρι να αποκτήσει το κιβώτιο ταχύτητα 2m/sec;

β) Αν το επίπεδο δεν είναι λείο, τότε ένα μέρος της χημικής ενέργειας που καταναλώνει ο εργάτης, για να κάνει την ίδια δουλειά, μετατρέπεται μέσω του έργου της τριβής W_T σε θερμότητα Q = 10Joule. Πόση χημική ενέργεια χρειάζεται ο εργάτης, για να επιταχύνει το σώμα στην ταχύτητα των 2m/sec;

(**Απ.** α) 120Joule, β) 130Joule)

19. Πάνω σε οριζόντιο επίπεδο κινείται σώμα μάζας m = 25kgr. Σε κάποια θέση Α το σώμα έχει ταχύτητα $υ_0$ και δέχεται την επίδραση σταθερής δύναμης F = 260N, παράλληλης και της ίδιας φοράς με την $υ_0$. Η δύναμη ασκείται στο σώμα για χρόνο t = 2sec, στο τέλος του οποίου αυτό έχει αποκτήσει ταχύτητα υ = 5m/sec. Μετά το τέλος των δύο δευτερολέπτων το σώμα κινείται χωρίς πλέον την επίδραση της F και σταματάει αφού διανύσει διάστημα s = 150cm. Ζητούνται:

α) Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.
β) Η αρχική ταχύτητα $υ_0$ του σώματος.
γ) Η συνολική θερμότητα που παράχτηκε κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο Α μέχρι να σταματήσει.
($g = 10m/sec^2$)

(**Απ.** α) 0,83, β) 0,8m/sec, γ) 1514,7Joule)

20. Σώμα μάζας m = 5kgr ρίχνεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $θ = 30^o$ με αρχική ταχύτητα $υ_0 = 20m/sec$. Αν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο είναι $n = \sqrt{3}/3$, να βρεθούν:
α) Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα ανεβαίνοντας.
β) Θα επιστρέψει το σώμα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου;
γ) Η θερμότητα που αναπτύσσεται κατά την άνοδο του σώματος.
($g = 10m/sec^2$)

(**Απ.** α) 20m, β) όχι, γ) 500Joule)

21. Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με ένα ελατήριο σταθεράς Κ, που έχει το ένα του άκρο στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, έχοντας τη στιγμή της σύγκρουσης ταχύτητα $υ_0$.

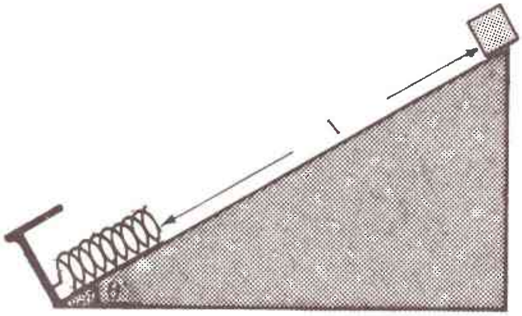


Θέλουμε να βρούμε τη συσπείρωση του ελατηρίου
α) αν η τριβή ολίσθησης θεωρηθεί αμελητέα,
β) αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το οριζόντιο επίπεδο είναι n. Δίνεται το g.

(**Απ.** α) $υ_0\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

β) $\dfrac{-nmg+\sqrt{n^2m^2g^2+Kmυ_0^2}}{K}$

22. Ελατήριο σταθεράς $K = 1000N/m$ είναι τοποθετημένο στη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $θ = 30^o$ Σώμα μάζας $m = 10Kgr$ αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή του



κεκλιμένου επιπέδου και, αφού συγκρουστεί με το ελατήριο, ηρεμεί στιγμιαία συμπιέζοντας το ελατήριο κατά x = 0,63m.

Να υπολογίσετε:

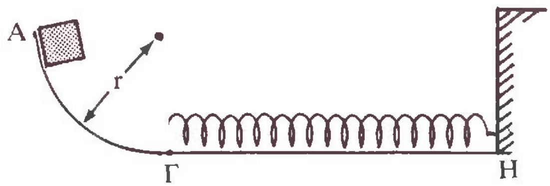
α) Πόση απόσταση διανύει συνολικά το σώμα, μέχρι να ηρεμήσει στιγμιαία.

β) Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

(Δίνεται $g = 10m/sec^2$).

(**Απ.** α) 4m, β) 5,8m/sec)

23. Ένα σώμα μάζας m = 2kgr, αφήνεται να γλυστρήσει από το σημείο Α κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου που έχει ακτίνα r = 1m. Το σώμα περνάει από τη βάση Γ του κύκλου με ταχύτητα $υ_Γ$ = 4m/sec.



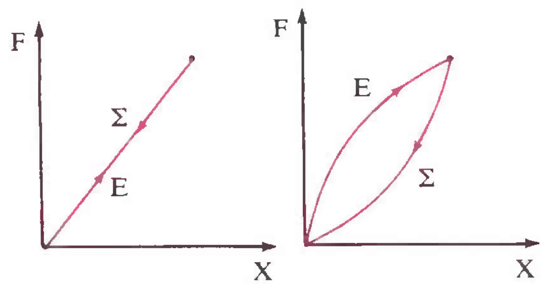
α) Πόση θερμότητα παράχτηκε εξαιτίας της τριβής κατά τη μετακίνηση από τη θέση Α στη θέση Γ;

β) Κατά μήκος της ΓΗ υπάρχει ελατήριο, που το ένα άκρο του είναι στο Γ και το άλλο είναι στερεωμένο. Αν θεωρήσουμε την τριβή αμελητέα κατά μήκος της ΓΗ, πόση θα είναι η συσπείρωση του ελατηρίου, όταν το σώμα στη θέση Γ συγκρουσθεί με το ελατήριο;

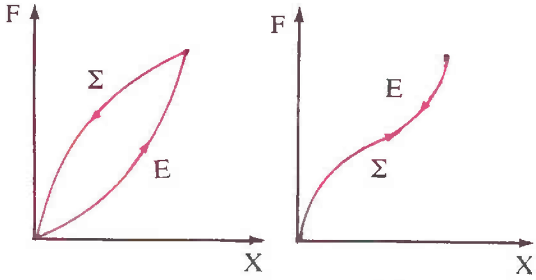
Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου K = 355N/m και ότι $g = 9,8m/sec^2$

(**Απ.** α) 3,6Joule, β) 0,3m)

24. Έχουμε 4 ελατήρια, α, β, γ και δ, που η επιμήκυνση και η συσπείρωση παριστάνον-



(α) (β)



(γ) (δ)

ται αντίστοιχα από τις καμπύλες Ε και Σ. Σε ποια από τα 4 ελατήρια οι δυνάμεις είναι συντηρητικές;

2
Ορμή - Κρούση

Ορμή

2.1. Γενικά περί ορμής

Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι ένα τζάμι θα σπάσει, αν το χτυπήσει ένα σώμα που έχει μεγάλη μάζα ή μεγάλη ταχύτητα. Επίσης η σύγκρουση δυο αυτοκινήτων είναι τόσο περισσότερο καταστρεπτική, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ή η ταχύτητά τους. Τέλος η τεχνητή διάσπαση των σταθερών πυρήνων κατά το βομβαρδισμό τους με σωματίδια πολύ μικρής μάζας είναι δυνατή, μόνον αν τα σωματίδια κινούνται με πολύ μεγάλη ταχύτητα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αποτέλεσμα της σύγκρουσης δυό σωμάτων εξαρτάται τόσο από τη μάζα, όσο και από την ταχύτητά τους.

Έτσι, για να μελετήσουμε φαινόμενα ανάλογα μ' αυτά που αναφέραμε, εισάγουμε ένα φυσικό μέγεθος, που ονομάζεται ορμή $\vec{J}$ και εκφράζεται από το γινόμενο της μάζας m του σώματος επί την ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$. Δηλαδή

$$\boxed{\vec{J} = m\vec{\upsilon}} \qquad (2.1)$$

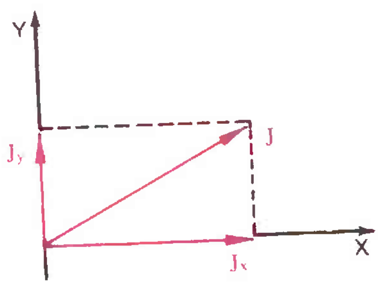
Όπως φαίνεται από την εξίσωση (2.1), η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος που έχει τη φορά και τη διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Έτσι, όπως κάθε διανυσματικό μέγεθος, π.χ. ταχύτητα, δύναμη κ.τ.λ., η ορμή μπορεί να αναλύεται σε συνιστώσες, σχ. 2.1.

Αν θεωρήσουμε ένα σώμα μάζας m, που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, η ορμή του δίνεται από την εξίσωση (2.1) και η κινητική του ενέργεια είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

Η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της (2.1) παίρνει τη μορφή:

$$E_K = \frac{J^2}{2m}, \qquad (2.2)$$



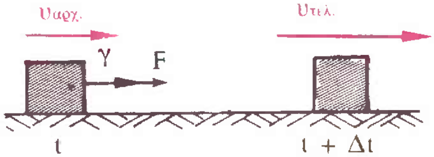
Σχ. 2.1.

από την οποία φαίνεται ότι η κινητική ενέργεια του σώματος συνδέεται άμεσα με την ορμή του.

2.2. Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής.

Γνωρίζουμε ότι, αν σ' ένα σώμα μάζας m ασκήσουμε δύναμη $\vec{F}$, σχ. 2.2, το σώμα θ' αποκτήσει επιτάχυνση $\vec{\gamma}$, της οποίας το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά καθορίζονται από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής

$$\vec{F}=m\vec{\gamma} \qquad (2.3)$$



Σχ. 2.2.

Ο νόμος αυτός, που είναι γνωστός και ως δεύτερος νόμος του Newton, δε διατυπώθηκε αρχικά με τη μορφή αυτή. Μια ελεύθερη μετάφραση της αρχικής του διατύπωσης από το Newton, όπως υπάρχει στο λατινικό κείμενο του έργου του «Principia», είναι η εξής:

> «Η μεταβολή στην ποσότητα της κίνησης ενός σώματος είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης δύναμης και συμβαίνει κατά τη διεύθυνση της δύναμης... Η ποσότητα της κίνησης είναι ανάλογη της μάζας του σώματος και της ταχύτητάς του».

Από τον ορισμό της «ποσότητας κίνησης» μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο Newton χρησιμοποίησε αυτόν τον όρο για το μέγεθος που εμείς σήμερα ονομάζουμε ορμή. Επίσης από τα γραπτά του προκύπτει ότι η έκφραση «εφαρμοζόμενη δύναμη» αναφέρεται στη συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα και ότι «μεταβολή» σημαίνει ρυθμός μεταβολής.

Έτσι με σημερινή ορολογία η πρόταση του Newton μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι ανάλογος της συνολικής δύναμης που εφαρμόζεται σ' αυτό και η μεταβολή γίνεται κατά τη διεύθυνση αυτής της δύναμης.

Η πρόταση αυτή είναι μια γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής και μαθηματικά αποδίδεται από την εξίσωση:

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t}} \qquad (2.4)$$

όπου $\Delta\vec{J}$ είναι η μεταβολή στην ορμή του σώματος που συμβαίνει στο χρονικό διάστημα Δt και $\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων που την προκαλούν. Από τη σχέση (2.4) μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (2.3). Πράγματι, αν, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2, η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο Δt αυξάνει από $\vec{\upsilon}_{αρχ.}$ σε $\vec{\upsilon}_{τελ.}$, η αύξηση της ορμής θα είναι:

$$\Delta\vec{J} = \vec{J}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{J}_{\alpha\rho\chi.} = m\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda.} - m\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi.}$$

$$\text{ή} \quad \Delta\vec{J} = m(\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi.})$$

Αντικαθιστώντας τη μεταβολή της ορμής στην εξίσωση (2.4) παίρνουμε για τη δύναμη που την προκαλεί:

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi.})}{\Delta t}$$

και επειδή

$$\frac{\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda.} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi.}}{\Delta t} = \vec{\gamma}$$

τελικά

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Η έκφραση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής με τη μορφή (2.4) πλεονεκτεί της αντίστοιχης έκφρασης (2.3).
Πράγματι η τελευταία εφαρμόζεται μόνο, όταν η μάζα του σώματος παραμένει σταθερή, ενώ η (2.4) μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις που η μάζα μεταβάλλεται, όπως συμβαίνει σε μεγάλες ταχύτητες, της τάξης του 0,8c και πάνω, όπου c η ταχύτητα του φωτός.

Παράδειγμα

Η ταχύτητα ενός σώματος μάζας 0,2kgr είναι 19m/sec και σε χρόνο Δt = 2sec διπλασιάζεται. Το σώμα κινείται ευθύγραμμα.
1) Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος;
2) Υπολογίστε τη δύναμη που προκάλεσε τη μεταβολή της ορμής θεωρώντας ότι είχε σταθερό μέτρο.

Λύση

1) Η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι:

$$\Delta J = J_{\tau\varepsilon\lambda.} - J_{\alpha\rho\chi.} = m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda.} - m\upsilon_{\alpha\rho\chi.}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει ΔJ = 3,8kgrm/sec.

2) Η δύναμη F υπολογίζεται από τη σχέση (2.4).

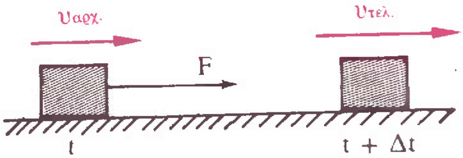
$$F = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{3,8}{2} \frac{\text{kgr.m/sec}}{\text{sec}}$$

$$\text{ή} \quad F = 1,9N$$

1997

2.3. Θεώρημα ώθησης - ορμής.

Έστω ένα σώμα μάζας m, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}_{αρχ.}$ και η ορμή του είναι $\vec{J}_{αρχ.} = m\vec{υ}_{αρχ.}$. Αν ασκήσουμε στο σώμα δύναμη $\vec{F}$ για χρονικό διάστημα Δt, σχ. 2.3, τότε η ταχύτητά του θα αυξηθεί από $\vec{υ}_{αρχ.}$ σε $\vec{υ}_{τελ.}$ και η ορμή του από $\vec{J}_{αρχ.}$ σε $\vec{J}_{τελ.} = m\vec{υ}_{τελ.}$ Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής με τη γενικότερη διατύπωσή του έχουμε:



$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t} \qquad \text{ή}$$

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{J} \qquad (2.5),$$

Σχ. 2.3.

όπου $\Delta\vec{J} = \vec{J}_{τελ.} - \vec{J}_{αρχ.}$

είναι η μεταβολή της ορμής του σώματος κατά το χρονικό διάστημα Δt

Το γινόμενο $\vec{F}\Delta t$ εκφράζει ένα διανυσματικό μέγεθος που έχει διαστάσεις ορμής και ονομάζεται **ώθηση** $\vec{\Omega}$ της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη διάρκεια του χρόνου Δt, δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{F}\Delta t} \qquad (2.6)$$

Από τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{F}$, $\Delta\vec{J}$ και $\vec{\Omega}$ έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση και φορά και ότι το μέτρο της ώθησης είναι ίσο με το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος. Είναι φανερό ότι, αν κατά τη διάρκεια του χρόνου Δt ασκούνται στο σώμα περισσότερες από μια δυνάμεις, η εξίσωση (2,5) θα γράφεται με τη μορφή:

$$\Sigma\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{J},$$

όπου $\Sigma\vec{F}$ θα είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

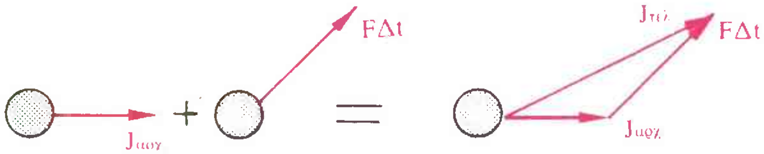
Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.5) τη μεταβολή της ορμής $\Delta\vec{J} = \vec{J}_{τελ.} - \vec{J}_{αρχ.}$, αυτή παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\boxed{\vec{J}_{αρχ.} + \vec{F}\Delta t = \vec{J}_{τελ.}} \qquad (2.7)$$

Η εξίσωση (2.7) αποτελεί τη μαθηματική έκφραση ενός θεωρήματος που είναι γνωστό ως θεώρημα ώθησης - ορμής και διατυπώνεται ως εξής:

«Αν σ' ένα σώμα αρχικής ορμής $\vec{J}_{αρχ.}$ ενεργήσει δύναμη $\vec{F}$ για χρονικό διά-

στημα Δt, η τελική του ορμή $\vec{J}_{τελ.}$ προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της αρχικής ορμής $\vec{J}_{αρχ.}$ και της ώθησης $\vec{F}Δt$ της δύναμης κατά τη διάρκεια του θεωρούμενου χρονικού διαστήματος», σχ. 2.4.



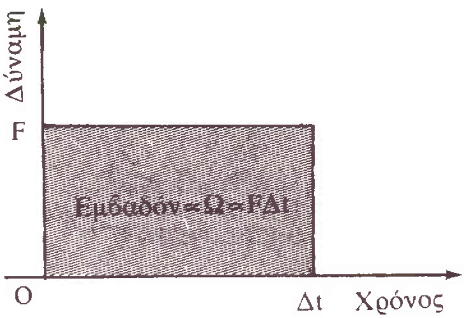
Σχ. 2.4. Η τελική ορμή του σώματος είναι η συνισταμένη του $\vec{J}_{αρχ.}$ και $\vec{F}Δt$.

Η εξίσωση (2.7) είναι ανάλογη με την εξίσωση

$$E_{K(αρχ.)} + W = E_{K(τελ.)},$$

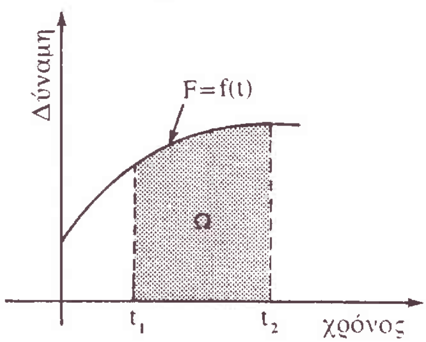
που εκφράζει το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή, όπως το έργο εκφράζει μεταφορά ενέργειας, κατά τον ίδιο τρόπο και η ώθηση εκφράζει μεταφορά ορμής.

Αν παραστήσουμε γραφικά τη δύναμη σε συνάρτηση με το χρόνο, τότε το γραμμοσκιασμένο εμβαδό, σχ. 2.5, είναι αριθμητικά ίσο με την ώθηση της δύναμης κατά τη διάρκεια του χρόνου Δt.



Σχ. 2.5.

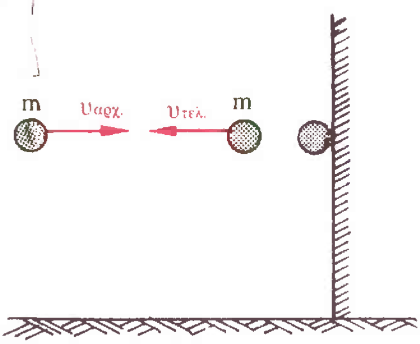
Μέχρι τώρα θεωρήσαμε τη δύναμη $\vec{F}$ σταθερή. Όμως η έννοια της ώθησης μπορεί να γενικευτεί, ώστε να περιλάβει και δυνάμεις που μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο. Στην περίπτωση αυτή ο υπολογισμός της ώθησης γίνεται με διαδικασία ανάλογη αυτής που εφαρμόζεται για τον υπολογισμό του έργου μεταβλητής δύναμης (§1.3). Έτσι, αν μια δύναμη μεταβάλλεται χρονικά και η γραφική της παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο είναι αυτή που εικονίζεται στο σχήμα 2.6, η ώθησή της, για το χρονικό διάστημα $Δt = t_2 - t_1$ θα είναι ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.



Σχ. 2.6.

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (2.5), ίσες μεταβολές στην ορμή ενός σώματος αντιστοιχούν σε ίσες ωθήσεις.

1992



Σχ. 2.7.

Αλλά η ώθηση είναι γινόμενο δύναμης επί χρόνο, με αποτέλεσμα ίσες μεταβολές στην ορμή του σώματος να αντιστοιχούν σε δυνάμεις που είναι αντίστροφα ανάλογες με το χρόνο δράσης τους στο σώμα. Αυτό φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Μια μπάλα μάζας m, που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{υ}_{αρχ.}$, πέφτει σ' έναν κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με ταχύτητα $\vec{υ}_{τελ.}$, σχ. 2.7. Μόλις η μπάλα έρθει σ' επαφή με τον τοίχο δέχεται απ' αυτόν δύναμη, η οποία μεταβάλλεται από μηδέν μέχρι μιας μέγιστης τιμής $\vec{F}_{μεγ.}$ και στη συνέχεια μηδενίζεται, όταν η μπάλα εγκαταλείψει τον τοίχο. Η δύναμη αυτή προκαλεί μεταβολή στην ορμή της μπάλας

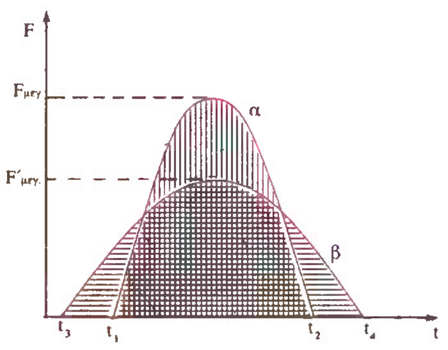
$$ΔJ = mυ_{τελ.} - (-mυ_{αρχ.})$$

$$\text{ή } ΔJ = m(υ_{τελ.} + υ_{αρχ.})$$

Η ώθηση Ω της μεταβλητής αυτής δύναμης είναι ίση με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη α του σχήματος 2.8, όπου $Δt=t_2-t_1$ είναι ο χρόνος που διαρκεί η επαφή της μπάλας με τον τοίχο. Ας θεωρήσουμε ότι μια δεύτερη μπάλα λιγότερο σκληρή πέφτει και ανακλάται στον κατακόρυφο τοίχο όπως και η πρώτη. Αν υποθέσουμε ότι η μεταβολή της ορμής της ΔJ΄ είναι ίση με την μεταβολή της ορμής ΔJ της πρώτης μπάλας, θα πρέπει και η ώθηση Ω΄ της μεταβλητής δύναμης που δέχεται από τον τοίχο να είναι Ω΄ = Ω.

Επειδή όμως δεχτήκαμε τη δεύτερη μπάλα λιγότερο σκληρή από την πρώτη, ο χρόνος που διαρκεί η επαφή της με τον τοίχο, $Δt' = t_4 - t_3$, θα είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο χρόνο Δt της πρώτης μπάλας. Έτσι η μέγιστη τιμή $F'_{μεγ.}$ της μεταβλητής δύναμης θα είναι τώρα μικρότερη. Η ώθηση Ω΄ είναι ίση με το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη β του σχήματος 2.8, όπου φαίνεται ότι, επειδή Ω = Ω΄ και Δt΄> Δt, είναι $F'_{μεγ.} < F_{μεγ.}$

Δηλαδή, όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος στον οποίο η ορμή ενός σώματος μεταβάλλεται τόσο μικρότερη είναι η μέγιστη δύναμη που ασκείται σ' αυτό.



Σχ. 2.8.

Έτσι ένα αυτοκίνητο που πέφτει σ' έναν τοίχο δέχεται δύναμη που μπορεί να το καταστρέψει, ενώ πέφτοντας με την ίδια ταχύτητα σ' ένα σωρό άμμου δέχεται πολύ μικρότερη δύναμη, αφού ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι να σταματήσει το αυτοκίνητο είναι τώρα μεγαλύτερος.

Για τον ίδιο λόγο χρησιμοποιούνται στρώματα από αφρολέξ, πάνω στα οποία πέφτουν οι αθλητές που εκτελούν άλματα ύψους, ή χορτοτάπητες στα γήπεδα ποδοσφαίρου.

Παράδειγμα

Σώμα μάζας 1kgr κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 30m/sec και κάποια στιγμή ασκείται σ' αυτό σταθερή δύναμη μέτρου F = 10N της ίδιας φοράς με την ταχύτητα και για χρονικό διάστημα 5sec.

Να υπολογίσετε:

α) Την ώθηση της δύναμης.

β) Την τελική ορμή του σώματος.

γ) Την τελική ταχύτητα του σώματος.

δ) Να σχεδιάσετε ανυσματικό διάγραμμα ανάλογο του σχήματος 2.4.

ε) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα δύναμη - χρόνος και από αυτό να υπολογίσετε την ώθηση της δύναμης για χρονικό διάστημα 5sec.

Λύση

α) $\Omega = F\Delta t = 10 \cdot 5 Nsec = 50 Nsec$.

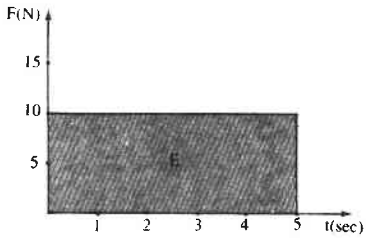
β) Από το θεώρημα ώθησης - ορμής έχουμε

$$J_{αρχ.} + \Omega = J_{τελ.} \Rightarrow J_{τελ.} = 1 \cdot 30 kgrm/sec + 50 Nsec \Rightarrow J_{τελ.} = 80 kgrm/sec$$

$$γ)\ J_{τελ.} = m υ_{τελ.} \Rightarrow υ_{τελ.} = \frac{J_{τελ.}}{m}$$

και με αντικατάσταση $υ_{τελ.} = 80 m/sec$

δ) $\vec{J}_{αρχ.} + \vec{F\Delta t} = \vec{J}_{τελ.}$

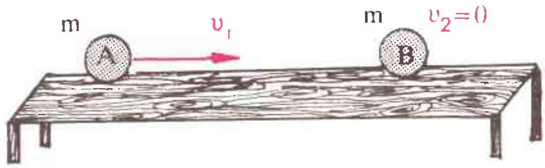


ε) Η ζητούμενη ώθηση είναι ίση με το σκιασμένο εμβαδόν, δηλαδή:

$\Omega = E = Ft = 10 \cdot 5 Ns$ $Q = 50 Ns$

2.4. Η διατήρηση της ορμής

Ας θεωρήσουμε δυο όμοιες ελαστικές σφαίρες Α και Β πάνω σ' ένα λείο οριζόντιο επίπεδο. Από τις δυο σφαίρες η Β είναι ακίνητη, ενώ η Α κινείται πρός τη Β με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, σχ. 2.9.



Σχ. 2.9.

Θα μελετήσουμε τις κινήσεις των σφαιρών τόσο πριν, όσο και μετά τη σύγκρουσή τους χρησιμοποιώντας κατάλληλη πειραματική μέθοδο που βασίζεται στη φωτογράφιση. Ο χώρος που κινούνται οι σφαίρες πριν και μετά τη σύγκρουση φωτίζεται ισχυρά από προβολείς που αναβοσβήνουν περιοδικά. Οι αναλαμπές διαρκούν παρά πολύ λίγο και επαναλαμβάνονται κατά χρονικά διαστήματα ίσα π.χ. με 1/48 του δευτερολέπτου, με αποτέλεσμα να απεικονίζονται στο φωτογραφικό φίλμ οι διαδοχικές θέσεις των σφαιρών. Οι φωτογραφίες που παίρνουμε με τη μέθοδο αυτή φαίνονται στην εικόνα (2.10). Από τη μελέτη των φωτογραφιών αυτών βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα. Αμέσως μετά τη σύγκρουση η σφαίρα Α ηρεμεί, ενώ η Β αρχίζει να κινείται στην ίδια διεύθυνση που αρχικά κινιόταν η Α.

Από τη σύγκριση των φωτογραφιών 3 και 5, 2 και 6, 1 και 7 και με τη βοήθεια του βαθμολογημένου κανόνα, βρίσκουμε ότι τα διαστήματα που διανύονται τόσο από τη σφαίρα Α πριν τη σύγκρουση, όσο και από τη σφαίρα Β μετά τη σύγκρουση, σε ίσους χρόνους είναι ίσα. Έτσι, αν $\vec{\upsilon}_2'$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας Β μετά τη σύγκρουση, θα ισχύει $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2'$.

Αν λοιπόν εξετάσουμε τις ορμές των δυο σφαιρών πριν και μετά τη σύγκρουση, έχουμε:

$$\text{Πριν τη σύγκρουση: } \vec{J}_{1(\alpha\rho\chi)} = m\vec{\upsilon}_1$$

$$\text{και } \vec{J}_{2(\alpha\rho\chi)} = 0$$

1 0−3t

2 0−2t

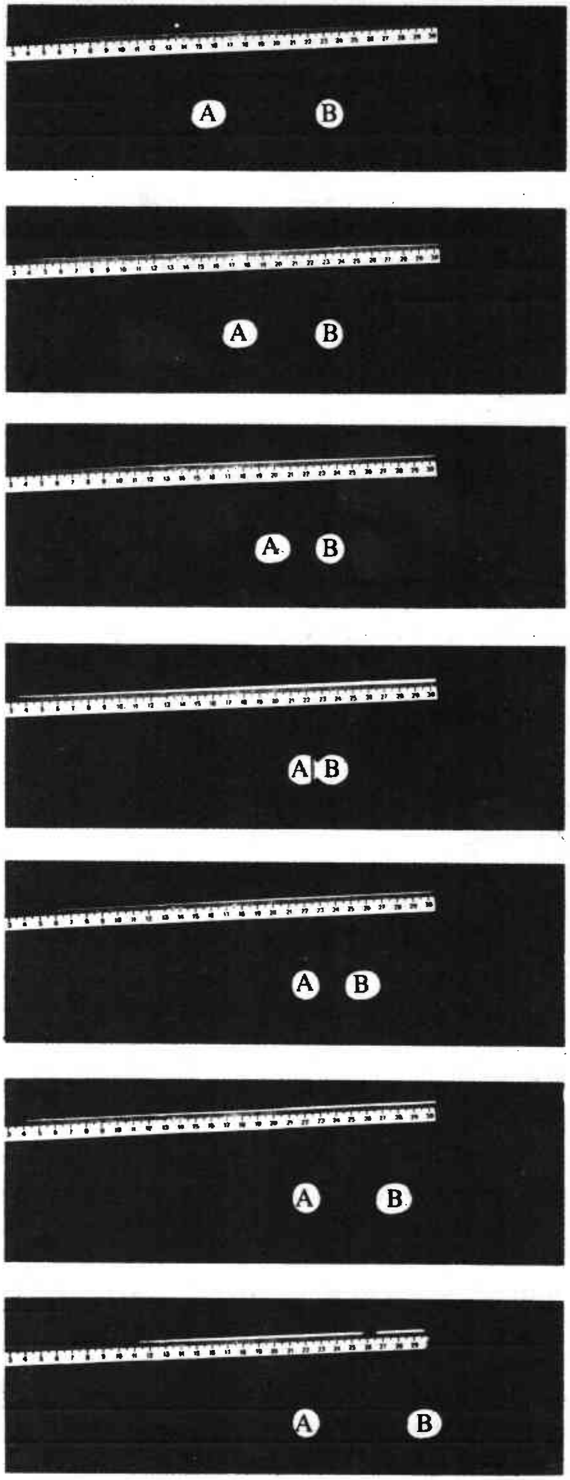
3 0−t

4 0

5 0+t

6 0+2t

7 0+3t



Σχ. 2.10. Στη φωτογραφία 4 φαίνεται η σύγκρουση των σφαιρών. Στις άλλες φωτογραφίες βλέπουμε τις θέσεις τους σε χρονικές στιγμές που απέχουν μεταξύ τους $t = \frac{1}{48}$ sec.

$$\text{Μετά τη σύγκρουση: } \vec{J}_{1(\text{τελ.})} = 0$$

$$\text{και } \vec{J}_{2(\text{τελ.})} = m\vec{\upsilon}_2'$$

Επειδή η ολική ορμή $\vec{J}_{\text{ολ.}}$ ενός συστήματος δυο ή περισσότερων σωμάτων ορίζεται ως διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα, δηλαδή:

$$\vec{J}_{\text{ολ.}} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \ldots,$$

μπορούμε να γράψουμε για την ολική ορμή του συστήματος των δυο σφαιρών πριν και μετά τη σύγκρουση:

$$\vec{J}_{\text{ολ.(αρχ)}} = \vec{J}_{1(\text{αρχ.})} + \vec{J}_{2(\text{αρχ.})} = m\vec{\upsilon}_1 + 0$$

$$\text{ή} \quad \vec{J}_{\text{ολ.(αρχ.)}} = m\vec{\upsilon}_1$$

$$\vec{J}_{\text{ολ.(τελ.)}} = \vec{J}_{1(\text{τελ.})} + \vec{J}_{2(\text{τελ.})} = 0 + m\vec{\upsilon}_2'$$

$$\text{ή} \quad \vec{J}_{\text{ολ.(τελ.)}} = m\vec{\upsilon}_2'$$

Αλλά από τη μελέτη των φωτογραφιών καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2'$, δηλαδή $m\vec{\upsilon}_1 = m\vec{\upsilon}_2'$ και έτσι

$$\boxed{\vec{J}_{\text{ολ.(αρχ.)}} = \vec{J}_{\text{ολ.(τελ.)}}} \qquad (2.8)$$

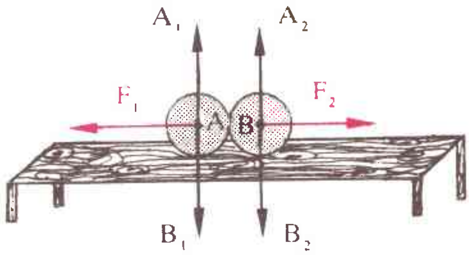
Διαπιστώσαμε λοιπόν πειραματικά ότι η ολική ορμή του συστήματος των δυο σφαιρών πριν και μετά τη σύγκρουσή τους παραμένει η ίδια. Η πειραματική αυτή διαπίστωση δικαιολογείται θεωρητικά ως εξής:

1996 ↓ Σε κάθε μια από τις δυο σφαίρες του συστήματος ασκείται το βάρος της και η αντίδραση από το οριζόντιο επίπεδο. Τέτοιες δυνάμεις, που ασκούνται από σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα ονομάζονται **εξωτερικές δυνάμεις.**

Κάθε σύστημα στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή, αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν, ονομάζεται μονωμένο.

Όταν οι σφαίρες έρθουν σε επαφή, αναπτύσσονται δυο νέες δυνάμεις που έχουν κάθε στιγμή σχέση δράσης - αντίδρασης.

Πχ. αν κάποια στιγμή η σφαίρα Α ασκεί στη Β δύναμη $\vec{F}_2$, ταυτόχρονα δέχεται από τη Β δύναμη $\vec{F}_1$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, σχ. 2.11.



Σχ. 2.11. Επειδή οι τριβές είναι αμελητέες, για κάθε σφαίρα είναι $\vec{B}_1+\vec{A}_1=\vec{B}_2+\vec{A}_2=0$

Τέτοιες δυνάμεις, που ασκούνται από σώματα που ανήκουν στο ίδιο το σύστημα, λέγονται **εσωτερικές δυνάμεις.**

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις $\vec{A}_1 + \vec{B}_1 = 0$ και $\vec{A}_2 + \vec{B}_2 = 0$, αν γράψουμε το θεώρημα ώθησης - ορμής για κάθε σφαίρα χωριστά και για το χρονικό διάστημα που οι σφαίρες βρίσκονται σε επαφή, παίρνουμε:

$$\vec{J}_{1(\alpha\varrho\chi.)} + \vec{\Omega}_1 = \vec{J}_{1(\tau\varepsilon\lambda.)} \qquad (2.9)$$

και

$$\vec{J}_{2(\alpha\varrho\chi.)} + \vec{\Omega}_2 = \vec{J}_{2(\tau\varepsilon\lambda.)}, \qquad (2.10)$$

όπου $\vec{\Omega}_1$ και $\vec{\Omega}_2$ οι ωθήσεις των δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά την επαφή των σφαιρών. Δεδομένου ότι οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες προκαλούν και αντίθετες ωθήσεις, δηλαδή

$$\vec{\Omega}_1 = -\vec{\Omega}_2$$

Αν αθροίσουμε κατά μέλη τις (2.9) και 2.10), προκύπτει:

$$\vec{J}_{1(\alpha\varrho\chi.)} + \vec{J}_{2(\alpha\varrho\chi.)} = \vec{J}_{1(\tau\varepsilon\lambda.)} + \vec{J}_{2(\tau\varepsilon\lambda.)}$$

ή

$$\boxed{\vec{J}_{o\lambda.(\alpha\varrho\chi.)} = \vec{J}_{o\lambda.(\tau\varepsilon\lambda.)}} \qquad (2.11)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι εσωτερικές δυνάμεις δεν προκαλούν καμιά μεταβολή στην ορμή του συστήματος, κάτι που άλλωστε το περιμέναμε, αφού αυτές έχουν για το σύστημα των δυο σφαιρών συνισταμένη μηδέν.

Οι εξισώσεις (2.8) ή (2.11), στις οποίες καταλήξαμε από την πειραματική και τη θεωρητική μελέτη της σύγκρουσης των δυο σφαιρών, ισχύουν για κάθε μονωμένο σύστημα οσωνδήποτε σωμάτων και εκφράζουν μιαν αρχή γνωστή ως αρχή διατήρησης της ορμής, που διατυπώνεται έτσι:

«Η ολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται πάντα σταθερή».

Η διατήρηση της ορμής είναι μια από τις σπουδαιότερες αρχές διατήρησης

στη φυσική, γιατί βρίσκει πολλές εφαρμογές, ανεξάρτητα από το μέγεθος των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα και τη φύση των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ τους. Έτσι π.χ. ενώ η μηχανική ενέργεια διατηρείται μόνον, όταν οι δυνάμεις του συστήματος είναι συντηρητικές, η ορμή διατηρείται ακόμη και στην περίπτωση μη συντηρητικών δυνάμεων.

Η γενικότητά της οφείλεται στο γεγονός ότι οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη. Έτσι, αν ένα σύστημα είναι μονωμένο, θα ισχύει πάντα η διατήρηση της ορμής του, είτε τα σώματα που το αποτελούν συγκρούονται είτε όχι.

2.5. Προωστικές δυνάμεις

Η κίνηση των αεριωθουμένων αεροπλάνων αλλά και των πυραύλων προκαλείται από δυνάμεις που λέγονται προωστικές καί δημιουργούνται με την εκτόξευση προς τα πίσω καυσαερίων με πολύ μεγάλη ταχύτητα. Στην περίπτωση των αεροπλάνων το οξυγόνο το απαραίτητο για την καύση του εύφλεκτου υλικού και τη δημιουργία των καυσαερίων προέρχεται από τον ατμοσφαιρικό αέρα. Το γεγονός αυτό περιορίζει την πτήση των αεριωθουμένων αεροπλάνων μόνο σε μικρά ύψη, όπου υπάρχει άφθονο οξυγόνο.

Η επιθυμία όμως του ανθρώπου να φτάσει σε μεγαλύτερα ύψη, π.χ. να μεταφέρει και να θέσει σε τροχιά γύρω από τη γη τους μετεωρολογικούς και τους τηλεπικοινωνιακούς δορυφόρους, οδήγησε στους πυραύλους. Στην περίπτωση αυτή το οξυγόνο για την καύση μεταφέρεται μέσα στους ίδιους τους πυραύλους.

Για να κατανοήσουμε τη δημιουργία των προωστικών δυνάμεων, ας περιγράψουμε το εξής πείραμα: Πάνω σ' ένα ακίνητο ελαφρό αμάξι, που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, βρίσκεται ένας άνθρωπος καί ένας σωρός από μεταλλικές σφαίρες μάζας m_σ η κάθε μία, σχ. 2.12. Αν ο άνθρωπος εκσφενδονίσει προς τα πίσω μια σφαίρα με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$,* το αμάξι θα κινηθεί προς τα εμπρός, ώστε το υπόλοιπο σύστημα (αμάξι, άνθρωπος, σφαίρες) να αποκτήσει ορμή αντίθετη με την ορμή της σφαίρας. Δηλαδή η ορμή του υπόλοιπου συστήματος με την εκτόξευση της πρώτης σφαίρας μεταβάλλεται κατά $\Delta\vec{J} = -m_\sigma\vec{\upsilon}_\sigma$, όπου $m_\sigma\vec{\upsilon}_\sigma$ είναι η ορμή της σφαίρας που εκτοξεύτηκε. Με την εκτόξευση δεύτερης σφαίρας η αύξηση της ορμής γίνεται $-2m_\sigma\vec{\upsilon}_\sigma$ κ.ο.κ.



Σχ. 2.12.

Έτσι αν σε χρόνο Δt ο άνθρωπος ρίξει n σφαίρες με την ίδια πάντα ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$, η ορμή του υπόλοιπου συστήματος θα αυξηθεί τελικά κατά

$$\Delta\vec{J}_{\text{ολ.}} = -nm_\sigma\vec{\upsilon}_\sigma$$

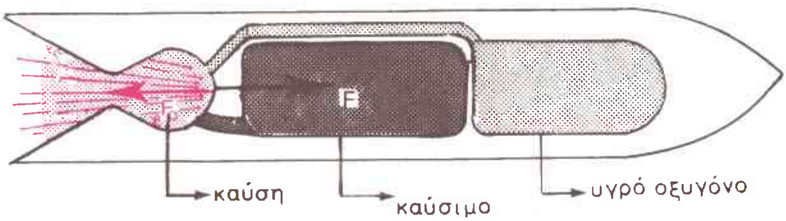
* Αν το πρόβλημα αντιμετωπιστεί αυστηρά, τότε αντί της υ_σ θα πρέπει να θεωρήσουμε την ταχύτητα των σφαιρών ως προς το αμάξι, που είναι $\upsilon_\sigma - V$, όπου υ_σ και V είναι αντίστοιχα οι ταχύτητες των σφαιρών και του αμαξιού ως προς ακίνητο παρατηρητή. Όμως θεωρώντας την ταχύτητα V μικρή, με ικανοποιητική προσέγγιση, αντί $\upsilon_\sigma - V$, γράφουμε απλά υ_σ.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής με τη γενικότερη διατύπωσή του, βρίσκουμε την προωστική δύναμη $\vec{F}$, που προκαλεί την κίνηση του υπόλοιπου συστήματος αυξάνοντας την ορμή του κατά $\Delta\vec{J}_{ολ.}$ Έτσι

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{J}_{ολ.}}{\Delta t}$$

$$\text{ή} \qquad F = -\frac{n m_\sigma}{\Delta t} \upsilon_\sigma \qquad (2.12)$$

Στην περίπτωση των αεριωθουμένων αεροπλάνων και των πυραύλων τα καυσαέρια ωθούνται προς τα πίσω με δύναμη $\vec{F}_\alpha$ που ασκείται σ' αυτά από τα τοιχώματα του χώρου καύσης, σχ. 2.13.

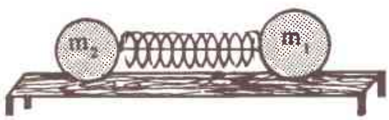


Σχ. 2.13. Αρχή λειτουργίας πυραύλου

Σύμφωνα με την αρχή δράση - αντίδραση και τα καυσαέρια ωθούν το αεροπλάνο ή τον πύραυλο προς τα εμπρός με προωστική δύναμη $\vec{F}$ αντίθετη της $\vec{F}_\alpha$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13.

2.6. Διατήρηση της ορμής και της ενέργειας σε μηχανικό σύστημα

Ας θεωρήσουμε δύο σώματα m_1 και m_2 ($m_1 > m_2$), μεταξύ των οποίων υπάρχει συσπειρωμένο ελατήριο αμελητέας μάζας σ' επαφή μαζί τους. Ένα τεντωμένο σκοινί, δεμένο στα δύο σώματα δεν επιτρέπει στο ελατήριο να τα απωθήσει, σχ. 2.15.



Σχ. 2.15.

Αν κόψουμε το σκοινί, το ελατήριο τεντώνεται ασκώντας στα δυο σώματα δυνάμεις, μέχρι να αποκτήσει το φυσικό του μήκος, οπότε αποδεσμεύεται από αυτά. Οι δυνάμεις αυτές, για όσο χρόνο υπάρχουν, είναι συνεχώς μεταξύ τους αντίθετες και επιταχύνουν τα σώματα, τα οποία, όταν πάψει η επαφή τους με το ελατήριο, έστω ότι έχουν αντίστοιχα ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$, σχ. 2.16.



Σχ. 2.16

Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση των σωμάτων γίνεται χωρίς τριβές, το σύστημα θα είναι μονωμένο και έτσι η ορμή του θα παραμένει σταθερή. Πριν κόψουμε το σκοινί, η ορμή του συστήματος σώματα - ελατήριο είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\vec{J}_{ολ.(αρχ.)} = 0$$

Μετά την αποδέσμευση του ελατηρίου τα σώματα έχουν αντίστοιχα ορμή

$$\vec{J}_{1(τελ.)} = m_1\vec{\upsilon}_1$$

και $$\vec{J}_{2(τελ.)} = m_2\vec{\upsilon}_2$$

Έτσι η ορμή του συστήματος είναι

$$\vec{J}_{ολ.(τελ.)} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + 0,$$

όπου μηδέν είναι η ορμή του ελατηρίου, αφού η μάζα του θεωρήθηκε αμελητέα.

Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα έχουμε:

$$\vec{J}_{ολ.(αρχ.)} = \vec{J}_{ολ.(τελ.)} \Rightarrow 0 = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$$

Αν θεωρήσουμε την προς τα δεξιά φορά θετική, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$0 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \quad ,$$

από την οποία παίρνουμε τελικά:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (2.14)$$

Κατά τη συσπείρωση του ελατηρίου, σχ. 2.15, μεταφέρθηκε σ' αυτό ενέργεια από το αίτιο που την προκάλεσε, η οποία αποθηκεύτηκε στο ελατήριο με μορφή δυναμικής ενέργειας E_Δ. Η ενέργεια αυτή, επειδή δεν υπάρχουν τριβές, μετατρέπεται τελικά σε κινητική ενέργεια των δυο σωμάτων.
Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$E_\Delta = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \qquad (2.15)$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών που αποκτούν τελικά τα δυο σώματα είναι:

$$\frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2},$$

που από τη σχέση (2.14) γράφεται:

$$\frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (2.16)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι αντίστροφα ανάλογος προς το λόγο των μαζών.

Έτσι, ενώ οι τελικές ορμές είναι ίσες κατά μέτρο, οι κινητικές ενέργειες είναι αντίστροφα ανάλογες προς τις μάζες των δυο σωμάτων. Δηλαδή στο μικρότερο σώμα μεταφέρεται το μεγαλύτερο μέρος της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Παράδειγμα

Αν υποθέσουμε ότι οι μάζες m_1 και m_2 στο σχήμα 2.15 είναι 2kgr και 3kgr αντίστοιχα και ότι στο συσπειρωμένο ελατήριο έχει αποθηκευτεί ενέργεια 28Joule, να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της κάθε σφαίρας μετά την αποδέσμευση.

Λύση

Από τη σχέση (2.16) προκύπτει:

$$\frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\frac{E_{K(1)}}{E_{K(2)}} = \frac{3}{2} \qquad (\alpha)$$

Εξάλλου από τη σχέση (2.15) παίρνουμε:

$$E_{K(1)} + E_{K(2)} = E_{\Delta} = 28\text{Joule} \qquad (\beta)$$

Οι (α) και (β) αποτελούν σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους, από τη λύση του οποίου προκύπτει:

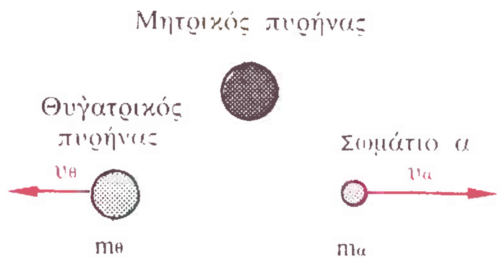
$$E_{K(1)} = 16{,}8\text{Joule}$$

$$E_{K(2)} = 11{,}2\text{Joule}$$

2.7. Διάσπαση ραδιενεργών πυρήνων

Μια ανάλογη περίπτωση με το μηχανικό σύστημα που μελετήσαμε παρουσιάζεται στην πυρηνική φυσική κατά τη διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων και την εκπομπή σωματιδίων α. = πυρήνες He.

Τα σωματίδια α είναι άτομα ηλίου (He), που έχουν χάσει και τα δυο τους ηλεκτρόνια. Κατά την εκπομπή σωματιδίου α από ένα ραδιενεργό πυρήνα, τον οποίο ονομάζουμε μητρικό, προκύπτει καινούργιος πυρήνας, που τον λέμε θυγατρικό, με ταυτόχρονη απελευθέρωση ενέργειας. Παρόλο που οι διαδικασίες που γίνονται κατά τη διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων δεν είναι πλήρως γνωστές μέχρι σήμερα, έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει και στην περίπτωση της διάσπασης.



Σχ. 2.17 Ο θυγατρικός πυρήνας και το σωμάτιο α κινούνται έτσι ώστε οι ορμές τους να είναι αντίθετες.

Έτσι, αν m_θ και $\vec{\upsilon}_\theta$ είναι η μάζα και η ταχύτητα του θυγατρικού πυρήνα και m_α και $\vec{\upsilon}_\alpha$ η μάζα και η ταχύτητα, του σωματιδίου α, σχ. 2.17, εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής όπως και στην περίπτωση του ελατηρίου και των δυο σωμάτων, παίρνουμε:

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\theta} = \frac{m_\theta}{m_\alpha} \Rightarrow \upsilon_\theta = \frac{m_\alpha}{m_\theta}\upsilon_\alpha \qquad (2.17)$$

όπου η ταχύτητα υ_θ ονομάζεται ταχύτητα ανάκρουσης του θυγατρικού πυρήνα.
Επίσης για το λόγο των κινητικών ενεργειών θα έχουμε:

$$\frac{E_{K(\alpha)}}{E_{K(\theta)}} = \frac{m_\theta}{m_\alpha} \qquad (2.18)$$

Η εκπομπή του σωματιδίου α, όπως είπαμε, συνοδεύεται με απελευθέρωση ενέργειας Ε, η οποία μεταφέρεται από το μητρικό πυρήνα στο θυγατρικό και στο σωματίδιο α μεταβάλοντας την κινητική τους ενέργεια.

Η ενέργεια αυτή, όπως και στην περίπτωση του ελατηρίου, είναι:

$$E = E_{K(\theta)} + E_{K(\alpha)} = \frac{1}{2}m_\theta\upsilon_\theta^2 + \frac{1}{2}m_\alpha\upsilon_\alpha^2 \qquad (2.19)$$

Την ενέργεια αυτή μπορούμε να την υπολογίσουμε από τις εξισώσεις (2.17), (2.18) και (2.19), αν μετρήσουμε πειραματικά την ταχύτητα υ_α με την οποία εκπέμπεται το σωματίδιο α και γνωρίζουμε τις μάζες m_θ και m_α.

Παράδειγμα

Ένας ακίνητος πυρήνας ^{238}U διασπάται εκπέμποντας σωμάτιο α με ταχύτητα $\upsilon_\alpha = 1{,}4 \cdot 10^7$ m/sec. Αν οι μάζες του θυγατρικού πυρήνα και του σωμάτιου α είναι αντίστοιχα $m_\theta = 390{,}78 \cdot 10^{-27}$ kgr και $m_\alpha = 6{,}68 \cdot 10^{-27}$ kgr, να υπολογιστούν:

1) η ταχύτητα ανάκρουσης του θυγατρικού πυρήνα,
2) η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη διάσπαση.

Λύση

Από τη σχέση (2.17) έχουμε:

$$\upsilon_\theta = \frac{m_\alpha}{m_\theta}\upsilon_\alpha = \frac{6{,}68 \cdot 10^{-27}}{390{,}78 \cdot 10^{-27}} 1{,}4 \cdot 10^7 \text{m/sec} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\theta = 2{,}38 \cdot 10^5 \text{m/sec}.$$

Η κινητική ενέργεια του σωμάτιου α είναι:

$$E_{K(\alpha)} = \frac{1}{2} m_\alpha \upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2} 6{,}68 \cdot 10^{-27} (1{,}4 \cdot 10^7)^2 \text{Joule} \Rightarrow$$

$$E_{K(\alpha)} = 6{,}54 \cdot 10^{-13} \text{Joule}.$$

Από τη σχέση (2.18) υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του θυγατρικού πυρήνα.

$$E_{K(\theta)} = \frac{m_\alpha}{m_\theta} E_{K(\alpha)}$$

ή $$E_{K(\theta)} = \frac{6{,}68 \cdot 10^{-27}}{390{,}78 \cdot 10^{-27}} 6{,}54 \cdot 10^{-13} \text{Joule}$$

ή $$E_{K(\theta)} \simeq 1{,}11 \cdot 10^{-14} \text{Joule}$$

Η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη διάσπαση του πυρήνα είναι τελικά:

$$E = E_{K(\alpha)} + E_{K(\theta)} = (6{,}54 \cdot 10^{-13} + 1{,}11 \cdot 10^{-14}) \text{Joule} \Rightarrow$$

$$E = 66{,}51 \cdot 10^{-14} \text{Joule}$$

Κρούση

2.8. Γενικά περί κρούσης

Η αρχή διατήρησης της ορμής βρίσκει εφαρμογή και στη μελέτη της κρούσης δυο σωμάτων. Η κρούση παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον κυρίως στην ατομική και την πυρηνική φυσική, όπου μελετώντας τα αποτελέσματα της κρούσης πυρήνων με ταχέως κινούμενα σωματίδια είναι δυνατό να πάρουμε πληροφορίες και να βγάλουμε συμπεράσματα για τη δομή και το είδος των πυρήνων. Π.χ., η μελέτη της κρούσης ταχέως κινούμενων σωματιδίων α με λεπτά φύλλα Βηρυλλίου οδήγησε στο συμπέρασμα ότι στον πυρήνα των στοιχείων υπάρχει ένα αφόρτιστο σωματίδιο που έχει μάζα ίση με τη μάζα του πρωτονίου και ονομάστηκε νετρόνιο. Τέλος, όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο, από τη μελέτη της κρούσης των μορίων ενός αερίου με τα τοιχώματα του δοχείου στο οποίο περιέχεται, μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεσή του.

Στη μηχανική με τον όρο κρούση εννοούμε τη σύγκρουση δυο σωμάτων, που διαρκεί ελάχιστο χρόνο και συνοδεύεται με την εμφάνιση μεγάλων δυνάμεων μεταξύ των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Στην ατομική και πυρηνική φυσική η έννοια της κρούσης επεκτείνεται, ώστε να περιλάβει και άλλα φαινόμενα. Π.χ., όταν ένα σωματίδιο α κινείται προς έναν πυρήνα, η δύναμη που ασκείται μεταξύ τους είναι η απωστική ηλεκτρική δύναμη, που οφείλεται στα θετικά τους φορτία. Το σωματίδιο και ο πυρήνας μπορεί να μην έρθουν σε επαφή, αλλά επειδή η μεταξύ τους δύναμη είναι πολύ μεγάλη και διαρκεί για πολύ λίγο χρόνο, όπως και κατά τη σύγκρουση δυο υλικών σωμάτων, εξακολουθούμε να μιλάμε για κρούση.

Σε κάθε κρούση μεταξύ δυο σωμάτων, ισχύει πάντα η αρχή διατήρησης της ορμής, διότι και στην περίπτωση που υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις αυτές είναι αμελητέες συγκρινόμενες με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης. Έτσι, αν $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ και $\vec{J}_1'$, $\vec{J}_2'$ **είναι οι ορμές των συγκρουόμενων σωμάτων πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα, ισχύει:**

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1' + \vec{J}_2'$$

Σε αντίθεση με την ορμή η ολική κινητική ενέργεια των συγκρουόμενων σωμάτων δε διατηρείται πάντα. Αυτό ακριβώς αποτελεί και το κριτήριο με το οποίο ταξινομούμε τις κρούσεις. Έτσι, αν

$$E_{K(1)} + E_{K(2)} = E'_{K(1)} + E'_{K(2)},$$

δηλαδή αν η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων πριν από την κρούση είναι ίση με την ολική κινητική τους ενέργεια μετά την κρούση, λέμε ότι η κρούση είναι **ελαστική.** Κάθε άλλη κρούση λέγεται **ανελαστική** και ισχύει:

$$E_{K(1)} + E_{K(2)} > E'_{K(1)} + E'_{K(2)}*$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ελαστική κρούση και από την ανελαστική μόνο εκείνη κατά την οποία τα σώματα μετά την κρούση παραμένουν ενωμένα σ' ένα συσσωμάτωμα και την οποία θα ονομάζουμε **τελείως ανελαστική** ή **πλαστική κρούση.**

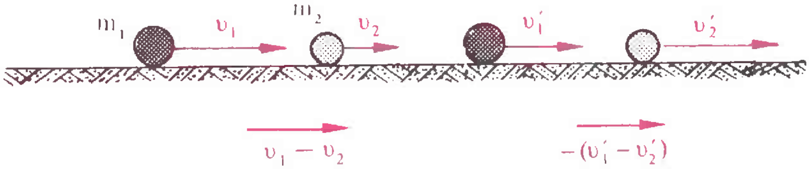
Κατά τη μελέτη της ελαστικής κρούσης περιοριζόμαστε μόνο σε μετωπικές συγκρούσεις, δηλαδή θεωρούμε τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση πάνω στην ίδια ευθεία.

---

* Είναι δυνατό σε μια ανελαστική κρούση να έχουμε αύξηση της ολικής κινητικής ενέργειας μετά την κρούση. Τέτοιες περιπτώσεις εμφανίζονται στην πυρηνική φυσική.

2.9. Ελαστική μετωπική κρούση

Ας θεωρήσουμε δυο λείες ελαστικές σφαίρες που έχουν μάζες m_1 και m_2. Οι σφαίρες κινούνται, χωρίς να περιστρέφονται, με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$, συγκρούονται μετωπικά και συνεχίζουν να κινούνται πάνω στην ίδια γραμμή με ταχύτητες $\vec{\upsilon}'_1$ και $\vec{\upsilon}'_2$ αντίστοιχα, σχ. 2.18.



Σχ. 2.18. Μετωπική ελαστική κρούση

Στη μελέτη που ακολουθεί επιδιώκουμε να υπολογίσουμε τις τελικές ταχύτητες υ'_1 και υ'_2 με τη βοήθεια των αρχών διατήρησης της ορμής και της κινητικής ενέργειας, παρόλο που οι δυνάμεις που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της κρούσης μας είναι άγνωστες.

Η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δυο σφαιρών γράφεται:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon'_1+m_2\upsilon'_2 \qquad (2.20)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, διατηρείται η κινητική ενέργεια, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2{}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \qquad (2.21)$$

Από τις εξισώσεις (2.20) και (2.21), αν γνωρίζουμε τις μάζες και τις αρχικές ταχύτητες των σφαιρών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες υ_1' και υ_2'.

Οι εξισώσεις (2.20) και (2.21) γράφονται αντίστοιχα:

$$m_1(\upsilon_1-\upsilon'_1)=m_2(\upsilon'_2-\upsilon_2) \qquad (2.22)$$

και $$m_1(\upsilon_1{}^2-\upsilon_1'^2)=m_2(\upsilon_2'^2-\upsilon_2{}^2) \qquad (2.23)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\upsilon_1\neq\upsilon'_1$ και $\upsilon_2\neq\upsilon'_2$ και διαιρέσουμε τις εξισώσεις (2.23) και (2.22) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\upsilon_1+\upsilon'_1=\upsilon'_2+\upsilon_2$$

ή $$\upsilon_1-\upsilon_2=-(\upsilon'_1-\upsilon'_2) \qquad (2.24)$$

Από την εξίσωση (2.24) συμπεραίνουμε ότι στη μετωπική ελαστική κρούση οι διαφορές ταχυτήτων των δύο σφαιρών πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες.

Ας μελετήσουμε τώρα δυο περιπτώσεις που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον.

A) Τα συγκρουόμενα σώματα έχουν ίσες μάζες.

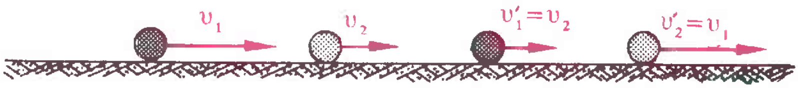
Αν στην εξίσωση (2.20) βάλουμε $m_1=m_2$ παίρνουμε

$$\upsilon_1+\upsilon_2=\upsilon_1'+\upsilon_2', \qquad (2.25)$$

η οποία με τη βοήθεια της (2.24) δίνει

$$\boxed{\upsilon_1'=\upsilon_2} \text{ και } \boxed{\upsilon_2'=\upsilon_1} \qquad (2.26)$$

Δηλαδή κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δυο σωμάτων που έχουν ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους, σχ. 2.19.



1995

Σχ. 2.19. Μετωπική ελαστική κρούση δυο σωμάτων ίσης μάζας

B) Μια άλλη περίπτωση είναι εκείνη, στην οποία το σώμα μάζας m_2 είναι ακίνητο, δηλαδή έχουμε $\upsilon_2=0$. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις (2.20) και 2.24) παίρνουν αντίστοιχα τις μορφές:

$$m_1\upsilon_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2' \qquad (2.27)$$

$$\text{και} \quad \upsilon_1=-(\upsilon_1'-\upsilon_2') \qquad (2.28)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.27) και (2.28) ως προς υ_1' και υ_2' έχουμε:

$$\boxed{\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1} \qquad (2.29)$$

και

$$\boxed{\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1} \qquad (2.30)$$

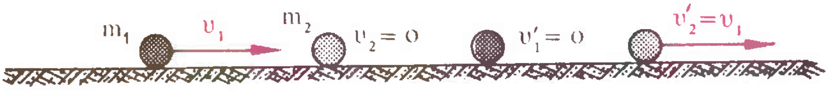
Αυτές οι δυο εξισώσεις έχουν μερικές ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

B_1) Ας υποθέσουμε ότι $m_1 = m_2$, σχ. 2.20. Τότε από την (2.29) παίρνουμε

$$\upsilon_1' = 0$$

και από την (2.30)

$$\upsilon_2' = \upsilon_1$$



Σχ. 2.20. Οι μάζες των δυο σωμάτων είναι ίσες

Αυτό σημαίνει ότι κατά τη μετωπική ελαστική κρούση τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους, με αποτέλεσμα το σώμα μάζας m_1 να σταματήσει μεταφέροντας όλη την κινητική του ενέργεια στο σώμα που αρχικά ηρεμούσε.

Η περίπτωση αυτή βρίσκει εφαρμογή στην επιβράδυνση των νετρονίων, που παράγονται από τη διάσπαση του ουρανίου στους πυρηνικούς αντιδραστήρες. Τα παραγόμενα νετρόνια κινούνται πολύ γρήγορα και πρέπει να επιβραδυνθούν, αφ' ενός για να προκαλέσουν νέες διασπάσεις* και επομένως απελευθέρωση ενέργειας, αφ' ετέρου γιατί, αν διαφύγουν, είναι επικίνδυνα για το προσωπικό που εργάζεται στον αντιδραστήρα.

Για το σκοπό αυτό το ουράνιο περιβάλλεται από νερό, με αποτέλεσμα να επιβραδύνονται τα νετρόνια. Αυτό εξηγείται ως εξής: Το νερό περιέχει υδρογόνο, του οποίου ο πυρήνας αποτελείται από ένα μόνο πρωτόνιο.

Έτσι η μετωπική ελαστική σύγκρουση των νετρονίων με τα περίπου ίσης μάζας πρωτόνια του υδρογόνου προκαλεί σχεδόν το σταμάτημα των νετρονίων**.

B_2) Αν το ακίνητο σώμα έχει πολύ μεγάλη μάζα, δηλαδή $m_2 >> m_1$ τότε από την (2.29) παίρνουμε:

$$\boxed{\upsilon_1' \simeq -\upsilon_1}$$

και από την 2.30.

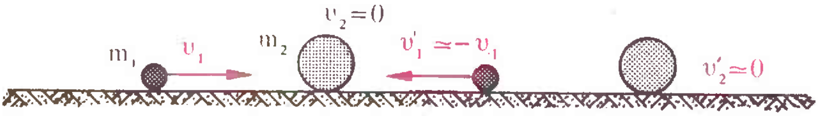
$$\boxed{\upsilon_2' \simeq 0}$$

---

* Όταν τα νετρόνια έχουν μικρή ταχύτητα η πιθανότητα να συγκρουστούν με τους πυρήνες είναι μεγαλύτερη.

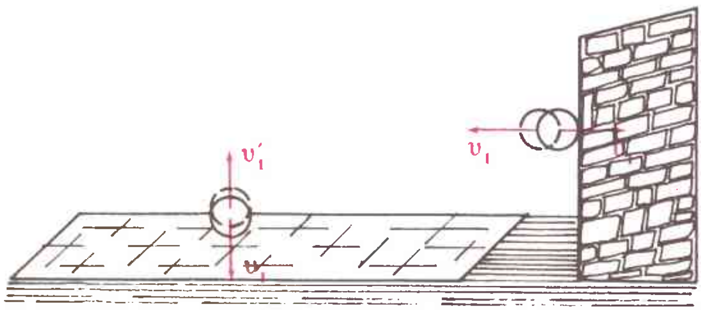
** Τα πρωτόνια παίρνουν όλη την ενέργεια των νετρονίων, αλλά λόγω του φορτίου τους δε μπορούν να διανύσουν μεγάλη απόσταση και να διαφύγουν.

Αυτό σημαίνει ότι, αν ένα ελαφρύ σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας, η ταχύτητα του πρώτου περίπου αντιστρέφεται και το δεύτερο παραμένει περίπου ακίνητο, σχ. 2.21.



Σχ. 2.21.

Έτσι, αν ένα σώμα πέσει κατακόρυφα σ' ένα οριζόντιο δάπεδο ή οριζόντια σ' έναν κατακόρυφο τοίχο και θεωρήσουμε την κρούση ελαστική, το σώμα θα αναπηδήσει με την ίδια ταχύτητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.22.



Σχ. 2.22. Και για τις δυο κρούσεις ισχύει $\upsilon_1 = -\upsilon_1'$

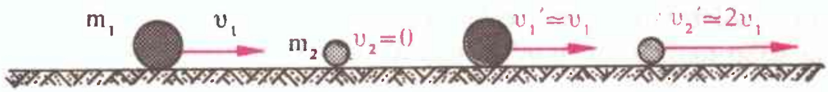
B_3) Αν το ακίνητο σώμα έχει πολύ μικρή μάζα, δηλαδή $m_2 << m_1$, τότε από την (2.29) παίρνουμε:

$$\boxed{\upsilon_1' \simeq \upsilon_1}$$

και από τη (2.30)

$$\boxed{\upsilon_2' \simeq 2\upsilon_1}$$

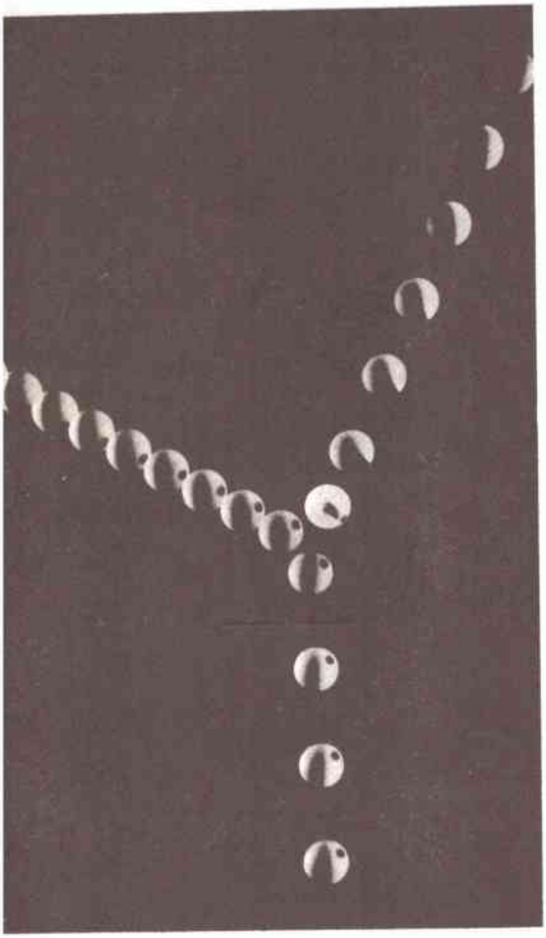
Αυτό σημαίνει ότι, αν ένα βαρύ σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο πολύ μικρής μάζας, η ταχύτητα του πρώτου δε μεταβάλλεται, αλλά το ακίνητο σώμα τινάζεται με διπλάσια περίπου ταχύτητα.



Σχ. 2.23

Αν η ελαστική κρούση μεταξύ δυο σωμάτων δεν είναι μετωπική, τα σώματα μετά τη σύγκρουσή τους κινούνται έτσι, που να σχηματίζουν κάποια γωνία.

Στην εικόνα 2.24 φαίνεται μια μη μετωπική κρούση μεταξύ δυο σφαιρών ίσων μαζών, από τις οποίες η μια ήταν αρχικά ακίνητη. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι μετά τη σύγκρουση κινούνται και οι δυο σφαίρες με διαφορετικές ταχύτητες που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°.



Σχ. 2.24. Η φωτογράφιση έχει γίνει με συχνότητα 30 φωτογραφίες/sec, με τη μηχανή πάνω από τις σφαίρες που βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο.

Η λύση προβλημάτων μη μετωπικής κρούσης απαιτεί πληροφορίες, που είναι δυνατό να προκύψουν μόνο από πειραματικές μετρήσεις.

Έτσι η μη μετωπική κρούση δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης στο βιβλίο αυτό.

Παράδειγμα

Ένα νετρόνιο που κινείται με μεγάλη ταχύτητα συγκρούεται μετωπικά με ένα ακίνητο πυρήνα μολύβδου. Αν η σύγκρουση θεωρηθεί ελαστική και ο λόγος της μάζας m_2 του πυρήνα προς τη μάζα m_1 του νετρονίου είναι:

$$\frac{m_2}{m_1}=206,$$

να βρεθεί κατά ποιο κλάσμα μειώνεται η αρχική κινητική ενέργεια του νετρονίου.

Λύση

Το κλάσμα κατά το οποίο μειώνεται η κινητική ενέργεια του νετρονίου είναι:

$$u=\frac{E_{K(1)}-E'_{K(1)}}{E_{K(1)}}$$

όπου Εκ(1), Ε΄κ(1) η κινητική ενέργεια του νετρονίου πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα. Αν υ_1 και υ_1' η ταχύτητα του νετρονίου πριν και μετά την κρούση, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$u = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2}{\frac{1}{2}\cdot m_1\upsilon_1^2} = 1 - \frac{(\upsilon_1')^2}{\upsilon_1^2}$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα υ_1' από τη σχέση (2.29) παίρνουμε:

$$u = 1 - \frac{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \upsilon_1^2}{\vec{\upsilon}_1^{\,2}}$$

και τελικά

$$u = \frac{4\,\frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2}$$

Θέτοντας $\frac{m_2}{m_1} = 206$

στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$u = \frac{4.206}{(1+206)^2} = 0{,}02$$

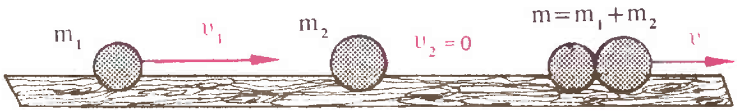
$$\text{ή} \quad u = 2\%$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια του νετρονίου μειώθηκε κατά 2%.

1995

2.10. Πλαστική κρούση

Όπως είπαμε, μια κρούση λέγεται πλαστική, όταν τα συγκρουόμενα σώματα ενώνονται και κινούνται σα μια μάζα. Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση δυο σωμάτων, από τα οποία το ένα έχει μάζα m_2 και είναι ακίνητο, ενώ το άλλο έχει μάζα m_1 και κινείται προς αυτό με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, σχ. 2.25.



Σχ. 2.25

Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά και ενώνονται σ' ένα σώμα μάζας $m=m_1+m_2$, που κινείται στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δυο σωμάτων δίνει την εξίσωση

$$m_1\upsilon_1+0=(m_1+m_2)\upsilon \qquad (2.31)$$

Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι αντίστοιχα:

$$E_{K(\text{ολ.})\text{πριν}}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+0 \qquad (2.32)$$

$$E_{K(\text{ολ.})\text{μετά}}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 \qquad (2.33)$$

Διαιρώντας την εξίσωση (2.33) με τη (2.32) έχουμε

$$\frac{E_{K(\text{ολ.})\text{μετά}}}{E_{K(\text{ολ.})\text{πριν}}}=\frac{m_1+m_2}{m_1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_1}\right)^2,$$

που με τη βοήθεια της (2.31) γίνεται:

$$\frac{E_{K(\text{ολ.})\text{μετά}}}{E_{K(\text{ολ.})\text{πριν}}}=\frac{m_1+m_2}{m_1}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2,$$

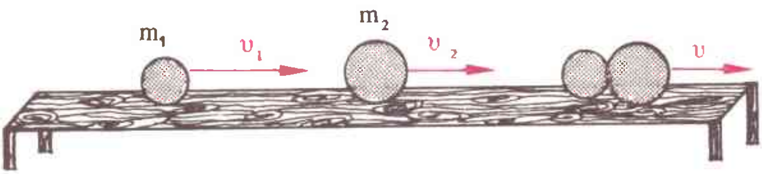
$$\text{ή} \qquad \frac{E_{K(\text{ολ.})\text{μετά}}}{E_{K(\text{ολ.})\text{πριν}}}=\frac{m_1}{m_1+m_2} \qquad (2.34)$$

Από την εξίσωση (2.34) είναι φανερό ότι κατά την πλαστική κρούση δυο σωμάτων η ολική κινητική ενέργεια των σωμάτων μετά την κρούση είναι μικρό-

τερη της ολικής τους κινητικής ενέργειας πριν από την κρούση. Η απώλεια αυτή στην κινητική ενέργεια είναι:

$$\Delta E_K = E_{K(ολ.)πριν} - E_{K(ολ.)μετά} \qquad (2.35)$$

και μετατρέπεται κατά το μεγαλύτερο μέρος της σε θερμότητα.



Σχ. 2.26

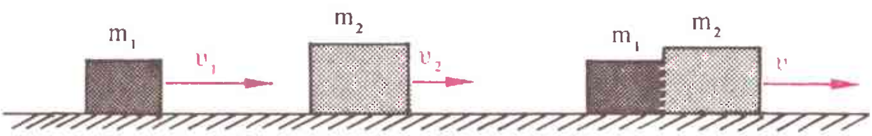
Αν τώρα και το σώμα μάζας m_2 κινείται με μια ταχύτητα, έστω $\vec{υ}_2$, σχ. 2.26, οι εξισώσεις (2.31) και (2.35) παίρνουν αντίστοιχα τη μορφή:

$$m_1υ_1 + m_2υ_2 = (m_1 + m_2)υ \qquad (2.36)$$

$$\text{και} \quad \Delta E_K = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ^2 \qquad (2.37)$$

Παράδειγμα

Δυο σώματα έχουν μάζες m_1=2kgr και m_2 = 6kgr και κινούνται με ταχύτητες $υ_1$ = 10m/sec και $υ_2$ = 4m/sec αντίστοιχα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα σώματα συγκρούονται και στη συνέχεια κινούνται σαν ένα σώμα.

Να υπολογίσετε:

α) Την ολική ορμή πριν και μετά την κρούση.

β) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Λύση

α) Η ολική ορμή των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι:

$$\vec{J}_{ολ.(αρχ.)} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \Rightarrow$$

$$J_{ολ.(αρχ.)} = m_1 υ_1 + m_2 υ_2 = (2 \cdot 10 + 6 \cdot 4) kgrm/sec \Rightarrow$$

$$J_{ολ.(αρχ.)} = 44 kgrm/sec$$

Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε $J_{ολ.(αρχ.)} = J_{ολ.(τελ.)}$,

δηλαδή $J_{ολ.(τελ.)} = 44 kgrm/sec$

β) Η ταχύτητα μετά την κρούση βρίσκεται από τη σχέση:

$$(m_1 + m_2) υ = J_{ολ.(τελ.)} \Rightarrow υ = \frac{J_{(ολ.)τελ.}}{m_1 + m_2}$$

και με αντικατάσταση έχουμε: $υ = \frac{44}{6+2} m/sec$

ή $υ = 5{,}5 m/sec$

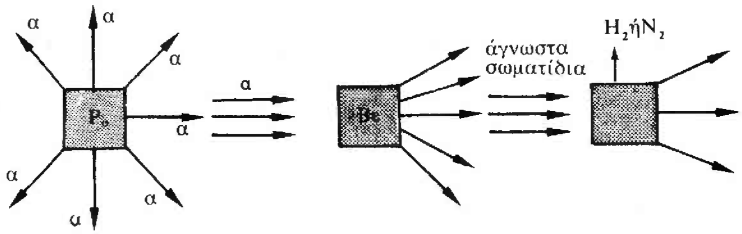
Έτσι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος σύμφωνα με τη σχέση (2.37) είναι:

$$ΔΕκ = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} 6 \cdot 4^2 - \frac{1}{2}(2+6) 5{,}5^2 \Rightarrow$$

$$ΔΕκ = 27 Joule$$

2.11. Η ανακάλυψη του νετρονίου

Αναλύοντας τα αποτελέσματα πειραμάτων κρούσεων ο Chadwick το 1932 κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι στον πυρήνα των ατόμων των στοιχείων υπάρχει εκτός από το πρωτόνιο και ένα άλλο είδος σωματιδίου, που το ονόμασε νετρόνιο. Η μεγάλη επιτυχία του Chadwick δεν ήταν μόνο η ανακάλυψη του άγνωστου μέχρι τότε νετρονίου, αλλά και το γεγονός ότι κατάφερε να προσδιορίσει με μεγάλη ακρίβεια τη μάζα αυτού του σωματιδίου. Η διάταξη που χρησιμοποίησε φαίνεται σχηματικά στην παρακάτω εικόνα.



Ο Chadwick παρατήρησε ότι, όταν το στοιχείο Βηρύλλιο (Be) βοβαρδιστεί από σωμάτια α (πυρήνες He), που εκπέμπονται από το ραδιενεργό Πολώνιο (Po), τότε το Be εκπέμπει καινούργια, άγνωστα μέχρι τότε σωματίδια μεγάλης διεισδυτικής ικανότητας, που είναι δυνατό να συγκρουστούν με ακίνητους πυρήνες υδρογόνου ή αζώτου και να προκαλέσουν την κίνησή τους.

Ας υποθέσουμε ότι ένα τέτοιο άγνωστο σωματίδιο μάζας m_x και ταχύτητας $\vec{\upsilon}_x$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με έναν ακίνητο πυρήνα υδρογόνου, δηλαδή ένα πρωτόνιο, μάζας m_p. Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_p$ του πρωτονίου μετά την κρούση θα είναι σύμφωνα με την εξίσωση (2.30)

$$\upsilon_p = \frac{2m_x}{m_x + m_p}\upsilon_x \qquad (2.38)$$

Στην περίπτωση που το άγνωστο σωματίδιο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο πυρήνα αζώτου μάζας m_N, η ταχύτητα του πυρήνα μετά την κρούση θα είναι:

$$\upsilon_N = \frac{2m_x}{m_x + m_N}\upsilon_x \qquad (2.39)$$

Επειδή η μάζα m_N του πυρήνα του αζώτου είναι $m_N = 14m_p$, η εξίσωση (2.39) γράφεται:

$$\upsilon_N = \frac{2m_x}{m_x + 14m_p}\upsilon_x \qquad (2.40)$$

Διαιρώντας τις εξισώσεις (2.38) και (2.40) κατά μέλη παίρνουμε τελικά:

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_N} = \frac{m_x + 14m_p}{m_x + m_p} \qquad (2.41)$$

Ο Chadwick κατόρθωσε να μετρήσει πειραματικά τις ταχύτητες υ_p και υ_N και να προσδιορίσει έτσι το λόγο τους, τον οποίο βρήκε ίσο με 7,5. Δηλαδή:

$$\frac{\upsilon_p}{\upsilon_N} = 7{,}5 \qquad (2.42)$$

Έτσι η εξίσωση (2.41) με τη βοήθεια της (2.42) γίνεται:

$$7{,}5 = \frac{m_x + 14m_p}{m_x + m_p},$$

από την οποία βρίσκεται η μάζα του αγνωστου σωματιδίου

$$m_x \simeq m_p$$

Χρησιμοποιώντας ο Chadwick άλλους στόχους, αντί του υδρογόνου και του αζώτου, επανέλαβε πολλές φορές τα πειράματα βρίσκοντας κάθε φορά την ίδια περίπου τιμή για τη μάζα m_x. Έτσι κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι η ύπαρξη του νετρονίου είναι ένα γεγονός που δεν επιδέχεται καμιά αμφισβήτηση.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Ένα ελαφρύ και ένα βαρύ σώμα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες. Ποιο έχει τη μεγαλύτερη ορμή;

2. Ένα ηλεκτρόνιο μάζας $9,1\cdot10^{-31}$kgr εισέρχεται σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ταχύτητα $3\cdot10^{3}$m/sec παράλληλη στις δυναμικές γραμμές και εξέρχεται απ' αυτό μετά από χρόνο $2\cdot10^{-7}$sec με ταχύτητα $5\cdot10^{5}$m/sec.

α) Να υπολογιστεί η αρχική και η τελική ορμή του ηλεκτρονίου.
β) Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκήθηκε στο ηλεκτρονιο;
γ) Ποιο είναι το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου;
Δίνεται το φορτίο του ηλεκτρονίυ $q_e = 1,6\cdot10^{-19}$Cb.

(**Απ.** α) $27,3\cdot10^{-28}$kgrm/sec, $45,5\cdot10^{-26}$kgrm/sec β) $22,6\cdot10^{-19}$N γ) 14,1N/Cb)

3. Αυτοκίνητο έχει μάζα m = 1000kgr και κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα $υ_1$ = 72km/h. Ο οδηγός φρενάρει το αυτοκίνητο ασκώντας σ' αυτό σταθερή δύναμη μέσω των φρένων και σε 20sec η ταχύτητα μειώνεται σε $υ_2$ = 36km/h. Να υπολογίσετε:
α) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.
β) Τη μεταβολή της ορμής.
γ) Την ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα.
δ) Το μέτρο της δύναμης που ασκήθηκε στο αυτοκίνητο κατά το φρενάρισμα.
ε) Πόση απόσταση διανύθηκε από το αυτοκίνητο στη διάρκεια των 20sec.

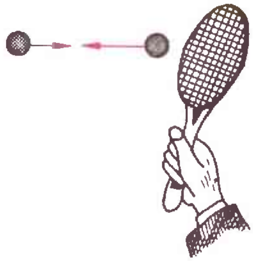
(**Απ.** α) $-1,5\cdot10^{5}$Joule β) -10^{4}kgrm/sec γ) $1,5\cdot10^{5}$Joule δ) 500N ε) 300m)

4. Διαλέξτε τις απαντήσεις σας για τις ερωτήσεις α και β από τον πίνακα που ακολουθεί.

Αντικείμενο		Μάζα (kgr)	Ταχύτητα (m/sec)
Α	ηλεκτρόνιο	10^{-30}	10^{8}
Β	πλοίο	10^{6}	10
Γ	σταγόνα βροχής	10^{-4}	10
Δ	σαλιγγάρι	10^{-2}	10^{-4}
Ε	δορυφόρος	1	10^{3}

α) Ποιο από τα παραπάνω αντικείμενα απαιτεί τη μεγαλύτερη μεταβολή στην ορμή του, για να σταματήσει;
β) Τίνος αντικειμένου η ορμή μπορεί να συγκριθεί (κατά μέτρο) με την ορμή ενός δρομέα ταχύτητας, όταν αυτός έχει αναπτύξει τη μεγαλύτερη ταχύτητά του;
(να γίνει ελεύθερη εκτίμηση για τη μάζα και την ταχύτητα του δρομέα).

5. Μια σφαίρα του τέννις που έχει ταχύτητα 10m/sec πλησιάζει τη ρακέτα, χτυπάει πάνω της και επιστρέφει με ταχύτητα 15m/sec. Αν η σφαίρα έχει μάζα 0,1kgr, ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι λανθασμένη;



α) Η αρχική ορμή της σφαίρας έχει μέτρο $1kgr\,\frac{m}{sec}$

β) Η τελική ορμή της σφαίρας έχει μέτρο 1,5kgr m/sec.

γ) Η ώθηση που δέχεται η σφαίρα από τη ρακέτα έχει μέτρο 0,5N sec.

δ) Η ώθηση που δέχεται η σφαίρα από τη ρακέτα έχει μέτρο 2,5N sec.

ε) Η ρακέτα ασκεί στη σφαίρα δύναμη που έχει φορά προς τα αριστερά.

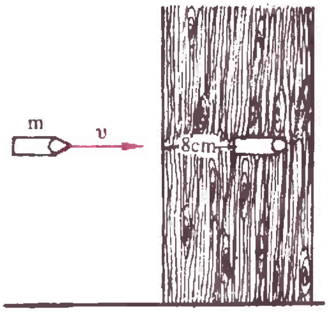
6. Ένα βλήμα έχει μάζα m = 0,05kgr και κινείται με ταχύτητα υ = 400m/sec πριν σφηνωθεί στον κορμό ενός δέντρου. Αν το βλήμα σταμάτησε σε βάθος 8cm να υπολογίσετε:

α) Την αρχική ορμή και κινητική ενέργεια που είχε το βλήμα.

β) Την αντίσταση του ξύλου στην κίνηση του βλήματος, αν θεωρηθεί ότι αυτή είναι σταθερή.

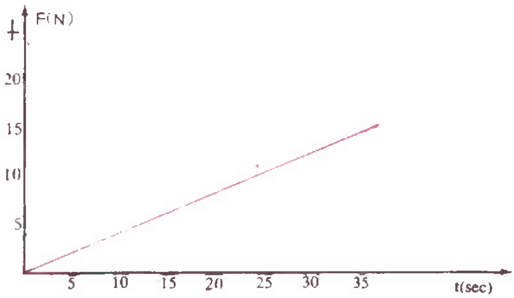
γ) Την ώθηση που ασκήθηκε από την αντίσταση του ξύλου.

δ) Τη χρονική διάρκεια της κίνησης του βλήματος μέσα στον κορμό.



(**Απ.** α) 20kgrm/sec, $4 \cdot 10^3$Joule β) $5 \cdot 10^4$N γ) −20Nsec δ) $4 \cdot 10^{-4}$sec)

7. Ένα σώμα έχει μάζα m = 0,2kgr και κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα υ = 5m/sec. Στο σώμα ασκείται δύναμη που έχει τη διεύθυνση και τη φορά της ταχύτητας και μέτρο που μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



α) Να υπολογίσετε την ώθηση της δύναμης, αν αυτή ασκείται στο σώμα για χρόνο 25sec.

β) Να υπολογίσετε την τελική ορμή του σώματος.

(**Απ.** α) 125Nsec β) 126kgrm/sec)

8. Ένα σώμα έχει μάζα m και ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μια ώθηση Ω_1 ασκείται στο σώμα κατά την οριζόντια διεύθυνση. Κατόπιν ασκείται μία άλλη ώθηση Ω_2, ίσου μέτρου με την πρώτη, που έχει επίσης οριζόντια διεύθυνση και είναι κάθετη στην Ω_1. Ποια από τα ακόλουθα συμπεράσματα είναι σωστά:

α) Το μέτρο της τελικής ορμής του σώματος είναι μικρότερο από Ω_1.

β) Το μέτρο της τελικής ορμής είναι ίσο με $2\Omega_1$.

γ) Η διεύθυνση της τελικής ορμής του σώματος είναι οριζόντια, σχηματίζει γωνίες 45° με τις διευθύνσεις των Ω_1 και Ω_2 και έχει μέτρο μεταξύ Ω_1 και $2\Omega_1$.

9. Σώμα μάζας 1kgr κινείται με σταθερή ταχύτητα 3m/sec. α) Πόση ώθηση πρέπει να ασκηθεί σ' αυτό ώστε να κινείται με ταχύτητα 4m/sec σε διεύθυνση κάθετη προς την αρχική; β) Πόση ενέργεια θα προσφερθεί στο σώμα από τη δύναμη που ασκήθηκε σ' αυτό;

(**Απ.** α) 5Nsec που να σχηματίζει με την $J_{αρχ.}$ γωνία θ, όπου $εφθ = -\frac{4}{3}$ β) 3,5Joule)

10. Σώμα μάζας 2kgr κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ = 5m/sec. Στο σώμα ασκείται δύναμη F = 2,5N που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία 60° με την ταχύτητα, για χρονικό διάστημα 4sec.

Να υπολογίσετε:

α) Την ώθηση της δύναμης.

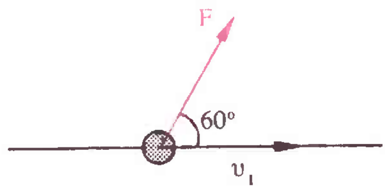
β) Την τελική ορμή του σώματος.

γ) Τη γωνία που σχηματίζει η νέα διεύθυνση κίνησής του με την αρχική.

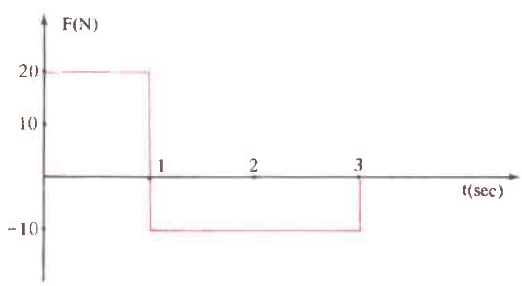
δ) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

ε) Το έργο της δύναμης.

(**Απ.** α) 10Nsec β) $10\sqrt{3}$kgrm/sec γ) 30° δ) 50Joule ε) 50Joule)



11. Σε ένα σώμα που αρχικά ηρεμεί ασκείται δύναμη σταθερής διεύθυνσης η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο όπως δείχνει το σχήμα.

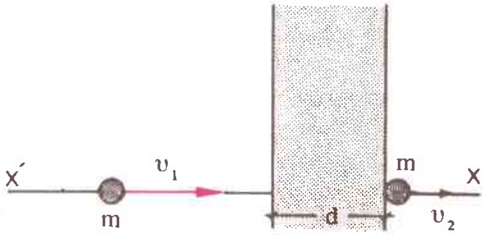


Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και γιατί;

α) Η ολική ώθηση που ασκήθηκε στο σώμα από t = 0 έως t = 3sec είναι μηδέν.

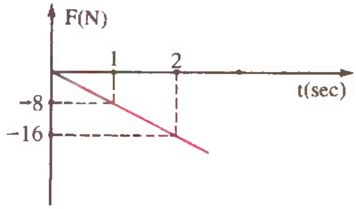
β) Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t = 3sec είναι μηδέν.
γ) Τη στιγμή t = 3sec το σώμα έχει επιστρέψει στην αρχική του θέση.

12. Σώμα έχει μάζα m = 2kgr, σταθερή ταχύτητα υ_1 = 10m/sec και κινείται κατά μήκος της ευθείας X΄X. Το σώμα εισέρχεται σε χώρο μέσα στον οποίο ασκείται πάνω του δύναμη που μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα και εξέρχεται μετά από 2sec με ταχύτητα υ_2.



Να υπολογιστούν:
α) Από το διάγραμμα η ώθηση της δύναμης.
β) Η τελική ορμή του σώματος.
γ) Η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

(**Απ.** α) − 16Nsec β) 4kgr $\frac{m}{sec}$ γ) − 96Joule)

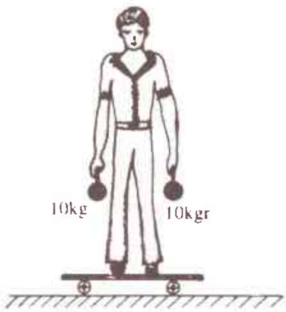


13. Ένα σύστημα δυο σωμάτων μπορεί να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή; Μπορεί να έχει ορμή χωρίς να έχει κινητική ενέργεια;

14. Ένα βλήμα έχει κινητική ενέργεια E και ορμή J τη στιγμή που εκρήγνυται. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές:
I. Η ολική κινητική ενέργεια των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα είναι:
α) ίση με E.
β) μεγαλύτερη από E.
γ) μικρότερη από E.

II Η ολική ορμή των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα είναι:
α) ίση με J.
β) μεγαλύτερη από J.
γ) μικρότερη από J.

15 Ένας άνθρωπος στέκεται πάνω σε μια σανίδα του πατινάζ η οποία ισορροπεί σε λεία και οριζόντια επιφάνεια, κρατώντας σε κάθε χέρι του μία σφαίρα μάζας 10kgr. Η μάζα του συστήματος άνθρωπος - σανίδα είναι 50kg.



α) Υποθέτουμε ότι ο άνθρωπος ρίχνει οριζόντια προς τα πίσω τη μια σφαίρα με ταχύτητα 3m/sec. Με ποια ταχύτητα θα κινηθεί το υπόλοιπο σύστημα προς τα εμπρός;

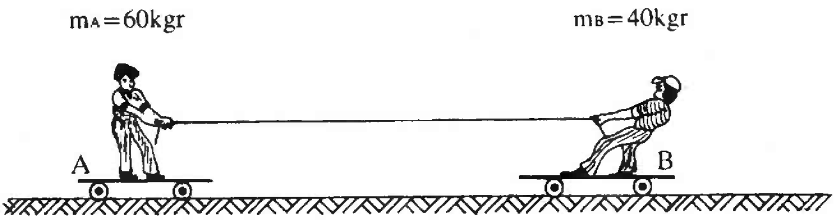
β) Με ποια ταχύτητα θα κινηθεί προς τα εμπρός το σύστημα αν ρίξει μαζί και τις δύο σφαίρες προς τα πίσω με ταχύτητα 2m/sec;

(Απ. α) 0,5m/sec β) 0,8m/sec)

16. Για ποιο λόγο επιταχύνεται ένας πύραυλος;

α) Τα εξερχόμενα αέρια που σπρώχνονται προς τα πίσω, σπρώχνουν τον πύραυλο προς τα εμπρός.
β) Ο εξωτερικός αέρας ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στο πίσω μέρος του πυραύλου, παρά στο εμπρός.
γ) Η ατμοσφαιρική πίεση στο πίσω μέρος του πυραύλου είναι ελαττωμένη.

17. Δυο άνθρωποι Α και Β ισορροπούν όπως δείχνει το σχήμα. Αν δεν υπάρχει τριβή και ο Α αρχίσει να τραβάει το σχοινί, ενώ ο Β απλώς το κρατάει, ποια ή ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές:



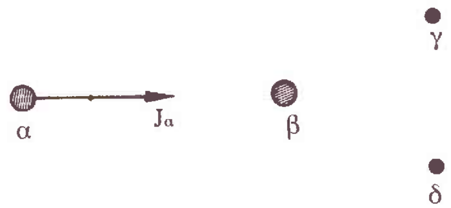
α) Θα μεταβληθεί μόνο η ορμή του Β.
β) Οι ορμές των δυο ανθρώπων θα μεταβληθούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να συναντηθούν στο μέσο της ΑΒ.
γ) Σε κάθε στιγμή η ορμή του Α είναι αντίθετη της ορμής του Β.

18. Σε μια μικρή βάρκα με πανιά υπάρχει ένας μεγάλος ανεμιστήρας. Στρέφοντας τον ανεμιστήρα ώστε να ρίχνει τον αέρα στα πανιά μπορούμε να πετύχουμε την κίνηση της βάρκας;

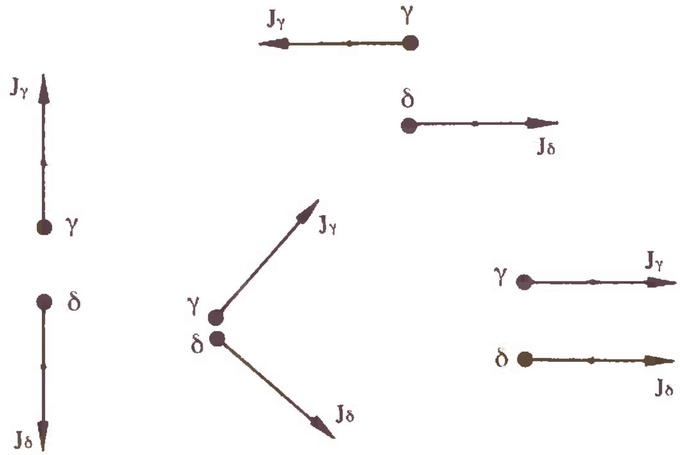
19. Ένα διπλό άστρο αποτελείται από δυο διαφορετικά άστρα τα οποία έλκονται μεταξύ τους και περιστρέφονται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους. Αν η βαρυτική έλξη από τα γειτονικά άστρα είναι αμελητέα σε σχέση με αυτή που ασκείται από το ένα στο άλλο, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

α) Η ορμή του κάθε άστρου διατηρείται σταθερή.
β) Η ορμή του κάθε άστρου μεταβάλλεται και συνεπώς μεταβάλλεται και η ορμή του συστήματος.
γ) Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, διότι όταν η ορμή του ενός άστρου μεταβάλλεται, του άλλου μεταβάλλεται κατά ίσο μέτρο αλλά κατά αντίθετη διεύθυνση.

20. Δύο σωματίδια α και β από τα οποία το β είναι ακίνητο και το α έχει ορμή J_α συγκρούονται μεταξύ τους. Μετά την κρούση αντί των α και β προκύπτουν δυο νέα σωματίδια γ και δ με ορμές J_γ και J_δ αντίστοιχα.



Ποιο από τα σχήματα είναι πιθανότερο να παριστάνει τις τελικές ορμές των σωματιδίων γ και δ;

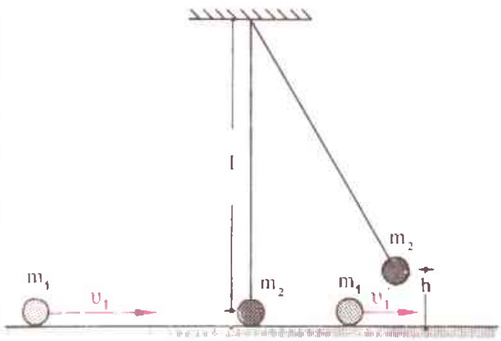


21. Θεωρούμε τη μετωπική ελαστική κρούση δύο μεταλλικών σφαιρών που πλησιάζουν η μια την άλλη με την ίδια ταχύτητα υ_o Οι μάζες των σφαιρών είναι m και 3m. Ποιες οι ταχύτητές τους μετά την κρούση;

(**Απ.** $2\upsilon_o$,0)

22. Η μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα υ_1 πάνω στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές και συγκρούεται μετωπικά με τη μάζα m_2 του εκκρεμούς, η οποία ανεβαίνει σε ύψος h. Αν ο λόγος των μαζών m_1 και m_2 είναι m_1/m_2 = K και η κρούση ελαστική, υπολογίστε την ταχύτητα υ_1 σε συνάρτηση με τα h; K και την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Μπορεί η μέθοδος αυτή να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ταχύτητας ενός σώματος;

(**Απ.** $\frac{K+1}{2K}\sqrt{2gh}$,ΝΑΙ)



23. Ένα νετρόνιο μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο πυρήνα μαζας m_2. Αν η σύγκρουση θεωρηθεί ελαστική και η αρχική κινητική ενέργεια του νετρονίου είναι $E_{K(1)}$,
α) να δειχθεί ότι η κινητική ενέργεια που χάνει το νετρόνιο είναι

$$\Delta E_K = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} E_{K(1)}$$

β) Αν ο ακίνητος πυρήνας είναι πυρήνας υδρογόνου, οπότε ο λόγος της μάζας του προς τη μάζα του νετρονίου είναι $\frac{m_2}{m_1} = 1$, πόση κινητική ενέργεια χάνει το νετρόνιο;
Να συγκρίνετε την απάντηση με την αντίστοιχη του παραδείγματος της παραγράφου 2.9. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

(**Απ.** β) 100%)

24. Ένα νετρόνιο μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $υ_1$ και υποθέτουμε ότι συγκρούεται διαδοχικά με τρεις όμοιους ακίνητους πυρήνες μάζας m_2. Αν ο λόγος της μάζας του πυρήνα προς τη μάζα του νετρονίου είναι $m_2/m_1 = 12$ και οι κρούσεις θεωρηθούν μετωπικές και ελαστικές να υπολογίσετε το λόγο της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια του νετρονίου.

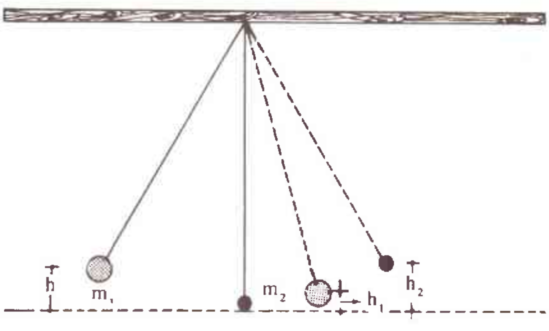
(**Απ.** 0,367)

25. α) **Υποθέτουμε** ότι ένα σωμάτιο α που κινείται με ταχύτητα $υ_1 = 10^6 \frac{m}{sec}$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο πυρήνα ηλίου. Πως θα κινηθούν τα δύο σωμάτια μετά την κρούση;
β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ακίνητο σωμάτιο είναι πυρήνας υδρογόνου και ότι η σύγκρουση είναι μετωπική και ελαστική. Με τι ταχύτητες τα δυο σωμάτια θα κινηθούν μετά την κρούση;
γ) Κατά την κρούση σωματιδίων α με ακίνητους πυρήνες χρυσού υποθέτουμε ότι οι πυρήνες του χρυσού παραμένουν ακίνητοι μετά την κρούση. Να εξεταστεί αν αυτό είναι μια δικαιολογημένη υπόθεση.

Μαζικός αριθμός χρυσού 197, μαζικός αριθμός σωματιδίου α 4.

(**Απ.** α) 0, 10^6m/sec β) $0{,}6υ_1$ $1{,}6υ_1$ γ) $-0{,}96υ_1$, $0{,}04υ_1$)

26. Δύο σφαιρίδια έχουν μάζες m_1 και $m_2 = \frac{m_1}{2}$ και κρέμονται από το ίδιο σημείο με νήματα ίσου μήκους l, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Τα σφαιρίδια έχουν πολύ μικρές διαστάσεις ώστε στη θέση ισορροπίας και τα δύο νήματα να θεωρούνται κατακόρυφα, ενώ τα σφαιρίδια εφάπτονται. Ανυψώνουμε το σφαιρίδιο m_1 σε ύψος h και όταν το αφήσουμε ελεύθερο αυτό συγκρούεται



μετωπικά και ελαστικά με το άλλο. Κατά πόσο θα ανυψωθεί κάθε σφαιρίδιο μετά την κρούση; Να επαληθεύσετε την αρχή διατήρησης της ενέργειας χρησιμοποιώντας την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα.

(**Απ.** Το m_1 θα ανέβει σε ύψος $h_1 = \frac{1}{9}h$

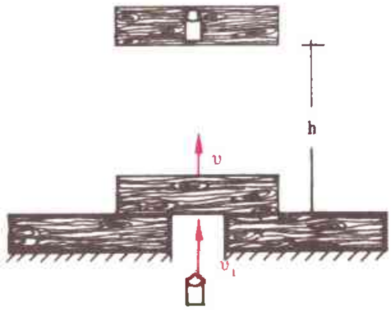
και το m_2 σε $h_2 = \frac{16}{9}h$)

27. Μια μικρή σφαίρα από χάλυβα μάζας m και ταχύτητας $υ_1$ προσπίπτει κάθετα σε ακίνητη χαλύβδινη επιφάνεια και ανακλάται. Δεδομένου ότι η κρούση είναι τελείως ελαστική το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι:

α) μικρότερη από $mυ_1$
β) ίση με $mυ_1$
γ) μεταξύ $mυ_1$ και $2mυ_1$
δ) ίση με $2mυ_1$
ε) ίση με $\frac{2}{3}mυ_1$

28. Ένα βλήμα μάζας m = 0,02kgr κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και σφηκώνεται σ' ένα κομμάτι ξύλο μάζας M = 1kgr. Το ξύλο αρχικά ήταν ακίνητο και το συσσωμάτωμα ξύλο - βλήμα ανυψώνεται κατά h = 0,8m.
Πόση είναι η ταχύτητα $υ_1$ του βλήματος πριν σφηνωθεί στο ξύλο;
Δίνεται g = 10m/sec².

(**Απ.** 204 m/sec)

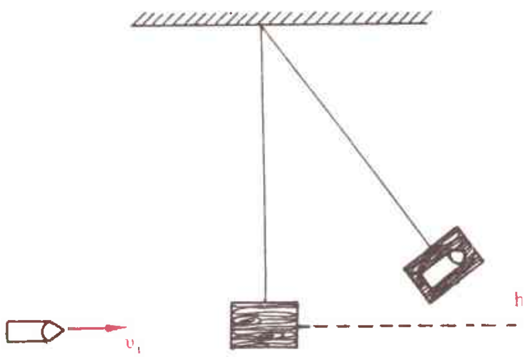


29. Ένα κομμάτι ξύλο μάζας M = 2kgr είναι δεμένο με νήμα σε ένα ακλόνητο σημείο και ισορροπεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας 10gr κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$ και σφηνώνεται στο κέντρο του ξύλου προκαλώντας έτσι ανύψωσή του κατά h = 10cm.

α) Πόση είναι η ταχύτητα $υ_1$;
β) Πόση είναι η απώλεια της ενέργειας του συστήματος ξύλο - βλήμα κατά την κρούση;

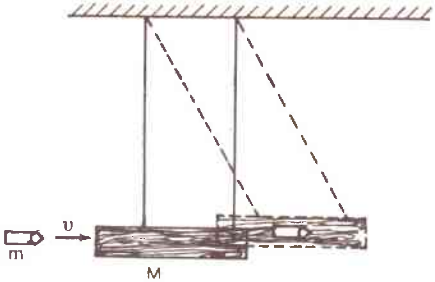
Δίνεται g = 9,8m/sec²

(**Απ.** α) 281,4m/sec β) 394Joule)

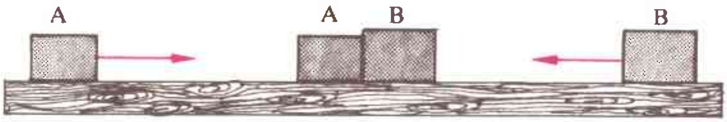


30. Μια σφαίρα μάζας m χτυπάει το ξύλο μάζας M σφηνώνεται σ' αυτό και το ανυψώνει όπως φαίνεται στο σχήμα.
Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος έγινε θερμότητα;

(Απ. $\frac{100M}{m+M}$ %)



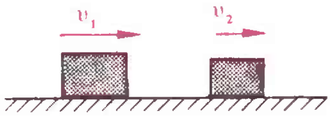
31. Δυο σώματα A και B κινούνται με την ίδια ταχύτητα αλλά κατά αντίθετη φορά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά τη σύγκρουση τα σώματα παραμένουν ενωμένα και ακίνητα.



Ποια ή ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές;
α) Τα δυο σώματα έχουν ίσες μάζες.
β) Η ολική ορμή ήταν μηδέν πριν τη σύγκρουση.
γ) Η ολική κινητική ενέργεια έμεινε αμετάβλητη κατά την κρούση.
Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν τριβές

32. Σώμα μάζας m_1 = 0,1kgr κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ = 3m/sec. Άλλο σώμα μάζας m_2 = 0,05kgr προηγείται του πρώτου επίσης κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα $υ_2$ = 1,5m/sec.
Τα δύο σώματα κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ποια η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων;
β) Ποια θα ήταν η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, αν το σώμα m_2 εκινείτο προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $υ_2$;
γ) Το σώμα m_1 φτάνει το m_2, ενώνεται με αυτό και τα δύο σώματα κινούνται με κοινή ταχύτητα υ = 2,5m/sec. Αυξήθηκε ή ελαττώθηκε η ορμή του m_1 και κατά πόσο;
Πόση είναι τώρα η ορμή του νέου σώματος που προκύπτει από την ένωση των δύο σωμάτων;



δ) Αν υποθέσουμε ότι η σύγκρουση διάρκεσε Δt = 0,1sec, ποιος είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος m_1; Πόση είναι η μέση τιμή της δύναμης που προκαλεί τη μεταβολή της ορμής του m_1 και ποια πρέπει να είναι η διεύθυνσή της;

(Απ. α) 0,375kgrm/sec β) 0,225kgrm/sec γ) ελαττώθηκε κατά 0,05kgrm/sec 0,375kgrm/sec δ) 0,5kgrm/sec^2 0,5N)

33. Δυο σώματα m_1 = 300gr και m_2 = 200gr κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες $υ_1$ = 50cm/sec και $υ_2$ = 100cm/sec αντίστοιχα. Τα σώματα κινούνται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και συγκρούονται μετωπικά.

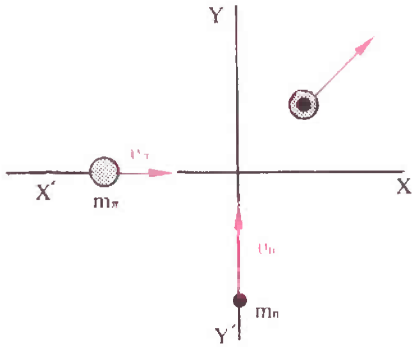
α) Αν η σύγκρουση είναι πλαστική να βρεθεί η κοινή ταχύτητα μετά την κρούση.

β) Να βρεθεί η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

γ) Αν η κρούση είναι ελαστική, ποια είναι η ταχύτητα του κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση;

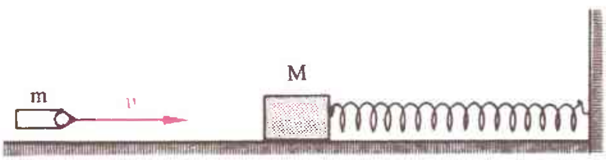
(**Απ.** α) 10cm/sec, με φορά αυτή του σώματος m_2 β) 0,1335 Joule γ) 70cm/sec αντίθετα από την $υ_1$, 80cm/sec αντίθετα από την $υ_2$)

34. Ένας πυρήνας αργού μάζας $m_π = 66{,}4 \cdot 10^{-27}$kgr και ένα νετρόνιο μάζας m_n κινούνται πάνω στο ίδιο επίπεδο, ο πυρήνας κατά τη διεύθυνση του άξονα Χ και το νετρόνιο κατά τη διεύθυνση του άξονα Υ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η κίνηση των δυο σωματιδίων, που οι ταχύτητες τους είναι αντίστοιχα $υ_π$ = 310m/sec και $υ_n$ = 2800m/sec, γίνεται έτσι ώστε αυτά να συγκρουσθούν και το νετρόνιο να ενσωματωθεί στον πυρήνα, ποια είναι η ορμή του συστήματος μετά την κρούση;
Δίνεται $m_n = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$kgr.



(**Απ.** Θα έχει μέτρο $2{,}11 \cdot 10^{-23}$kgrm/sec και θα σχηματίζει με τον άξονα ΧΧ΄ γωνία φ≃13°)

35. Ένα βλήμα μάζας m = 20gr κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ και σφηνώνεται σε ένα ξύλο μάζας M = 980gr που είναι στερεωμένο σε ελατήριο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το ελατήριο έχει σταθερά K = 1000N/m και η κίνηση της μάζας M γίνεται χωρίς τριβές. Αν η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι 10cm να υπολογιστούν:

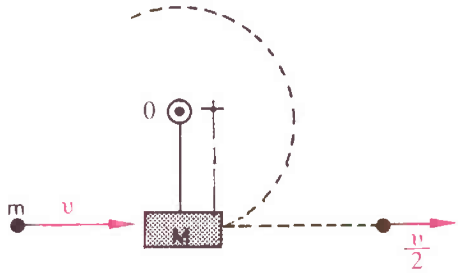
α) Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

β) Η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση.

γ) Η απώλεια της κινητικής ενέργειας.

(**Απ.** α) $\sqrt{10}$m/sec β) $50\sqrt{10}$m/sec γ) 245Joule)

36. Όπως φαίνεται στο σχήμα ένα βλήμα μάζας m και ταχύτητας υ διαπερνάει τη μάζα M και εξέρχεται με ταχύτητα υ/2. Η μάζα M αιωρείται από το σημείο O μέσω αβαρούς ράβδου μήκους l. Ζητούνται: α) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά το πέρασμα του βλήματος από τη μάζα M, β) η ελάχιστη ταχύτητα $υ_{ελ.}$ του βλήματος ώστε η μάζα M μόλις να διαγράψει τον εστιγμένο κύκλο.



$\left(\textbf{Απ.}\ α)\ \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{m}{M}\right)\ 100\%,\ β)\ \frac{4M}{m}\sqrt{gl}\right)$

3
Πεδία δυνάμεων

3.1. Νόμος Παγκόσμιας έλξης – νόμος Coulomb

Αρχικά ο άνθρωπος αναρωτήθηκε γιατί όλα τα σώματα, αν τα αφήσουμε ελεύθερα πέφτουν στη γη, ενώ οι πλανήτες περιστρέφοντα γύρω της;

Γιατί το κεχριμπάρι μαζεύει ελαφρά ρινίσματα ξύλου ή κομμάτια μαλλιού; Αυτά, αλλά και πλήθος άλλα φαινόμενα, η φυσική μπόρεσε να τα ερμηνεύσει, όταν κατάφερε να προσδιορίσει ποιοτικά και ποσοτικά τις δυνάμεις που ασκούνται ανάμεσα στα διάφορα σώματα.

Σήμερα ξέρουμε, ότι ο ήλιος και οι πλανήτες έλκονται μεταξύ τους αν και τους χωρίζουν αποστάσεις της τάξης του 10^{12}m και περιφέρουν τις τεράστιες μάζες τους με ακρίβεια πάνω σε καθορισμένες τροχιές.

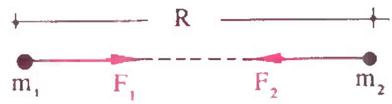
Τα ηλεκτρόνια περιφέρουν τη σχεδόν ασήμαντη μάζα τους γύρω από τον πυρήνα σε αποστάσεις της τάξης του 10^{-10}m. Ακόμη τα σωματίδια του πυρήνα κρατιόνται σφιχτά δεμένα μεταξύ τους μέσα σε μια περιοχή που έχει διάμετρο της τάξης του 10^{-15}m*

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα δόθηκε το 1666 από το Newton με το νόμο της παγκόσμιας έλξης σύμφωνα με τον οποίο:

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημειακών μαζών m_1 και m_2, οι οποίες απέχουν απόσταση R, είναι ελκτική με φορέα την ευθεία που ενώνει τις μάζες και μέτρο.

1989

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \qquad (3.1)$$



Σχ. 3.1. Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι αντίθετες, δηλαδή $F_1 = F_2 = F$

Το G είναι μια παγκόσμια σταθερά, που έχει την ίδια τιμή για όλα τα ζευγάρια των μαζών, ίση με $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2kgr^{-2}. Οι ελκτικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μαζών ονομάζονται **βαρυτικές** και είναι αυτές που καθορίζουν την κίνηση των πλανητών και την πτώση των σωμάτων.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα άργησε περισσότερο να δοθεί. Το 1747 ο Benjamin Franklin (Βενιαμίν Φραγκλίνος) μετά από σειρά πειραμάτων έφτασε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικού φορτίου, το θετικό και το αρνητικό. Ο νόμος όμως που περιγράφει τις έλξεις και τις απώσεις ανάμεσα στα ηλεκτρικά φορτία διατυπώθηκε από τον Coulomb, έναν περίπου αιώνα αργότερα από τότε που ο Newton διατύπωσε το νόμο της παγκόσμιας έλξης και είναι ο εξής:

---

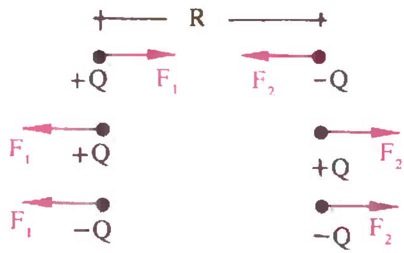
* Σήμερα γνωρίζουμε ότι παρόλο που ο πυρήνας είναι τόσο μικρός τα σωματίδια που τον αποτελούν κινούνται.

Η δύναμη που ασκείται μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημειακών φορτίων Q_1 και Q_2, τα οποία απέχουν απόσταση R, είναι ελκτική ή απωστική με φορέα την ευθεία που ενώνει τα δυο φορτία και μέτρο.

$$F = K_c \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (3.2)$$

Το Kc είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό μέσα στο οποίο βρίσκονται τα ηλεκτρικά φορτία και που η τιμή της για το κενό ή τον αέρα είναι $9 \cdot 10^9 Nm^2Cb^{-2}$*.

Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων ονομάζονται **ηλεκτρικές.**



Σχ. 3.2. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι αντίθετες με μέτρο $F_1 = F_2 = F$.

3.2. Βαρυτικές και ηλεκτρικές δυνάμεις

Οι παραπάνω δυνάμεις, όπως περιγράφονται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) της προηγούμενης παραγράφου παρουσιάζουν ορισμένες τυπικές ομοιότητες.

◀ Και στα δυο είδη δυνάμεων το μέτρο είναι αντίστροφα ανάλογο με το τετράγωνο της απόστασης, ή διαφορετικά είναι δυνάμεις που ακολουθούν το νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

◀ Και τα δυο είδη είναι δυνάμεις κεντρικές. Αυτό σημαίνει, ότι οι φορείς τους βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ενώνει τις σημειακές μάζες ή τα σημειακά φορτία.

◀ Τόσο οι βαρυτικές όσο και οι ηλεκτρικές είναι δυνάμεις συντηρητικές

Εκτός όμως από τις τυπικές ομοιότητες που αναφέραμε, μεταξύ των βαρυτικών και των ηλεκτρικών δυνάμεων υπάρχουν και ουσιαστικές διαφορές. Πράγματι ενώ μεταξύ των μαζών ασκούνται πάντα ελκτικές δυνάμεις, οι δυνάμεις που εμφανίζονται μεταξύ των φορτίων μπορεί να είναι ελκτικές αλλά και απωστικές. Μια άλλη διαφορά μεταξύ τους είναι, ότι οι ηλεκτρικές δυνάμεις είναι πολύ μεγαλύτερες από τις βαρυτικές. Έτσι, αν υπολογίσουμε την ηλεκτρική

* Η σταθερά Kc συνδέεται με τη διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_0 με τη σχέση

$$K_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

έλξη (Fe) και την βαρυτική (Fg) ανάμεσα στο ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο του πυρήνα στο άτομο του υδρογόνου βρίσκουμε ότι $Fe/Fg = 10^{39}$*.

Είναι ενδιαφέρον να πούμε, ότι οι βαρυτικές δυνάμεις λόγω της πολύ μικρής τους τιμής, δεν παίζουν κανένα ρόλο στο σχηματισμό των μορίων από τα άτομα, ή της ύλης από τα μόρια, σε αντίθεση με τις ηλεκτρικές που συντελούν στο σχηματισμό των μορίων όπως συμβαίνει για παράδειγμα στις ετεροπολικές ενώσεις. Πάντως πολλά φαινόμενα της καθημερινής ζωής, όπως π.χ. οι παλίρροιες, είναι αποτέλεσμα της βαρυτικής αλληλεπίδρασης της γης με τον ήλιο και τη σελήνη. Δηλαδή οι ηλεκτρικές δυνάμεις κυριαρχούν στο μικρόκοσμο (άτομα, μόρια κλπ), ενώ οι βαρυτικές στο μακρόκοσμο (μεγάλα σώματα).

3.3. Από τη δύναμη στην έννοια του πεδίου δυνάμεων

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης και ο νόμος του Coulomb, όπως φαίνεται από τη διατύπωσή τους, μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίζουμε το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά των βαρυτικών και των ηλεκτρικών δυνάμεων.
Οι δυο όμως αυτοί νόμοι με τη μεγάλη χρησιμότητα έβαλαν τους επιστήμονες μπροστά σε δυο ερωτήματα:

α) Ποια είναι η προέλευση αυτών των δυνάμεων;

β) Πως μεταφέρονται οι δυνάμεις αυτές από τη μια μάζα στην άλλη, ή από το ένα φορτίο στο άλλο;

Απάντηση στο πρώτο ερώτημα δεν έχει δοθεί μέχρι σήμερα. Η ύπαρξη των βαρυτικών και των ηλεκτρικών δυνάμεων είναι αποδεκτή de facto, ή αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τα λόγια του Newton για τις βαρυτικές, «δεχόμαστε αυτές τις δυνάμεις μόνο γιατί υπάρχουν».

Για να δοθεί απάντηση στο δεύτερο ερώτημα αναπτύχτηκαν δυο θεωρίες:

1. Η θεωρία της δράσης από απόσταση.
2. Η θεωρία του πεδίου δυνάμεων.

1. Θεωρία της δράσης από απόσταση

Η θεωρία αυτή δέχεται, ότι οι δυνάμεις μεταφέρονται ακαριαία από τη μια μάζα στην άλλη, ή από το ένα φορτίο στο άλλο και χωρίς να είναι αναγκαία η

---

* Υπολογισμός του λόγου Fe/Fg στο άτομο του H. Με δεδομένο ότι οι μάζες του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου είναι αντίστοιχα $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kgr, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kgr και το φορτίο του ηλεκτρονίου $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ cb, έχουμε:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K_c \frac{Q_e Q_p}{R^2}}{G \frac{m_e m_p}{R^2}} = \frac{K_c e e}{G m_e m_p} = \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}} \rightarrow Fe/Fg \simeq 10^{39}$$

μεσολάβηση κάποιου μέσου. Αυτός ο τρόπος μεταφοράς της δύναμης αποδίδεται σχηματικά ως εξής:



Ακαριαία μεταφορά της δύναμης από την M στην m και αντίστροφα

Ακαριαία μεταφορά της δύναμης από το Q στο q και αντίστροφα

Σχ. 3.3.

Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της θεωρίας είναι, ότι η δύναμη μπορεί να μεταφερθεί ακόμη και μέσα από το κενό και ότι ο υπολογισμός της είναι διαδικασία ενός βήματος. Δηλαδή η δύναμη υπολογίζεται απ' ευθείας με τη χρησιμοποίηση των τύπων (3.1) ή (3.2)

Παρόλο που η μεταφορά της δύναμης μέσα από το κενό ήταν ένα γεγονός (ο Newton είχε ερμηνεύσει τις κινήσεις των πλανητών με τη βοήθεια των βαρυτικών δυνάμεων που ασκούσε ο ήλιος μέσα από το κενό σ' αυτούς), η ιδέα της δράσης από απόσταση δεν ήταν ποτέ ικανοποιητική για τους επιστήμονες. Πράγματι δεν μπορούσαν να φανταστούν πως μεταφέρεται η δύναμη χωρίς τη μεσολάβηση κάποιου κατάλληλου μέσου και κυρίως πως μεταφέρεται ακαριαία*.

Σκέπτονταν πως κάτι θα πρέπει να παρεμβάλλεται ανάμεσα στις μάζες ή τα φορτία, που να έχει την ικανότητα να μεταφέρει τη δύναμη.

Την εποχή ακριβώς, που οι επιστήμονες προβληματίζονταν με τη θεωρία της δράσης από απόσταση, στο χώρο του ηλεκτρισμού γίνονταν πειράματα σχετικά με τη δημιουργία μαγνητικού πεδίου γύρω από ρευματοφόρους αγωγούς, που τα αποτελέσματά τους έρχονταν σε αντίθεση με τη θεωρία της δράσης από απόσταση.

Αυτή η αντίθεση ενίσχυσε την απόρριψη αυτής της θεωρίας και έτσι το ερώτημα της μεταφοράς των δυνάμεων παρέμεινε. Το γεγονός αυτό οδήγησε το Faraday (1791-1867) να εισαγάγει στη φυσική την έννοια του πεδίου δυνάμεων, που γίνεται συνέχεια όλο και περισσότερο χρησιμοποιήσιμη.

2. Θεωρία του πεδίου δυνάμεων.

Η έννοια του πεδίου είναι γενική. Η φυσική τη δανείστηκε από την καθημερινή ζωή και τη χρησιμοποιεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που χρησιμοποιείται και στην καθημερινή εμπειρία.

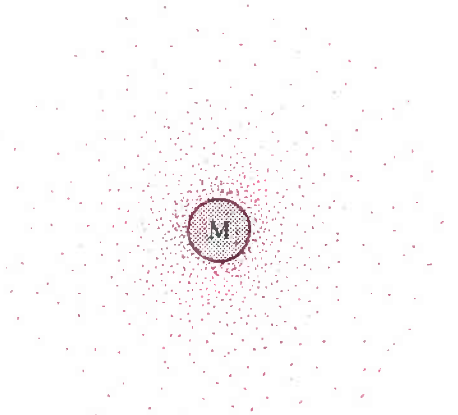
Έτσι όπως π.χ. «πεδίο μάχης» είναι ο χώρος μέσα στον οποίο διεξάγεται η

* Σήμερα γνωρίζουμε ότι η ακαριαία μεταφορά δεν έχει νόημα γιατί σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας η μεγαλύτερη ταχύτητα που μπορεί να πραγματοποιηθεί είναι η ταχύτητα του φωτός $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$

μάχη, ή «οπτικό πεδίο» είναι ο χώρος μέσα στον οποίο κάθε αντικείμενο γίνεται αντιληπτό από το μάτι, με τον ίδιο τροπο και το πεδίο δυνάμεων ορίζεται σαν **«ο χώρος σε οποιοδήποτε σημείο του οποίου, αν φέρουμε κατάλληλο "υπόθεμα" θα ασκηθεί πάνω σ' αυτό δύναμη».**

Η θεωρία του πεδίου δυνάμεων γεννήθηκε κυρίως από την ανάγκη να ερμηνευτούν τα ηλεκτρικά φαινόμενα (επίδραση ηλεκτρικού ρεύματος σε μαγνητικό πόλο), είναι όμως πιο απλό να τη μελετήσουμε από το «δρόμο» της μηχανικής και να δούμε πως αυτή ερμηνεύει την αλληλεπίδραση μεταξύ δυο μαζών M και m.

Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή η μάζα M δημιουργεί με κάποιο άγνωστο τρόπο ένα πεδίο δυνάμεων (βαρυτικό πεδίο) στην περιοχή που την περιβάλλει, σχ. 3.4. Το πεδίο αυτό υπάρχει ως δημιούργημα της μάζας M (πηγή του πεδίου), έστω και αν δεν υπάρχουν άλλες μάζες στην περιοχή του. Στο σχήμα 3.4 το παριστάνουμε με τις μικρές κουκίδες γύρω από τη μάζα M.



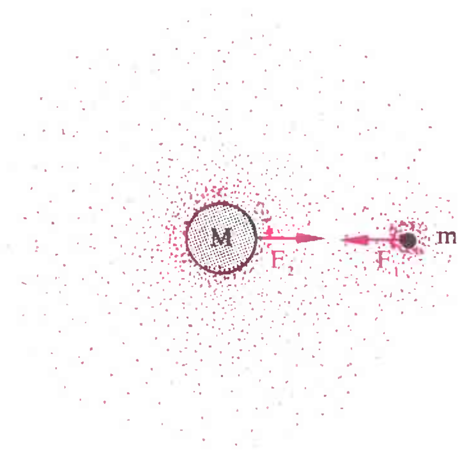
Σχ. 3.4. Δημιουργία του πεδίου από τη μάζα M (πρώτο βήμα)

Πειραματικά διαπιστώνουμε την ύπαρξή του μόνον αν μέσα στην περιοχή της δράσης του φέρουμε μια άλλη δοκιμαστική μάζα m (υπόθεμα), οπότε το πεδίο θα της ασκήσει μια δύναμη $\vec{F}_1$, σχ. 3.5.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και η μάζα m παράγει ένα άλλο πεδίο που ασκεί στη M δύναμη $\vec{F}_2$ αντίθετη της $\vec{F}_1$. Δηλαδή δεν έχει νόημα να μιλάμε για επίδραση μιας μάζας πάνω σε μια άλλη, αλλά μόνο για αλληλεπίδραση ανάμεσά τους. Αυτή η αλληλεπίδραση όπως περιγράφεται από τη θεωρία του πεδίου δυνάμεων είναι διαδικασία δυο βημάτων:

α. Η μάζα M παράγει το βαρυτικό πεδίο, σχ. 3.4.

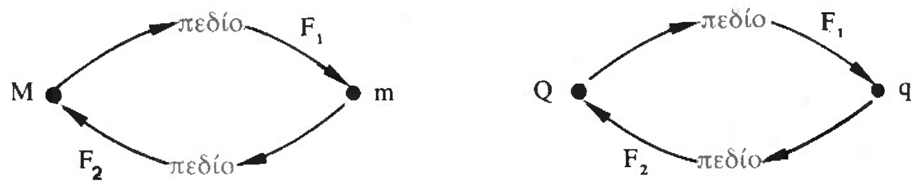
β. Το πεδίο αλληλεπιδρά με τη μάζα m για την παραγωγή μιας δύναμης $\vec{F}_1$ πάνω σ' αυτή, σχ. 3.5.



Σχ. 3.5. Το πεδίο ασκεί στη μάζα m δύναμη F_1 (δεύτερο βήμα).

Η διαδικασία των δυο βημάτων είναι όπως είπαμε αντιστρέψιμη, δηλαδή και η μάζα m παράγει βαρυτικό πεδίο που ασκεί στην M δύναμη $\vec{F}_2$ αντίθετη της

$\vec{F}_1$. Η σχηματική παράσταση των όσων είπαμε για τη θεωρία του πεδίου δυνάμεων δίνεται από τα σχήματα που ακολουθούν για το βαρυτικό αλλά και το ηλεκτροστατικό πεδίο στο οποία φαίνεται η διαδικασία των δυο βημάτων και η αντιστρεψιμότητά της.



Θα πρέπει να τονίσουμε, ότι στην περίπτωση των πεδίων που δημιουργούνται γύρω από τη σημειακή μάζα M ή το σημειακό φορτίο Q, οι δυνάμεις που ασκούνται στα αντίστοιχα υποθέματα m και q είναι αυτές ακριβώς που δίνει και η θεωρία της δράσης από απόσταση. Η εισαγωγή της έννοιας του πεδίου απλώς ερμηνεύει την εμφάνιση των δυνάμεων πάνω στα υποθέματα, δεχόμενη ότι αυτές είναι αποτέλεσμα της ιδιότητας που απόκτησε ο χώρος γύρω από τις πηγές και όχι αποτέλεσμα ακαριαίας μεταφοράς τους από τις πηγές στα υποθέματα. Οι δυνάμεις αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις (3.1) και 3.2) αντίστοιχα.

3.4. Στοιχεία πεδίου δυνάμεων

Τα πεδία δυνάμεων που μελετήσαμε ως τώρα, είναι το ηλεκτροστατικό και το βαρυτικό. Στην εποχή μας αποτελούν αντικείμενο μελέτης δυο ακόμη πεδία δυνάμεων που εντοπίζονται στην περιοχή του πυρήνα. Αυτά είναι **το ισχυρό πυρηνικό πεδίο**, που μεταξύ των άλλων ερμηνεύει και τη σταθερότητα του πυρήνα και **το διεθνές πυρηνικό πεδίο** με το οποίο ερμηνεύεται η εκπομπή ακτινοβολίας β από τους πυρήνες*.

Όπως γνωρίζουμε τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν ένα πεδίο δυνάμεων είναι η ένταση και το δυναμικό. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα στοιχεία του βαρυτικού και του ηλεκτροστατικού πεδίου με σκοπό μέσα απ' αυτή τη μελέτη να φανεί η δυνατότητα που υπάρχει για ενιαία αντιμετώπιση των πεδίων αυτών.

---

* Η ακτινοβολία β είναι ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από τους ραδιενεργούς πυρήνες.

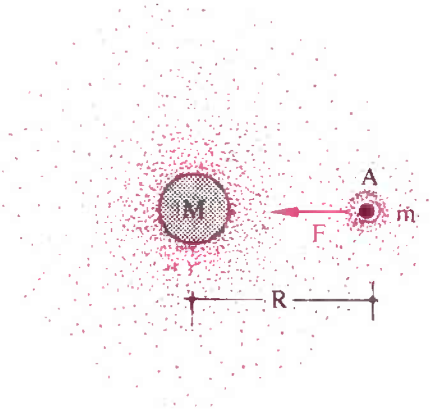
Ένταση πεδίου δυνάμεων

3.5. Ορισμός της έντασης

Σύμφωνα με τον ορισμό του, το βαρυτικό πεδίο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα που έχει να ασκεί δύναμη σε κάθε μάζα m, που θα βρεθεί στην περιοχή της δράσης του.

Ας θεωρήσουμε το βαρυτικό πεδίο που παράγει η μάζα M και ας φέρουμε στο τυχαίο σημείο του A μια σημειακή μάζα m. Το πεδίο θ' ασκήσει στη μάζα m δύναμη $\vec{F}$, σχ. 3.6, που το μέτρο της θα είναι

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$



Σχ. 3.6

Αν στο ίδιο σημείο A φέρουμε διαδοχικά, αντί της m μάζες 2m, 3m..., τότε οι δυνάμεις που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση έχουν αντίστοιχα μέτρο 2F, 3F....

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι το βαρυτικό πεδίο δεν μπορεί να περιγραφεί από ένα μέγεθος σαν τη δύναμη, γιατί η τιμή της εξαρτάται για το ίδιο σημείο του πεδίου από τη μάζα στην οποία ασκείται.

Η ανάγκη να περιγράψουμε το βαρυτικό πεδίο μ' ένα φυσικό μέγεθος που να έχει ορισμένη τιμή σε κάθε σημείο του και το οποίο δε θα εξαρτάται από τη μάζα που φέρνουμε στο θεωρούμενο σημείο, μας ανάγκασε να αναζητήσουμε ένα καινούργιο μέγεθος.

Αν χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους υπολογισμούς σχηματίσουμε το πηλίκο της δύναμης προς τη μάζα, αυτό παίρνει διαδοχικά τις τιμές

$$\frac{F}{m}, \quad \frac{2F}{2m}, \quad \frac{3F}{3m} \ldots\ldots$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι το πηλίκο F/m είναι σταθερό για κάθε σημείο του πεδίου. Με βάση την παρατήρηση αυτή εισάγουμε για την περιγραφή του πεδίου ένα νέο φυσικό μέγεθος, που ονομάζεται **ένταση $\vec{g}$** του βαρυτικού πεδίου στο θεωρούμενο σημείο και που ορίζεται από την εξίσωση:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (3.3)$$

Για το βαρυτικό πεδίο της γης, η δύναμη $\vec{F}$ θα είναι το βάρος της μάζας m

στο σημείο Α, οπότε $\vec{g} = \frac{\vec{B}}{m}$. Δηλαδή η ένταση του πεδίου βαρύτητας της γης σε κάποιο σημείο ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας στο θεωρούμενο σημείο.

Από την εξίσωση (3.3) προκύπτει, ότι η ένταση του βαρυτικού πεδίου σε κάθε σημείο του είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, που έχει τη διεύθυνση και τη φορά της δύναμης $\vec{F}$, την οποία ασκεί το πεδίο σε κάθε μάζα m που φέρνουμε στο θεωρούμενο σημείο και μέτρο

$$g = \frac{F}{m} \qquad (3.4)$$

Αν στην εξίσωση (3.4) αντικαταστήσουμε τη δύναμη από την εξίσωση (3.1) βρίσκουμε ότι

$$g = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{R^2}}{m} \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2} \qquad (3.5)$$

Όπως το βαρυτικό έτσι και το ηλεκτροστατικό πεδίο περιγράφεται από ένα αντίστοιχο διανυσματικό μέγεθος $\vec{\mathcal{E}}$, που ονομάζεται ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου και που ορίζεται από τη σχέση

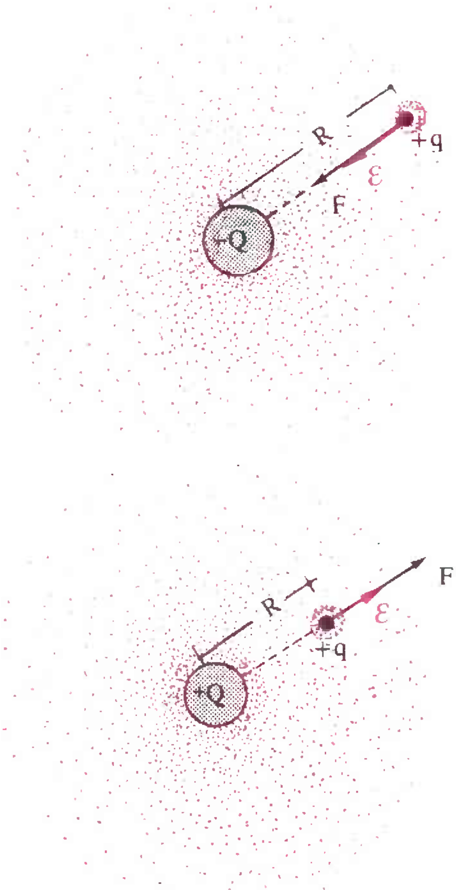
$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (3.6)$$

Στην εξίσωση (3.6), $\vec{F}$ είναι η δύναμη που ασκεί το πεδίο στο δοκιμαστικό φορτίο q (υπόθεμα), που κατά σύμβαση το παίρνουμε πάντα θετικό. Όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.6), η φορά και η διεύθυνση της έντασης $\vec{\mathcal{E}}$ είναι ίδια με τη φορά και τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$, σχ. 3.7.

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (3.6) το μέτρο της δύναμης, όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση (3.2) βρίσκουμε:

$$\mathcal{E} = \frac{F}{q} = \frac{\frac{KcQq}{R^2}}{q} \Rightarrow \mathcal{E} = Kc\frac{Q}{R^2} \qquad (3.7)$$

Από τις εξισώσεις (3.3), (3.5), (3.6) και (3.7) μπορούμε να συμπεράνουμε,



Σχ. 3.7.

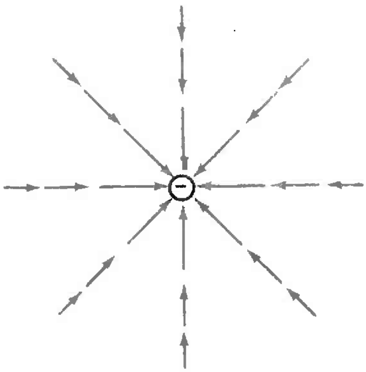
ότι υπάρχει ποιοτική ομοιότητα ανάμεσα στην ένταση του βαρυτικού και του ηλεκτροστατικού πεδίου. Πράγματι και οι δυο εντάσεις δίνονται σαν πηλίκο δύναμης προς υπόθεμα, είναι σταθερές για ορισμένο σημείο του πεδίου, μεταβάλλονται αντίστροφα ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή που δημιουργεί το πεδίο και έχουν τη διεύθυνση της δύναμης που ασκεί το πεδίο στο υπόθεμα.

3.6. Δυναμικές γραμμές

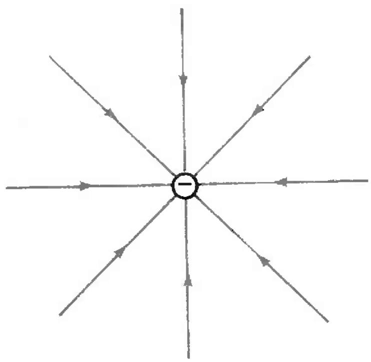
Αρχικά για να δοθεί μια εποπτική εικόνα του πεδίου δυνάμεων σχεδιάζοταν το διάνυσμα της έντασης σε κάθε σημείο του πεδίου. Αυτός όμως ο τρόπος απεικόνισης ήταν πρακτικά δύσκολος γιατί έπρεπε το μήκος του διανύσματος να είναι ανάλογο με το μέτρο της έντασης σε κάθε σημείο του πεδίου. Η ανάγκη για μια περισσότερο πρακτική απεικόνιση του πεδίου έδωσε στο Faraday την ιδέα των δυναμικών γραμμών που τις όρισε ως εξής:

«Δυναμικές γραμμές είναι οι γραμμές που έχουν την ιδιότητα σε κάθε σημείο τους το άνυσμα της έντασης του πεδίου να είναι εφαπτόμενο». Κατά σύμβαση οι δυναμικές γραμμές ενός πεδίου σχεδιάζονται έτσι ώστε σε σημεία που η έντασή του είναι μεγάλη να αντιστοιχεί μεγάλη πυκνότητα δυναμικών γραμμών και αντίστροφα.

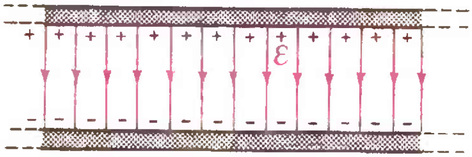
Μερικές μορφές γνωστών ηλεκτροστατικών πεδίων, όπως και το βαρυτικό πεδίο γύρω από τη γη απεικονίζονται με τη μέθοδο των δυναμικών γραμμών στα σχήματα που ακολουθούν.



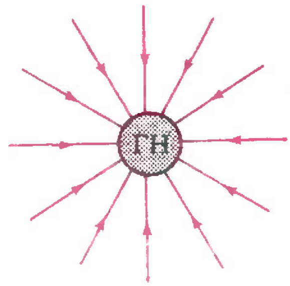
Σχ. 3.8. Το ηλεκτροστατικό πεδίο γύρω από αρνητικό φορτίο. Έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα $\vec{\mathcal{E}}$ στα διάφορα σημεία του πεδίου



Σχ. 3.9. Παράσταση του πεδίου του Σχ. 3.8 , όπου τα διανύσματα αντικαταστάθηκαν με τις ακτινωτές δυναμικές γραμμές



Σχ. 3.10. Ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο



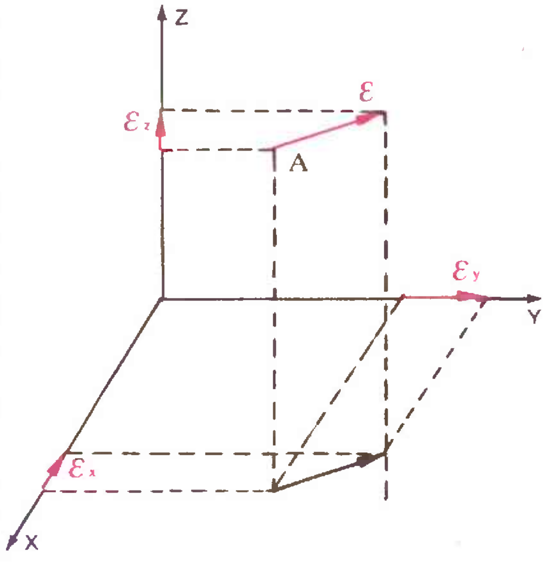
Σχ. 3.11 Το βαρυτικό πεδίο της γης (Φαίνεται η ομοιότητα στη μορφή με το ηλεκτροστατικό πεδίο του σχ. 3.9)

Παρατήρηση. Το βαρυτικό πεδίο γύρω από τη γη είναι ένα μη ομογενές πεδίο. Παρόλα αυτά μπορούμε με ικανοποιητική προσέγγιση για μια μικρή περιοχή να το θεωρούμε ομογενές, δηλαδή να έχουμε για όλα τα σημεία της περιοχής αυτής σταθερή ένταση $\vec{g}$.

Δυναμικό πεδίου δυνάμεων

3.7. Η ανάγκη για την εισαγωγή της έννοιας του δυναμικού

Η περιγραφή ενός πεδίου δυνάμεων με τη βοήθεια της έντασης πλεονεκτεί της αντίστοιχης περιγραφής του με τη δύναμη, γιατί η ένταση είναι ανεξάρτητη από το υπόθεμα που τυχόν υπάρχει στο πεδίο. Ωστόσο και αυτός ο τρόπος περιγραφής παρουσιάζει την εξής δυσκολία. Επειδή η ένταση είναι διανυσματικό μέγεθος χρειάζονται τρεις αριθμοί για να οριστεί πλήρως, δηλαδή οι τρεις συνιστώσες της $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, σχ. 3.12.



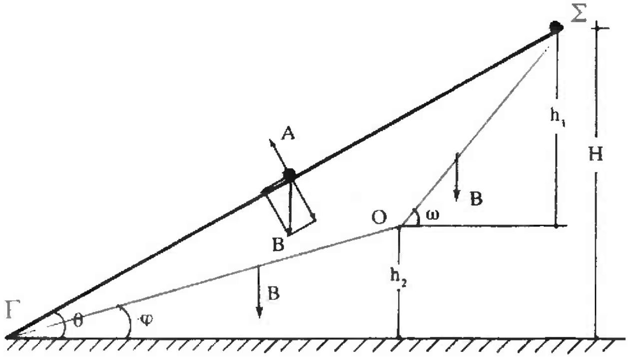
Σχ. 3.12

Η ανάγκη να περιγραφούν τα πεδία δυνάμεων με απλούστερο τρόπο οδήγησε στην εισαγωγή ενός μονόμετρου μεγέθους, το οποίο ονομάστηκε **δυναμικό**, που όπως θα δούμε, έχει νόημα μόνο για τα συντηρητικά πεδία δυνάμεων. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό του δυναμικού θα μελετήσουμε πρώτα τη διαφορά δυναμικού γιατί μέσα από τη

μελέτη της θα κατανοηθεί καλύτερα η έννοια του δυναμικού.

3.8. Διαφορά δυναμικού 1991

Από ένα σημείο Σ αφήνουμε να κινηθεί χωρίς τριβές ένα σώμα κατά μήκος της διαδρομής ΣΓ, σχ. 3,13 και υπολογίζουμε το έργο W_B του βάρους του $\vec{B}$. Κατά τα γνωστά έχουμε W_B = ΒημθΣΓ = Β.Η



Σχ. 3.13

Αν αφήσουμε το ίδιο σώμα να κινηθεί από το Σ κατά μήκος της ΣΟΓ και υπολογίσουμε πάλι το έργο του βάρους του βρίσκουμε:

$$W_B = B\etaμω(ΣΟ) + B\etaμφ(ΟΓ)$$

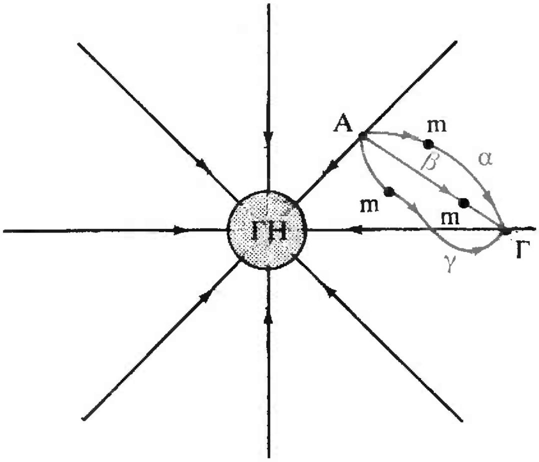
ή $$W_B = Bh_1 + Bh_2 = B(h_1 + h_2)$$

ή $$W_B = B.H$$

Δηλαδή το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε και για οποιαδήποτε άλλη διαδρομή του σώματος μεταξύ των σημείων Σ και Γ. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε στις βαρυτικές δυνάμεις μια καινούργια ιδιότητα ισοδύναμη με αυτή της παραγράφου 1.7 (ότι δηλαδή το έργο τους κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν), που διατυπώνεται ως εξής: **Το έργο της βαρυτικής δύναμης και επομένως κάθε συντηρητικής δύναμης που μετακινεί ένα σώμα μεταξύ δυο θέσεων δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα αλλά μόνο από τις θέσεις αυτές.** Ή διαφορετικά η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος που μετακινείται με την επίδραση συντηρητικής δύναμης μεταξύ δύο σημείων είναι πάντα η ίδια, ανεξάρτητα από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα. Παραδείγματος χάρη στο σχήμα 3.14, η μεταβολή της δυναμικής ενέρ-

γειας, κατά την κίνηση ενός σώματος από τη θέση Α στη θέση Γ μέσα στο βαρυτικό πεδίο, δεν εξαρτάται από τη διαδρομή (α), ή (β), ή (γ) κ.τ.λ., που μπορεί να ακολουθήσει το σώμα και είναι πάντα ίση με το έργο της δύναμης του πεδίου. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta E_{\Delta} = E_{\Delta(A)} - E_{\Delta(\Gamma)} = W_{A\to\Gamma} \qquad (3.8)$$



Σχ. 3.14

Αφού η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος, κατά τη μετακίνησή του από τη θέση Α στη θέση Γ, είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τη διαδρομή και το πηλίκο $\frac{\Delta E_{\Delta}}{m}$, όπου m είναι η μάζα του σώματος, θα είναι σταθερό. **Το σταθερό πηλίκο της μεταβολής ΔE_{Δ} της δυναμικής ενέργειας προς τη μάζα m του σώματος, που μετακινήθηκε μεταξύ δύο θέσεων, το ονομάζουμε διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των θέσεων αυτών.** Δηλαδή για το σχ. 3.14 έχουμε

$$\Delta V = V_A - V_\Gamma = \frac{\Delta E_{\Delta}}{m}$$

ή

$$\Delta V = V_A - V_\Gamma = \frac{E_{\Delta(A)} - E_{\Delta(\Gamma)}}{m} \qquad (3.9)$$

ή

$$V_A - V_\Gamma = \frac{W_{A\to\Gamma}}{m} \qquad (3.10)$$

Βρίσκεται με τη βοήθεια των μαθηματικών, ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων Α και Γ του βαρυτικού πεδίου της γης δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{V_A - V_\Gamma = -GM_\Gamma\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_\Gamma}\right)} \qquad (3.11)$$

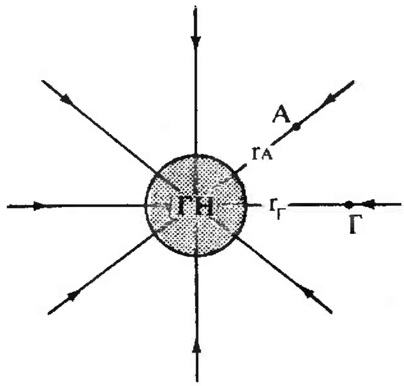
όπου r_A και r_Γ είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις των σημείων Α και Γ από το κέντρο της γης, σχ. 3.15, Μг η μάζα της γης και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

Η έννοια της διαφοράς δυναμικού στο βαρυτικό πεδίο είναι σε πλήρη αναλογία με τη διαφορά δυναμικού στο ηλεκτροστατικό πεδίο αφού και τα δυο είναι πεδία συντηρητικά. Πράγματι στο ηλεκτροστατικό πεδίο η διαφορά δυναμικού $V_A - V_\Gamma$ μεταξύ δύο σημείων Α και Γ του πεδίου δίνεται από τις σχέσεις

$$V_A - V_\Gamma = \frac{W_{A\to\Gamma}}{q} \quad \text{και}$$

$$V_A - V_\Gamma = K_c Q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_\Gamma}\right)$$

που είναι σε πλήρη αναλογία με τις σχέσεις (3.10) και (3.11) αντίστοιχα.



Σχ. 3.15

3.9. Δυναμικό 1989

Από τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό σε ένα σημείο του συντηρητικού πεδίου. Αυτό μπορεί να γίνει με την προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε πάντοτε σε σχέση με ένα άλλο συμφωνημένο σημείο. Κάτι ανάλογο εφαρμόζουμε για τη μέτρηση του ύψους των βουνών, όπου δεχόμαστε ότι η επιφάνεια της θάλασσας έχει ύψος μηδέν. Με αυτή την έννοια μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου της γης αν δεχτούμε ότι το δυναμικό σε άπειρη απόσταση από τη γη είναι μηδέν. Επίσης δεχόμαστε ότι στην ίδια απόσταση είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m. Αν λοιπόν στον τύπο (3.9) θέσουμε $V_\Gamma=0$, και $E_{\Delta(\Gamma)}=0$, παίρνουμε

$$V_A = \frac{E_{\Delta(A)}}{m} \qquad (3.12)$$

Δηλαδή: **Δυναμικό V_A σε ένα σημείο Α του βαρυτικού πεδίου της γης είναι το σταθερό πηλίκο της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος στο θεωρούμενο σημείο προς τη μάζα m του σώματος.**

Εξάλλου αν στον τύπο (3.11) η απόσταση $r_Γ$ είναι πολύ μεγάλη (το σημείο Γ βρίσκεται έξω από το βαρυτικό πεδίο της γης), τότε προκύπτει για το δυναμικό του σημείου Α

$$V_A = -\frac{GM_Γ}{r_A} = \frac{W_{A\to\infty}}{m} \qquad (3.13)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ένας άλλος ισοδύναμος ορισμός του δυναμικού:

Δυναμικό V_A σε ένα σημείοΑ του βαρυτικού πεδίου της γης ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου $W_{A\to\infty}$ της συντηρητικής δύναμης του πεδίου (βάρος) για τη μεταφορά του σώματος από το σημείο Α στο άπειρο (εκτός του πεδίου) προς τη μάζα του m.

Ο τύπος (3.13) βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με τον τύπο $V = K_c\frac{Q}{r}$, που όπως γνωρίζουμε δίνει το δυναμικό στο ηλεκτροστατικό πεδίο γύρω από φορτίο Q.

Από τον τύπο (3.12) προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια $E_{Δ(A)}$ σε ένα σημείο Α του βαρυτικού πεδίου είναι:

$$E_{Δ(A)} = mV_A \qquad (3.14)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σημείο αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια $E_Δ$ και το δυναμικό είναι μηδέν. Ως τέτοιο σημείο επιλέγουμε ένα σημείο στην επιφάνεια της γης. Τότε σε μικρό ύψος h από την επιφάνεια της γης η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό θα είναι αντίστοιχα:

$$E_Δ = mgh$$

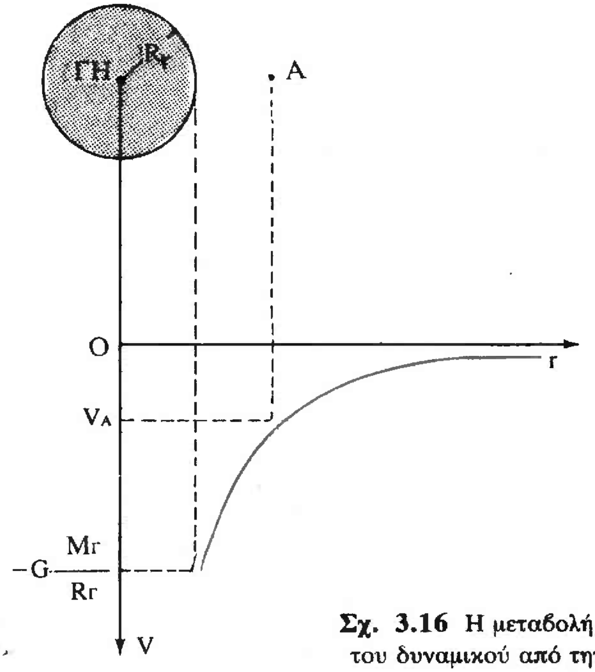
και $$V = \frac{E_Δ}{m}$$

ή $$V = gh$$

Η επιλογή του σημείου για το οποίο δεχόμαστε ότι η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό είναι μηδέν, εξαρτάται από το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε. Έτσι για κινήσεις που γίνονται κοντά στην επιφάνεια της γης, δεχόμαστε ότι η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό είναι μηδέν στην επιφάνειά της.

Στην περίπτωση που μελετάμε τις κινήσεις δορυφόρων, πυραύλων κ.τ.λ., που γίνονται σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις από τη γη, τότε η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό θεωρούνται μηδέν στο άπειρο. Όπως φαίνεται από τους τύπους (3.13) και (3.14) η δυναμική ενέργεια και το δυναμικό έχουν αρνητική τιμή στο βαρυτικό πεδίο της γης. Η φυσική σημασία του γεγονότος αυτού είναι ότι για τη μεταφορά ενός σώματος εκτός του πεδίου απαιτείται προσφορά ενέργειας σ' αυτό.

Το δυναμικό όπως ορίστηκε μας δίνει τη δυνατότητα να περιγράψουμε ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων αντιστοιχίζοντας σε κάθε σημείο του ένα μόνο αριθμό, την τιμή του δυναμικού, που όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.13) είναι ανεξάρτητο από το υπόθεμα που τυχόν υπάρχει στο θεωρούμενο σημείο. Στο σχ. 3.16 απεικονίζεται η μεταβολή του δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση από τη γη.



Σχ. 3.16 Η μεταβολή του δυναμικού από την επιφάνεια της γης μέχρι το άπειρο.

Όπως φαίνεται από το σχήμα το δυναμικό σε άπειρη απόσταση είναι μηδέν, ενώ όσο πλησιάζουμε προς τη γη ελαττώνεται για να πάρει στην επιφάνειά της την τιμή $-G\frac{M_Γ}{R_Γ}$.

Λόγω της έλξης της γης ένα σώμα που αφήνεται ελεύθερο μέσα στο βαρυτικό της πεδίο κινείται προς την επιφάνειά της, δηλαδή κινείται από υψηλότερη προς χαμηλότερη δυναμική ενέργεια. Αυτό είναι ένα γενικότερο συμπέρασμα

που ισχύει για τα συντηρητικά πεδία. Π.χ. στο ηλεκτροστατικό πεδίο υπόθεμα κινείται από σημεία υψηλότερης προς σημεία χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας.

Οι έννοιες διαφορά δυναμικού και δυναμικό μελετήθηκαν μόνο για το βαρυτικό και το ηλεκτροστατικό πεδίο. Έχουν άραγε νόημα και για το μαγνητικό πεδίο; Για την περίπτωση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται γύρω από ρευματοφόρο αγωγό, η απάντηση είναι όχι, γιατί ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο είναι μη συντηρητικό.

Τέλος, για το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται σε φυσικούς μαγνήτες, παρόλο που είναι συντηρητικό πεδίο, οι έννοιες διαφορά δυναμικού και δυναμικό δε χρησιμοποιούνται στην πράξη.

3.10. Μαγνητικό πεδίο

Στα πεδία δυνάμεων ανήκει και το μαγνητικό πεδίο. Η δημιουργία του αποδόθηκε αρχικά σε ένα υποθετικό φυσικό μέγεθος, που ονομάστηκε ποσότητα μαγνητισμού m και στην οποία αποδόθηκαν ελκτικές και απωστικές ιδιότητες όπως και στο ηλεκτρικό φορτίο.

Η ανάγκη περιγραφής του μαγνητικού πεδίου οδήγησε στην εισαγωγή ενός νέου διανυσματικού μεγέθους, της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$, η οποία αρχικά ορίστηκε σε αναλογία με την ένταση του ηλεκτροστατικού και του βαρυτικού πεδίου. Έτσι σε ένα σημείο Α του μαγνητικού πεδίου, η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}_A$ είναι

$$\vec{B}_A = \frac{\vec{F}}{m},$$

όπου $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται στη μαγνητική ποσότητα m που φέρνουμε στο σημείο Α.

Τα διανυσματικά χαρακτηριστικά της μαγνητικής επαγωγής (διεύθυνση και φορά), καθορίζονται κατά σύμβαση από αυτά της δύναμης που ασκείται σε βόρεια μαγνητική ποσότητα που φέρνεται στο θεωρούμενο σημείο.

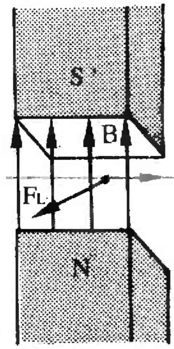
Σήμερα δεχόμαστε ότι και στους φυσικούς ή τεχνητούς μαγνήτες το μαγνητικό πεδίο οφείλεται στα κλειστά ρεύματα που δημιουργούνται από την κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες. Έτσι μετά από τη νέα αντίληψη που επικράτησε, όσον αφορά την προέλευση του μαγνητικού πεδίου η ιδέα της μαγνητικής ποσότητας εγκαταλείφτηκε.

Μπορούμε να ορίσουμε τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη μαγνητική ποσότητα με βάση το πειραματικό γεγονός της δύναμης Laplace. Γνωρίζουμε ότι σε ένα ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα σε

ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις μαγνητικές του γραμμές ασκείται δύναμη $\vec{F}_L$ που έχει μέτρο

$$F_L = IBl \qquad (3.15)$$

όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό, l το μήκος του αγωγού που βρίσκεται μέσα στο πεδίο και B η μαγνητική επαγωγή του πεδίου.



Σχ. 3.17

Από την (3.15) λύνοντας ως προς B παίρνουμε την εξίσωση

$$B = \frac{F_L}{Il} \qquad (3.16)$$

η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν η εξίσωση ορισμού της μαγνητικής επαγωγής.

Στην παράγραφο 4.8 που θα μελετήσουμε την κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο θα δούμε ότι το $\vec{B}$ μπορεί να δοθεί και σε συναρτηση με το ηλεκτρικό φορτίο.

Τα χαρακτηριστικά των τριών πεδίων που αναφέραμε συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

όνομα πεδίου	πηγή προέλευσης	Χαρακτηριστικά μεγέθη και μονάδες		
Βαρυτικό	μάζα (m)	F N	$g=\frac{F}{m}$ $\frac{N}{kgr}$	$V=\frac{W}{m}$ $\frac{Joule}{kgr}$
Ηλεκτροστατικό	ηλεκτρικό φορτίο (q)	F N	$\mathcal{E}=\frac{F}{q}$ $\frac{N}{Cb}$	$V=\frac{W}{q}$ $\frac{Joule}{Cb}$
Μαγνητικό	κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο	F N	$B=\frac{F}{Il}$ Tesla	— — —

Είναι σημαντικό να τονίσουμε, ότι τελικά και το ηλεκτροστατικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν σαν πηγή προέλευσης το ηλεκτρικό φορτίο. Πράγματι ένα ακίνητο ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί γύρω του ηλεκτροστατικό πεδίο. Αν όμως το φορτίο κινηθεί (ρεύμα), το ηλεκτροστατικό πεδίο μεταβάλλεται και η μεταβολή αυτή συνοδεύεται με τη δημιουργία ενός καινούργιου πεδίου δυνάμεων, δηλαδή του μαγνητικού.

4
Κινήσεις σε πεδία δυνάμεων

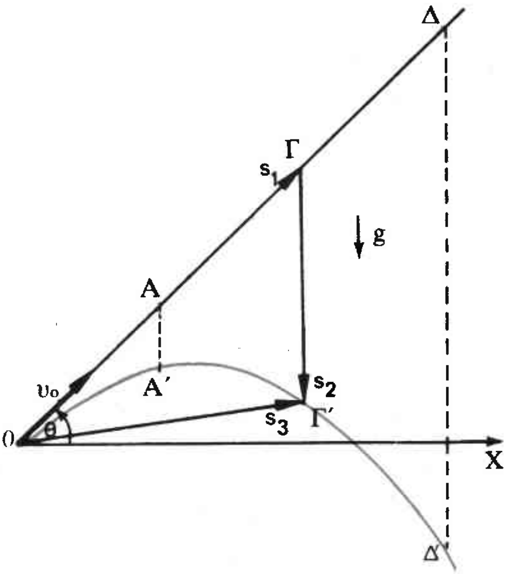
Κίνηση σε βαρυτικό πεδίο

4.1. Πλάγια βολή στο κενό

Από ένα σημείο Ο του εδάφους ρίχνουμε προς τα πάνω ένα μικρό σώμα, έτσι ώστε η αρχική του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ να σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ, σχ. 4.1.

Κατά τη μελέτη της κίνησης θα παραλείψουμε την αντίσταση του αέρα, δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται στο κενό, οπότε η μοναδική δύναμη που δρα στο σώμα είναι το βάρος $B = mg$. Επί πλέον, αν η κίνηση του σώματος γίνεται σε μικρή περιοχή, μπορούμε με καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι το βαρυτικό πεδίο είναι ομογενές με αποτέλεσμα σε όλη τη διαδρομή το βάρος του σώματος να είναι σταθερό.

Η κίνηση αυτή που κάνει το σώμα είναι γνωστή σαν **πλάγια βολή** στο κενό και, σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν το αποτέλεσμα της σύνθεσης δυο ανεξάρτητων μεταξύ τους κινήσεων: μιας ευθύγραμμης ομαλής πάνω στη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_o$ και μιας ελεύθερης πτώσης με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$.



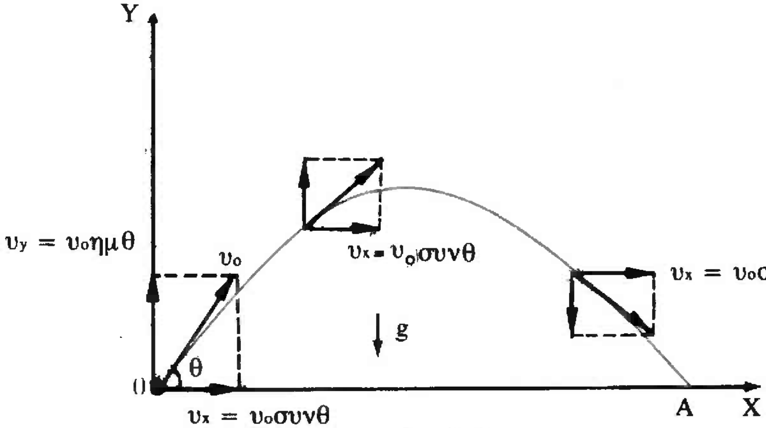
Σχ. 4.1

Η τροχιά που διαγράφει το σώμα βρίσκεται ως εξής: Αν δεν υπήρχε το βάρος, το σώμα στο τέλος του 1ου, 2ου, 3ου ... δευτερολέπτου θα έφτανε αντίστοιχα στα σημεία Α, Γ, Δ, ... διανύοντας ίσα διαστήματα σε κάθε δευτερόλεπτο, σχ. 4.1. Εξάλλου, αν δεν υπήρχε η αρχική ταχύτητα, το σώμα θα έπεφτε ελεύθερα με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$ και στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου θα διάνυε διάστημα $AA' = \frac{1}{2}g1^2 = \delta$. Στη διάρκεια των δυο πρώτων δευτερολέπτων το διάστημα θα ήταν $\Gamma\Gamma' = \frac{1}{2}g2^2 = 4\delta$, στη διάρκεια των τριών δευτερολέπτων το διάστημα θα ήταν $\Delta\Delta' = 9\delta$ κ.τ.λ.

Το σώμα όμως εκτελεί ταυτόχρονα και τις δυο κινήσεις. Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, η θέση του κάθε στιγμή θα είναι το άκρο του διανύσματος $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, όπου $\vec{s}_1$ και $\vec{s}_2$ τα διανύσματα των μετατοπίσεων για κάθε μια κίνηση χωριστά. Έτσι στο τέλος του πρώτου δευτερολέπτου, αν τα διανύσματα των μετατοπίσεων είναι $\vec{s}_\alpha$ και $\vec{s}_\beta$ αντίστοιχα, το σώμα θα βρίσκεται στη θέση Α΄, σχ. 4.1. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τη θέση του σώματος στο τέλος του δεύτερου και τρίτου δευτερολέπτου που είναι τα σημεία Γ΄ και Δ΄, κ.ο.κ.

Αν όλα τα σημεία που βρίσκονται μ' αυτό τον τρόπο ενωθούν με συνεχή γραμμή, παίρνουμε την τροχιά που διαγράφει το σώμα. Η τροχιά αυτή βρίσκεται πάνω σ' ένα κατακόρυφο επίπεδο και αποδεικνύεται ότι είναι μια **παραβολή***.

Τώρα που γνωρίζουμε τη μορφή της τροχιάς, γεννιέται το ερώτημα. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή; Ή διαφορετικά ποιες είναι οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση στην πλάγια βολή;



Σχ. 4.2

Για να δώσουμε απάντηση θα μελετήσουμε την πλάγια βολή που εικονίζεται στο σχήμα 4.2. Στο επίπεδο της τροχιάς παίρνουμε δυο ορθογώνιους άξονες x και y σαν σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο 0. Αναλύουμε την ταχύτητα $υ_ο$ σε δυο συνιστώσες $υ_x = υ_ο συνθ$ και $υ_y = υ_ο ημθ$. Με τον τρόπο αυτό και η κίνηση αναλύεται σε δυο κινήσεις: μια οριζόντια πάνω στον άξονα x με αρχική ταχύτητα $υ_ο συνθ$ και μια κατακόρυφη πάνω στον άξονα ψ με αρχική ταχύτητα $υ_ο ημθ$.

Οριζόντια κίνηση:

Όσο χρόνο το σώμα κινείται πάνω στην παραβολική τροχιά του, δε δέχεται καμιά δύναμη κατά τον άξονα x. Έτσι η κίνηση πάνω σ' αυτόν τον άξονα γίνε-

---

* Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.11 της παραγράφου 3.6, το βαρυτικό πεδίο της γης είναι ακτινικό με αποτέλεσμα η διεύθυνση του βάρους να μεταβάλλεται. Για το λόγο αυτό η ακριβής τροχιά δεν είναι παραβολή αλλά, όπως μπορεί να αποδειχθεί, τμήμα έλλειψης, το οποίο για μικρές βολές μπορεί να ληφθεί σαν παραβολή. Σε μεγάλες βολές, όπως οι διηπειρωτικές δεν μπορούμε να μιλάμε για παραβολική τροχιά, αφού τότε η απόκλιση αυτής από την πραγματική ελλειπτική τροχιά είναι μεγάλη.

ται με σταθερή ταχύτητα $υ_oσυνθ$ και η αντίστοιχη μετατόπιση σε χρόνο t θα είναι $s_x = υ_oσυνθt$.

Αν Α είναι το σημείο που το σώμα συναντάει το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Ο, τότε η απόσταση ΟΑ ονομάζεται **βεληνεκές**.

Κατακόρυφη κίνηση:

Η σταθερή δύναμη Β = mg που δρα στο σώμα κατά τον άξονα y, έχει φορά αντίθετη από τη φορά της ταχύτητας $υ_y = υ_oημθ$ και κατά συνέπεια θα προσδίδει στο σώμα σταθερή επιβράδυνση $\vec{g}$. Δηλαδή πρόκειται για μία ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, όπου η ταχύτητα και η μετατόπιση κατά τον άξονα y θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$υ_y = υ_oημθ - gt \quad \text{και} \quad s_y = υ_oημθt - \frac{1}{2}gt^2$$

Τα χαρακτηριστικά της πλάγιας βολής που περιγράψαμε συνοψίζονται στον πίνακα που ακολουθεί

ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ ΣΤΟ ΚΕΝΟ

Άξονας x	Άξονας y
$F_x=0$ $γ_x=0$ κίνηση ομαλή $υ_x=υ_oσυνθ$ (1) $s_x=υ_oσυνθt$ (2)	$F_y=-B=-mg$ $γ_y=-g$ κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη $υ_y=υ_oημθ-gt$ (3) $s_y=υ_oημθt-\frac{1}{2}gt^2$ (4)

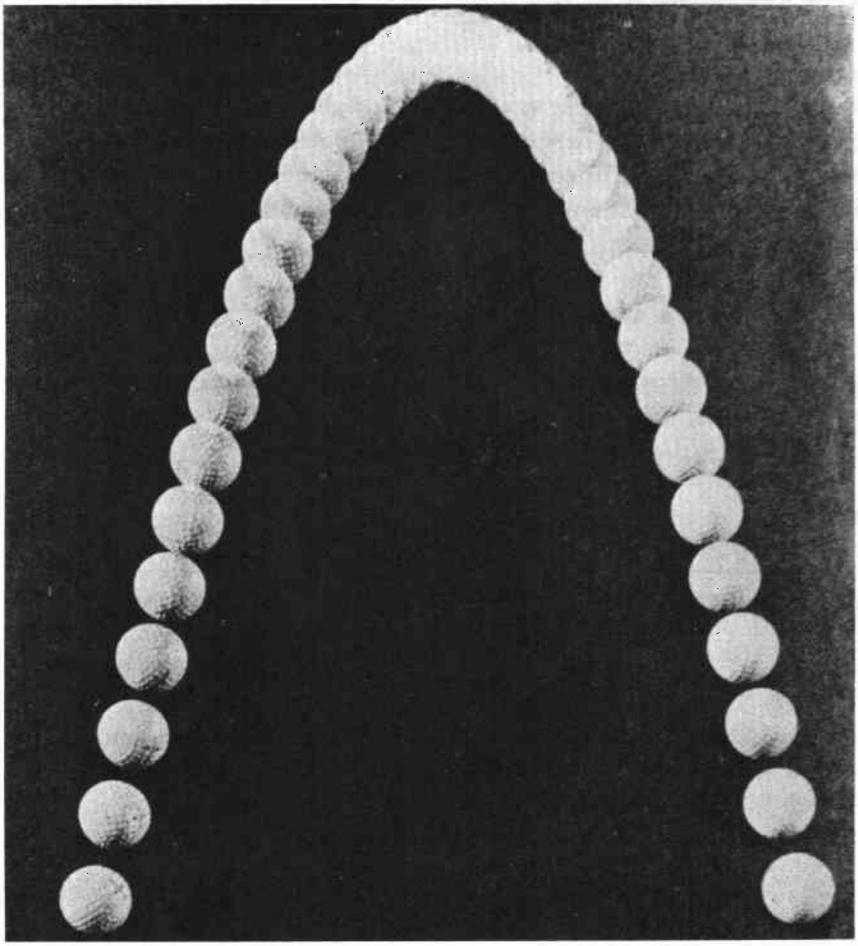
Είναι χρήσιμο να επισημάνουμε τα εξής:

▶ Για κάθε θέση πάνω στην παραβολική τροχιά, η ταχύτητα του σώματος θα είναι

$$\vec{υ} = \vec{υ}_x+\vec{υ}_y$$

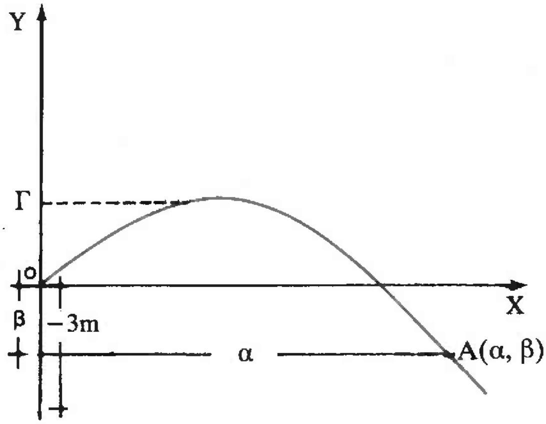
$$\text{ή} \quad υ = \sqrt{υ_x^2 + υ_y^2}$$

▶ Η εξίσωση (4) δίνει τη μετατόπιση s_y, που είναι η απομάκρυνση του σώματος από την αρχή Ο κατά τον άξονα των y και όχι το διάστημα που διανύει το σώμα σ' αυτόν τον άξονα. Έτσι, για παράδειγμα, αν βρούμε σε κάποιο



Οι διαδοχικές θέσεις της σφαίρας στη φωτογραφία αντιστοιχούν σε ίσα μικρά χρονικά διαστήματα. Παρατηρείστε την ελάττωση και την αύξηση της ταχύτητας της σφαίρας κατά την άνοδο και την κάθοδο αντίστοιχα. Η φωτογραφία είναι από το βιβλίο PSSC Physics, 3η έκδοση 1971.

πρόβλημα $s_y = -3m$, αυτό σημαίνει ότι το σώμα βρίσκεται κάτω από το Ο σε απόσταση 3m. Το διάστημα όμως που συνολικά έχει διανύσει το σώμα, κατά τον άξονα y, είναι (ΟΓ+ΓΟ+3)m, σχ. 4.3.



Σχ. 4.3

▶ Από τις εξισώσεις που δίνουν τα s_x και s_y μπορούμε να βρούμε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει σ' ένα σημείο της τροχιάς του. Έτσι, για παράδειγμα, ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο σημείο Α(α,β), σχ. 4.3, βρίσκεται αν θέσουμε $s_x=\alpha$ ή αν θέσουμε $s_y=\beta$, όπου το β στο συγκεκριμένο σχήμα είναι αρνητικό.

Παράδειγμα

Από την άκρη της στέγης ενός κτηρίου ύψους Η ρίχνουμε μια πέτρα με ταχύτητα υ_o, η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο βολής Ο (σχ. 1) και ζητάμε να βρούμε:

α) Την εξίσωση της τροχιάς.

β) Το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει η πέτρα στα σημεία Α και Γ.

γ) Το μέγιστο ύψος h_μ και το βεληνεκές ΟΑ.

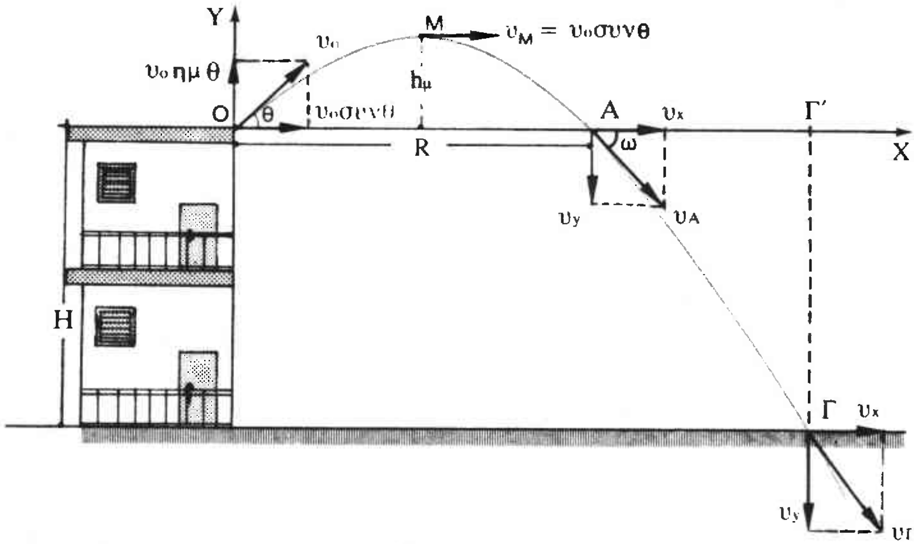
δ) Την ταχύτητα στα σημεία Α και Γ.

ε) Τη γωνία ω που σχηματίζει η ταχύτητα υ_A με τον άξονα x στο σημείο Α.

Λύση

α) Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση είναι:

$$s_x = x = \upsilon_o συνθ t \quad (1) \qquad και \qquad s_y = y = \upsilon_o ημθ t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$



Σχ. α

Απαλείφοντας το χρόνο t ανάμεσα σ' αυτές τις δυο εξισώσεις βρίσκουμε τελικά

$$y = εφθx - \frac{g}{2υ_0^2συν^2θ}x^2 \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι συνάρτηση δεύτερου βαθμού ανάμεσα στις συντεταγμένες x και y της οποιασδήποτε θέσης και ονομάζεται **εξίσωση της τροχιάς.**

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι x=OA και y=0. Έτσι, αν στην εξίσωση (2) θέσουμε y=0 βρίσκουμε

$$t_1=0 \qquad και \qquad t_2=\frac{2υ_0}{g}ημθ \qquad (4)$$

Η εξίσωση (4) δίνει το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει η πέτρα στο σημείο Α, ενώ t_1 είναι η χρονική στιγμή που η πέτρα βρίσκεται στο σημείο Ο.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι x=ΟΓ′ και y=−H. Αν στη σχέση (2) που δίνει τη μετατόπιση κατά τον άξονα y, θέσουμε y=−H, παίρνουμε την εξίσωση

$$-H = υ_0ημθt - \frac{1}{2}gt^2$$

που από τη λύση της βρίσκουμε δυο τιμές για το χρόνο:

$$t_1=\frac{υ_0ημθ+\sqrt{υ_0^2ημ^2θ+2Hg}}{g}$$

$$και\ t_2=\frac{υ_0ημθ-\sqrt{υ_0^2ημ^2θ+2Hg}}{g}$$

Η πρώτη τιμή δίνει το χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει η πέτρα στο Γ, ενώ η δεύτερη απορρίπτεται σαν αρνητική.

γ) Όταν η πέτρα φτάνει στο ανώτερο σημείο Μ της τροχιάς, η κατακόρυφη συ-

νιστώσα $υ_ψ$ της ταχύτητάς της γίνεται μηδέν (σχ. α). Αυτό συμβαίνει μετά από χρόνο t, που βρίσκεται από τη σχέση $υ_y = υ_o ημθ - gt$, για $υ_ψ = 0$. Έτσι

$$0 = υ_o ημθ - gt \Rightarrow t = \frac{υ_o ημθ}{g}$$

Για να βρούμε το μέγιστο ύψος $h_μ$, θέτουμε στην εξίσωση (2) $t = \frac{υ_o ημθ}{g}$ και έχουμε:

$$y = h_μ = υ_o ημθ \frac{υ_o ημθ}{g} - \frac{1}{2} g \frac{υ_o^2 ημ^2 θ}{g^2} \Rightarrow$$

$$h_μ = \frac{υ_o^2}{2g} ημ^2 θ \quad \text{(μέγιστο ύψος πλάγιας βολής)}$$

Το βεληνεκές ΟΑ βρίσκεται από την εξίσωση (1), αν θέσουμε όπου t την τιμή του από την εξίσωση (4).

Έτσι

$$x = OA = υ_o συνθ \frac{2υ_o}{g} ημθ \Rightarrow$$

$$OA = \frac{υ_o^2}{g} ημ2θ \quad \text{(βεληνεκές)}$$

Παρατήρηση. Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει, ότι το βεληνεκές είναι μέγιστο, όταν ημ2θ=μέγιστο, δηλαδή ημ2θ=1, οπότε

$$θ = 45^\circ \quad (υ_o = \text{σταθερή})$$

Για συμπληρωματικές γωνίες βολής το βεληνεκές είναι το ίδιο. Πράγματι αν $θ_1 = 30^\circ$ και $θ_2 = 60^\circ$, έχουμε:

$$OA_1 = OA_2 = \frac{υ_0^2}{g} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{γιατί } ημ2θ_1 = ημ2θ_2$$

δ) Η ταχύτητα στα σημεία Α και Γ βρίσκεται από τη σχέση

$$υ = \sqrt{υ_x^2 + υ_y^2} \qquad (5)$$

Επειδή όμως οι ταχύτητες $υ_x$ και $υ_y$ είναι συναρτήσεις του χρόνου, που πολλές φορές είναι άγνωστος, συνήθως για τον υπολογισμό της ταχύτητας αντί της σχέσης (5) εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Στην προκειμένη περίπτωση ας υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο Α με τη σχέση $υ_A = \sqrt{υ_x^2 + υ_y^2}$ και για την ταχύτητα στο σημείο Γ, ας εφαρμόσουμε το εν λόγω θεώρημα. Έτσι:

$$υ_A = \sqrt{υ_x^2 + υ_y^2} = \sqrt{υ_o^2 συν^2 θ + (υ_o ημθ - gt)^2}, \text{ όπου}$$

$$t = \frac{2υ_o}{g} ημθ \quad \text{και τελικά} \quad υ_A = υ_o$$

Για την ταχύτητα στο σημείο Γ το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας γράφεται:

$$\frac{mυ_o^2}{2} + mgH = \frac{mυ_Γ^2}{2} \Rightarrow υ_Γ = \sqrt{υ_o^2 + 2gH}$$

ε) Η γωνία ω υπολογίζεται εύκολα από τις σχέσεις

$$συνω=\frac{υ_x}{υ_A} \quad ή \quad εφω=\frac{υ_y}{υ_x}$$

Έτσι

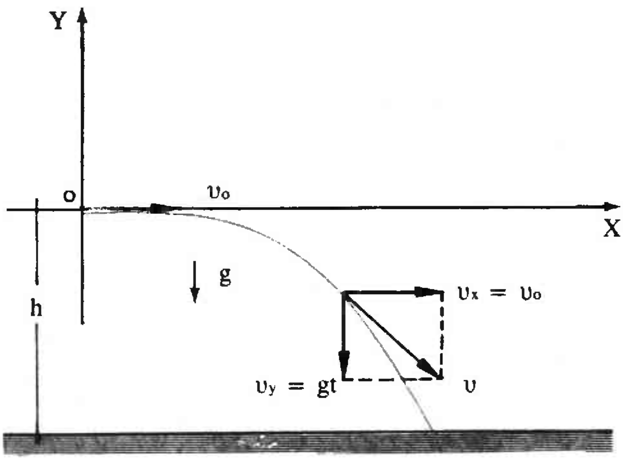
$$συνω=\frac{υ_x}{υ_A}=\frac{υ_0 συνθ}{υ_0}=συνθ \Rightarrow ω=θ$$

4.2. Μερικές περιπτώσεις βολής στο κενό

α. Οριζόντια βολή

Από ένα σημείο Ο, που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, ρίχνουμε ένα σώμα με αρχική ταχύτητα $\vec{υ}_0$, που σχηματίζει γωνία μηδέν με το οριζόντιο επίπεδο, σχ. 4.4. Λέμε τότε, ότι το σώμα κάνει **οριζόντια βολή.**

Υποθέτουμε, όπως και στην πλάγια βολή, ότι η κίνηση γίνεται στο κενό και σε μικρή περιοχή.



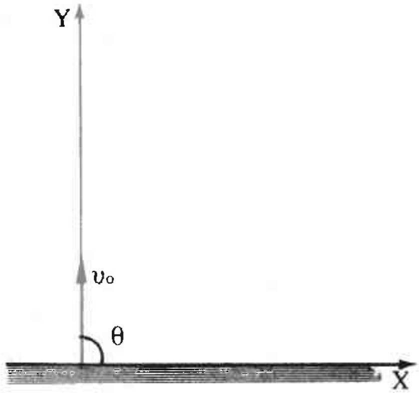
Σχ. 4.4

Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων μπορούμε να θεωρήσουμε την κίνηση του σώματος σαν τη συνισταμένη δυο απλών κινήσεων. Μιας ευθύγραμμης ομαλής κατά τη διεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα $υ_0$ και μιας ελεύθερης πτώσης με σταθερή επιτάχυνση g. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε την τροχιά που διαγράφει το σώμα η οποία βρίσκεται ότι είναι παραβολή. Από τις εξισώσεις του πίνακα της παραγράφου 4.1. προκύπτουν οι εξισώ-

σεις της οριζόντιας βολής, αν θέσουμε $\theta = 0$, και λάβουμε υπόψη ότι $s_y < 0$

β. Κατακόρυφη βολή

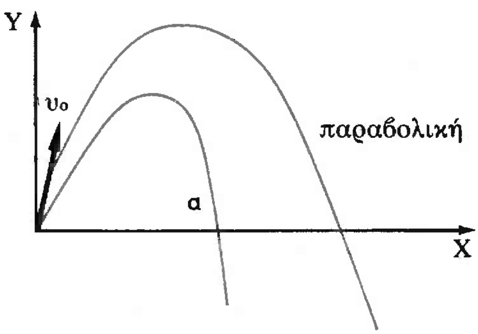
Αν ρίξουμε το σώμα προς τα πάνω, ώστε η αρχική του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ να σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\theta = 90^o$, λέμε ότι το σώμα κάνει κατακόρυφη βολή, σχ. 4.5. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κατακόρυφη βολή προκύπτουν από τις αντίστοιχες της πλάγιας βολής αν θέσουμε τη γωνία $\theta = 90^o$.



Σχ. 4.5

4.3. Βολή στον αέρα

Η μελέτη που κάναμε για την πλάγια, οριζόντια και κατακόρυφη βολή έγινε με την προϋπόθεση ότι το σώμα κινείται στο κενό. Στην πράξη όμως οι βολές γίνονται μέσα στον αέρα και επομένως εκτός του βάρους υπάρχει και η αντίσταση του αέρα, που είναι μια δύναμη με φορά αντίθετη της ταχύτητας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το σώμα, αντί της παραβολικής, να διαγράφει μια άλλη τροχιά, καμπύλη (α) σχ. 4.6.



Σχ. 4.6

Το βεληνεκές είναι μικρότερο και το σώμα κατέρχεται απότομα στην καμπύλη (α).

Παράδειγμα

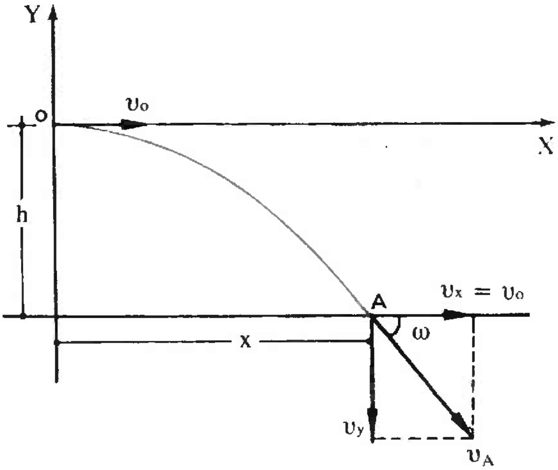
Από ένα σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $h = 1{,}5m$ από το έδαφος, ρίχνεται οριζόντια μια μικρή σφαίρα. Όταν η σφαίρα φτάσει στο έδαφος έχει οριζόντια απομάκρυνση $x = 4m$.

α) Πόσο χρόνο κινήθηκε η σφαίρα;

β) Με πόση ταχύτητα υ_o εκσφενδονίστηκε;

γ) Με ποια ταχύτητα και ποια γωνία έφτασε στο έδαφος;

δ) Ποια θα είναι η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, αν εκσφεν-



δονιστεί από το ίδιο σημείο Ο και με την ίδια αρχική ταχύτητα $υ_o$ 1) κατακόρυφα προς τα πάνω 2) πλάγια προς τα πάνω υπό γωνία $θ=30°$ με το οριζόντιο επίπεδο. Τι συμπέρασμα βγάζετε; ($g=10m/sec^2$).

Λύση

α) Από την εξίσωση $s_y=-h=-\frac{1}{2}gt^2$, που δίνει την κατακόρυφη απομάκρυνση, βρίσκουμε για το χρόνο κίνησης της σφαίρας: $t=\sqrt{2h/g}$ και με αντικατάσταση $t=0{,}55$ sec.

β) Στο χρόνο $t=0{,}55$ sec, που διαρκεί η ελεύθερη πτώση, η σφαίρα μετακινείται οριζόντια κατά διάστημα $x=4m$. Έτσι $x=υ_ot$ και με αντικατάσταση $υ_o=7{,}3m/sec$.

γ) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{mυ_o^2}{2}+mgh=\frac{mυ_A^2}{2}\Rightarrow υ_A=\sqrt{υ_o^2+2gh}$$

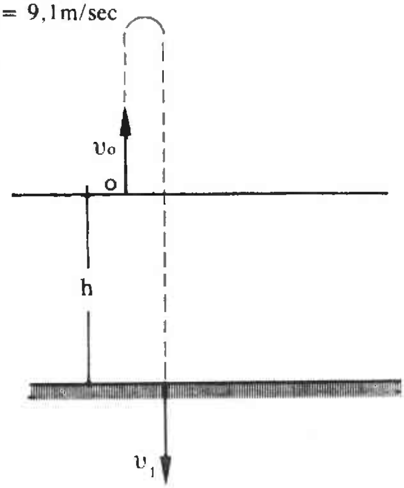
και με αντικατάσταση $υ_A=9{,}1m/sec$

Παρατήρηση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $υ_A=\sqrt{υ_x^2+υ_y^2}$. Πράγματι με αντικατάσταση παίρνουμε: $υ_A=\sqrt{υ_o^2+g^2t^2}=\sqrt{υ_o^2+g^2\frac{2h}{g}}=\sqrt{υ_o^2+2gh}=9{,}1m/sec$.

Για τη γωνία ω έχουμε

$$εφω=\frac{υ_y}{υ_x}=\frac{gt}{υ_o}=0{,}75\Rightarrow ω=36°50'$$

δ) 1. Η σφαίρα κάνει κατακόρυφη βολή και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $υ_1$. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

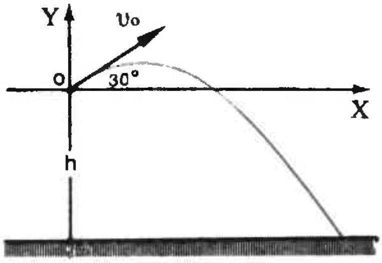


$$\frac{m\upsilon_o^2}{2}+mgh=\frac{m\upsilon_1^2}{2} \Rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\upsilon_o^2+2gh}$$ και με αντικατάσταση $\upsilon_1 = 9{,}1 m/sec$.

2. Η σφαίρα κάνει πλάγια βολή και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα υ_2. Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε:

$$\frac{m\upsilon_o^2}{2}+mgh=\frac{m\upsilon_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_o^2+2gh}=9{,}1 m/sec.$$



Το συμπέρασμα είναι ότι, αν ένα σώμα ρίχνεται με την ίδια ταχύτητα υ_o και από το ίδιο ύψος h, φτάνει στο έδαφος πάντα με ταχύτητα του ίδιου μέτρου ανεξάρτητα από τη γωνία βολής.

4.4. Ταχύτητα διαφυγής 1987

Γνωρίζουμε ότι αν ρίξουμε από την επιφάνεια της γης ένα σώμα προς τα πάνω και αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, το σώμα θα επιστρέψει πάλι σ' αυτή με την ίδια ταχύτητα.

Είναι δυνατό, ένα σώμα που θα ριχτεί από την επιφάνεια της γης να τήν εγκαταλείψει χωρίς να επιστρέψει; Όταν ένα σώμα κινηθεί μέσα στο συντηρητικό πεδίο βαρύτητας της γης, από ένα σημείο Α σ' ένα άλλο σημείο Β, η μηχανική του ενέργεια διατηρείται. Δηλαδή

$$E_{K(A)}+E_{\Delta(A)}=E_{K(B)}+E_{\Delta(B)}$$

$$\text{ή} \quad E_{\Delta(B)}-E_{\Delta(A)}=E_{K(A)}-E_{K(B)}$$

$$\text{ή} \quad m(V_B-V_A)=E_{K(A)}-E_{K(B)} \qquad (4.1)$$

(m: η μάζα του σώματος)

Αν το σημείο Α ληφθεί στην επιφάνεια της γης και το Β στο άπειρο, ζητείται να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία πρέπει να βληθεί το σώμα ώστε να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα. Δηλαδή ζητάμε την ελάχιστη ταχύτητα βολής ώστε το σώμα μόλις να διαφύγει από την έλξη της γης.

Αντικαθιστώντας στην (4.1) όπου: $V_B=0$, $V_A=-G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}$, $E_{K(A)}=\frac{1}{2}m\upsilon_A^2$ και $E_{K(B)}=0$ έχουμε:

$$mG\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}=\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 \Rightarrow \upsilon_A=\sqrt{2G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}}$$

Η ταχύτητα $υ_A$ ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής $υ_δ$ και με αντικατάσταση των τιμών βρίσκεται για το μέτρο της

$$υ_δ \simeq 11{,}2 \text{ km/sec}$$

Παρατηρούμε ότι η $υ_δ$ είναι ίδια για όλα τα σώματα ανεξάρτητα από τη μάζα τους. Πρέπει να σημειώσουμε ότι στον υπολογισμό της $υ_δ$ δε λάβαμε υπόψη την ατμοσφαιρική αντίσταση και την περιστροφή της γης περί τον άξονά της, που διαφοροποιούν την τιμή της.

1997

4.5. Δορυφόροι

Τις τρεις τελευταίες δεκαετίες ο άνθρωπος παρακολουθεί έναν έντονο συναγωνισμό για την εξερεύνηση και χρησιμοποίηση του εξωγήϊνου χώρου. Ο αγώνας δρόμου που διεξάγεται για την κατάκτηση του διαστήματος δεν είναι άμοιρος θετικών και αρνητικών επιδράσεων στη ζωή της ανθρωπότητας. Η μετεωρολογία, οι τηλεπικόινωνίες, η ιατρική, η μικροηλεκτρονική, οι φυσικοί πόροι είναι μερικοί από τους τομείς πάνω στους οποίους είχε ευεργετική επίδραση ο διαστημικός συναγωνισμός με αποτέλεσμα τη βελτίωση της ζωής στον πλανήτη μας και την αλληλοκατανόηση μεταξύ των λαών.

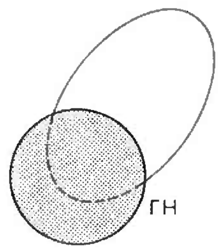
Αντίθετα η επέκταση του ανταγωνισμού των εξοπλισμών έξω από τη γη είναι η κυριώτερη αρνητική συνέπεια του δρόμου προς το διάστημα.

Οι δορυφόροι έπαιξαν πρωταρχικό ρόλο σ' αυτή την ανθρώπινη περιπέτεια, από το 1957 που εκτοξεύτηκε ο πρώτος δορυφόρος (Sputnik 1) μέχρι σήμερα που τα διαστημικά λεωφορεία (Columbia 1981) διασχίζουν τον εξωγήϊνο χώρο.

Οι γνωστοί νόμοι της μηχανικής: η αρχή της αδράνειας, η αρχή δράσης - αντίδρασης, ο θεμελειώδης νόμος $F=mγ$ και ο νόμος της παγκόσμιας έλξης αρκούν για να μελετήσουμε τα προβλήματα τα σχετικά με την κίνηση των δορυφόρων.

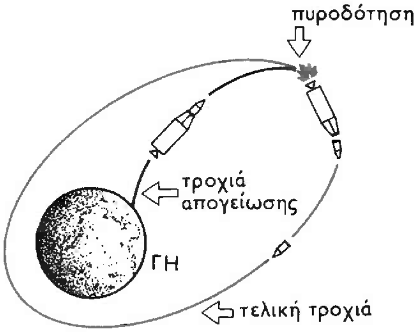
Ένα σώμα που εκτοξεύεται από τη γη με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής $υ_δ = 11{,}2$km/sec, με οποιαδήποτε γωνία και αν εκτοξευθεί, διαγράφει τμήμα έλλειψης και επιστρέφει πάλι σαυτή, σχ. 4.7. Επίσης ένα σώμα που θα εκτοξευόταν με ταχύτητα μεγαλύτερη ή ίση με την $υ_δ$ θα διέφευγε για πάντα από τη γη ακολουθώντας αντίστοιχα μια υπερβολική, ή παραβολική τροχιά.

Γεννιέται λοιπόν το ερώτημα με ποιο τρόπο μπορούμε να θέσουμε ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη γη;



Σχ. 4.7

Για να προωθήσουμε ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη γη (δορυφόρος) πρέπει να υπάρχει τρόπος αλλαγής της ελλειπτικής τροχιάς του σχήματος 4.7 που τέμνει τη γη. Ο απλούστερος τρόπος για να κατορθώσουμε αυτό δείχνεται στο σχ. 4.8.



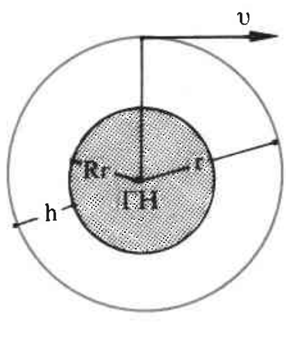
Σχ. 4.8

Εδώ η φάση της απογείωσης είναι ίδια, όπως εκείνη του σχ. 4.7., αλλά καθώς ο πύραυλος - φορέας του δορυφόρου φθάνει στο ψηλότερο σημείο κατά την απογείωση, η μηχανή του πυραύλου πυροδοτείται κατάλληλα και η ταχύτητα, που προστίθεται έτσι, μεταβάλλει την τροχιά, ενώ ο δορυφόρος αποχωρίζεται από τον πύραυλο και ξεκινάει μια νέα ελλειπτική τροχιά γύρω από τη γη. Οι ακριβείς διαστάσεις της ελλειπτικής τροχιάς περί τη γη καθορίζονται από τη θέση και την ταχύτητα του πυραύλου - φορέα κατά την πυροδότηση, όσο και από τη διάρκεια της πυροδότησης.

Στην πράξη αν η τροχιά του δορυφόρου γύρω από τη γη δεν είναι ακριβώς η επιθυμητή, συνεχείς σύντομες πυροδοτήσεις, από βοηθητικούς πυραύλους που διαθέτει ο δορυφόρος, παρέχουν τις αναγκαίες διορθώσεις για να έχουμε την τροχιά που θέλουμε. Επειδή ο πύραυλος - φορέας έχει μεγάλο βάρος - της τάξης των 1000ton - και από το βάρος αυτό το μεγαλύτερο μέρος είναι τα καύσιμα (υγρό υδρογόνο και οξυγόνο), γι' αυτό οι πύραυλοι είναι δυο - τριών ορόφων και η διαδικασία της απογείωσης γίνεται κατά στάδια. Δηλαδή όταν εξαντλούνται τα καύσιμα κάθε ορόφου αυτός απορρίπτεται και συνεχίζει ο υπόλοιπος πύραυλος.

Ας μελετήσουμε το εξής απλό πρόβλημα κίνησης δορυφόρου. Ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά περί τη γη, σε ύψος h σχ. 4.9, και ζητείται η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, την οποία έχει καθώς και η περίοδος της κίνησής του.

Η μόνη δύναμη που ενεργεί στο δορυφόρο είναι το βάρος του B=mg, που ισούται με την κεντρομόλο δύναμη F_κ την αναγκαία για να διατηρείται ο δορυφόρος στην κυκλική τροχιά. Επομένως



Σχ. 4.9

$$B = F_\kappa$$

$$\text{ή} \quad mg = \frac{m\upsilon^2}{r}$$

$$\text{ή} \quad G\frac{M_\Gamma m}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} \quad (4.2),$$

από την οποία παίρνουμε τελικά

$$\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \tag{4.3}$$

όπου M_Γ η μάζα της γης.

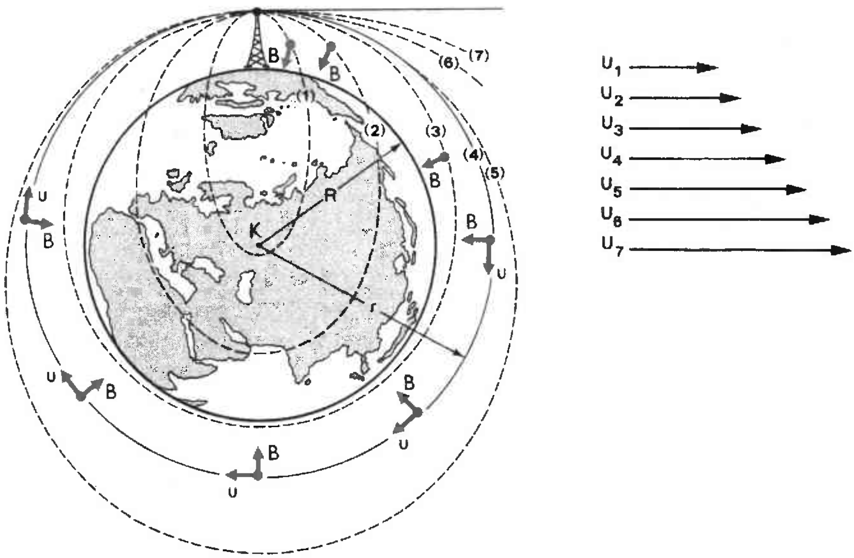
Η περίοδος T της κυκλικής κίνησης του δορυφόρου βρίσκεται από τον τύπο

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{\upsilon}}$$

$$\text{ή} \qquad T = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM_\Gamma / r}} = \frac{2\pi\sqrt{r^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}}$$

$$\text{ή} \qquad T = \frac{2\pi\sqrt{(R_\Gamma + h)^3}}{\sqrt{GM_\Gamma}} \tag{4.4}$$

Από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) φαίνεται ότι όσο πιο ψηλά βρίσκεται ο δορυφόρος, τόσο πιο μικρή είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται και τόσο μεγαλύτερη η περίοδος της κίνησής του.



Σχ. 4.10

Οι τροχιές ενός δορυφόρου για διαφορετικές τιμές αρχικής ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_7$. (Μόνο για κυκλικές τροχιές τα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{g}$ είναι κάθετα μεταξύ τους).

Συνθήκες έλλειψης βαρύτητας

Συνήθως λέγεται ότι μέσα στα διαστημικά οχήματα που περιφέρονται γύρω από τη γη επικρατούν «συνθήκες έλλειψης βαρύτητας». Η έκφραση αυτή οδηγεί πολλές φορές στη λαθεμένη εντύπωση, ότι μέσα στους δορυφόρους τα σώματα και επομένως και οι αστροναύτες δεν έχουν βάρος, δηλαδή δεν έλκονται από τη γη. Αλλά ας εξετάσουμε τι ακριβώς συμβαίνει, ή διαφορετικά τι ακριβώς σημαίνει η έκφραση «συνθήκες έλλειψης βαρύτητας».

Ο δορυφόρος και όλα τα σώματα που βρίσκονται μέσα σαυτόν, κινούνται με κεντρομόλο επιτάχυνση $\gamma_\kappa = g$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος της τροχιάς. Αν λοιπόν θεωρήσουμε μέσα στο δορυφόρο έναν αστροναύτη, αυτός θα δέχεται την έλξη $\vec{B}$ από τη γη και την αντίδραση $\vec{A}$ από το δάπεδο. Αλλά τότε θα πρέπει $B - A = m\gamma_\kappa$ ή $mg - A = mg \Rightarrow A = 0$. Δηλαδή το δάπεδο δεν ασκεί στον αστροναύτη καμιά δύναμη και αυτό φαίνεται ως έλλειψη βαρύτητας.

Παράδειγμα

Σύγχρονος δορυφόρος της γης είναι εκείνος που βρίσκεται συνεχώς πάνω από το ίδιο σημείο του ισημερινού. Σε ποια απόσταση από το κέντρο της γης πρέπει να βρίσκεται ένας τέτοιος δορυφόρος;

Δίνεται η μάζα της γης $M_\Gamma = 5{,}98 \cdot 10^{24}$kgr και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m²Kgr⁻².

Λύση

Γενικά ένας δορυφόρος κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους του το οποίο θα παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή θα ισχύει

$$B = F_\kappa,$$

$$\text{ή} \quad G\frac{M_\Gamma m}{h^2} = \frac{m\upsilon^2}{h} \quad (1). \text{ (h η ζητούμενη απόσταση)}$$

Αλλά $\upsilon = \dfrac{2\pi h}{T}$ και η σχέση (1) γράφεται

$$G\frac{M_\Gamma}{h} = \frac{4\pi^2 h^2}{T^2} \Rightarrow \quad h^3 = G\frac{M_\Gamma}{4\pi^2}T^2 \qquad (2)$$

Για να είναι ένας δορυφόρος σύγχρονος πρέπει η περίοδός του να είναι ίση με την περίοδο περιστροφής της γης, δηλαδή T=24 ώρες.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση (2) παίρνουμε:

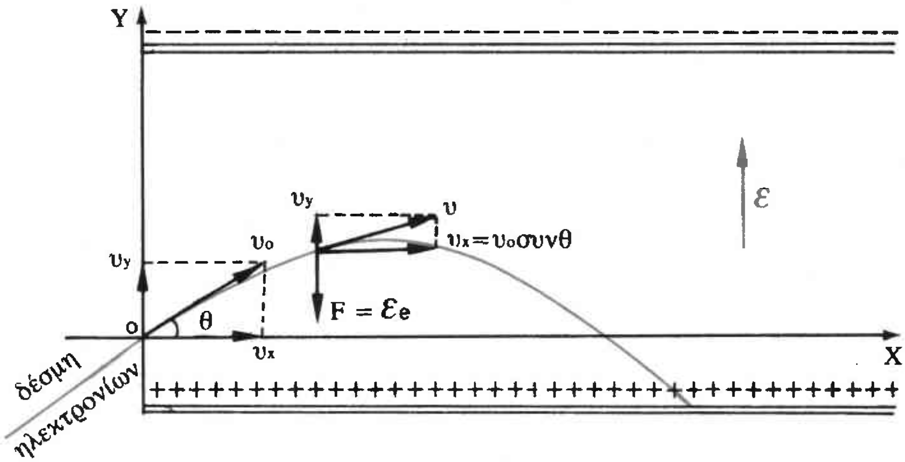
$$h^3 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot (86400)^2}{4 \cdot 3{,}14^2} \Rightarrow h = 42000\text{km}$$

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, χρησιμοποιώντας τον ίδιο τρόπο μελέτης που εφαρμόσαμε για την κίνηση μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο.

4.6. Κίνηση με αρχική ταχύτητα υπό γωνία

Μια λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται μέσα σε ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο σχηματίζοντας γωνία θ με τη διεύθυνση των παραλλήλων πλακών, σχ. 4.11.



Σχ. 4.11

Έστω $\vec{\mathcal{E}}$ η ένταση του πεδίου και $\vec{\upsilon}_o$ η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο σημείο Ο. Αν εκτός από τη δύναμη του πεδίου αγνοήσουμε κάθε άλλη δύναμη (αντίσταση αέρα, βάρος, δυνάμεις Coulomb μεταξύ τους), τα ηλεκτρόνια μέσα στο πεδίο κινούνται με την επίδραση μιας σταθερής κατακόρυφης δύναμης, που έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο $F = \mathcal{E}e$ (e το φορτίο του ηλεκτρονίου).

Όπως φαίνεται στο σχ. 4.11, η δύναμη πάνω στα κινούμενα ηλεκτρόνια της δέσμης, έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα που κάνει πλάγια βολή στο βαρυτικό πεδίο. Δηλαδή σταθερό μέτρο, κατακόρυφη διεύθυνση και φορά προς τα κάτω.

Έτσι, όπως και στην περίπτωση της πλάγιας βολής στο βαρυτικό πεδίο, η κίνηση κάθε ηλεκτρονίου στο ηλεκτροστατικό πεδίο, μπορεί να θεωρηθεί ως

σύνθεση δυο κινήσεων. Μιας οριζόντιας ομαλής με ταχύτητα $υ_x=υ_o συνθ$ και μιας κατακόρυφης, ομαλά επιβραδυνόμενης με αρχική ταχύτητα $υ_o ημθ$ και επιβράδυνση

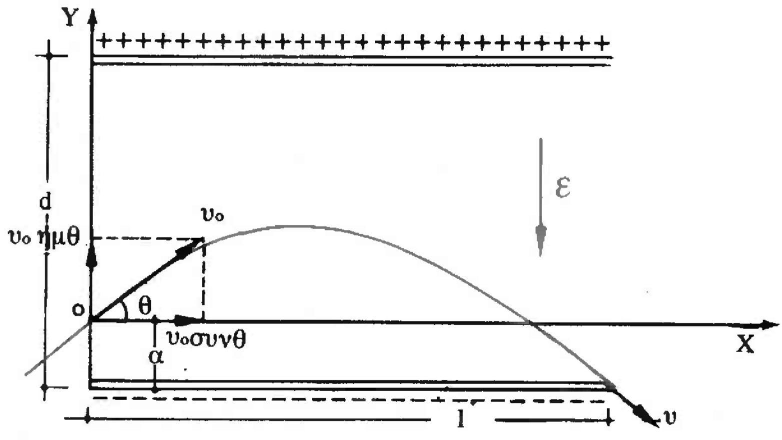
$$γ=\frac{F}{m}=\frac{\mathcal{E}e}{m} \text{ (m η μάζα του ηλεκτρονίου).}$$

Η τροχιά που θα διαγράψει το ηλεκτρόνιο μέσα στο πεδίο είναι παραβολή και οι εξισώσεις της κίνησής του είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες της πλάγιας βολής, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Άξονας x	Άξονας y
$F_x=0$	$F_y=-\mathcal{E}e$
$γ_x=0$	$γ_y=-\frac{\mathcal{E}e}{m}$
ομαλή κίνηση	ομαλά επιβραδ. κίνηση
$υ_x=υ_o συνθ$	$υ_y=υ_o ημθ-\frac{\mathcal{E}e}{m}t$
$s_x=υ_o συνθ t$	$s_y=υ_o ημθ t-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathcal{E}e}{m}t^2$

Παράδειγμα

Δυο παράλληλες οριζόντιες μεταλλικές πλάκες, που το μήκος τους είναι l, απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και είναι φορτισμένες υπό τάση V. Ένα σωματίδιο με μάζα m



και θετικό φορτίο q, εισέρχεται στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο με ταχύτητα $υ_o$ που σχηματίζει με τις πλάκες γωνία θ.

α) Πόσο πρέπει να απέχει από την κάτω πλάκα το σημείο εισόδου Ο, ώστε το σωματίδιο να εξέρχεται από το πεδίο εφαπτομενικά με αυτή;

β) Πως θα κινηθεί το σωματίδιο μετά την έξοδό του από το πεδίο;

Λύση

α) Το σωματίδιο μέσα στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο κινείται με την επίδραση μόνο της σταθερής δύναμης $F = \mathcal{E}q = \frac{V}{d}q$. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνησή του είναι:

$$y = \upsilon_o \eta\mu\theta t - \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

και

$$x = \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\theta t \qquad (2)$$

όπου

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{Vq}{dm}.$$

Απαλείφοντας το χρόνο t μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

$$y = \varepsilon\varphi\theta x - \frac{Vq}{2\upsilon_o^2 m d \sigma\upsilon\nu^2\theta} x^2$$

Αν στην εξίσωση αυτή βάλουμε $x=l$ και $y=-\alpha$, βρίσκουμε για τη ζητούμενη απόσταση:

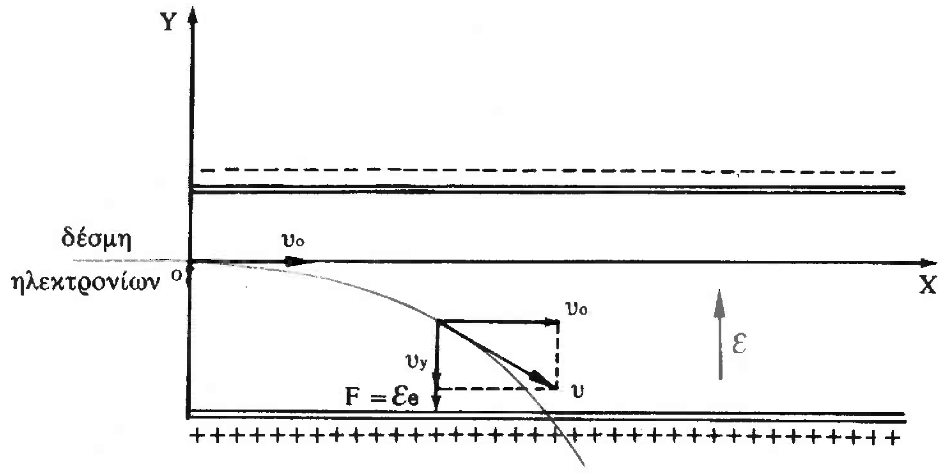
$$\alpha = \frac{Vq}{2\upsilon_o^2 m d \sigma\upsilon\nu^2\theta} l^2 - l\varepsilon\varphi\theta$$

β) Όταν το σωμάτιο βγεί από το πεδίο, κινείται χωρίς την επίδραση δύναμης (το βάρος του είναι αμελητέο). Αν λοιπόν τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο, η ταχύτητά του είναι $\vec{\upsilon}$, θα συνεχίσει να κινείται με αυτήν ευθύγραμμα και ομαλά.

4.7. Κίνηση με αρχική ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές

Τα ηλεκτρόνια εισέρχονται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου (σχ. 4.12).

Η δύναμη που ασκεί το πεδίο σε κάθε ηλεκτρόνιο έχει μέτρο $F=\mathcal{E}e$, και είναι κατακόρυφη με φορά προς τη θετικά φορτισμένη πλάκα, που στο σχ. 4.12 είναι οριζόντια. Η κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί σαν η συνισταμένη δύο κινήσεων, μιας κατά τη διεύθυνσή του άξονα x και μιας κατά τη διεύθυνση του άξονα y. Αν εκτός από τη $F=\mathcal{E}e$, θεωρήσουμε αμελητέα κάθε άλλη δύναμη πάνω στα ηλεκτρόνια, τότε η κίνηση



Σχ. 4.12

στον άξονα x θα είναι ομαλή με ταχύτητα $\vec{υ}_o$ και η κίνηση στον άξονα y ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα και με επιτάχυνση $γ_y = \frac{\mathcal{E} e}{m}$.

Η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι τυπικά όμοια με την οριζόντια βολή μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο. Δηλαδή η τροχιά των ηλεκτρονίων μέσα στο πεδίο είναι παραβολή, όπως φαίνεται και στο σχ. 4.12. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνησή τους προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις του πίνακα της προηγούμενης παραγράφου για γωνία θ=0.

Κατά την κίνηση των ηλεκτρονίων της δέσμης μέσα στο ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, θεωρήσαμε το βάρος τους αμελητέο και στις δυο περιπτώσεις που μελετήσαμε. Αυτή η προσέγγιση έγινε με σκοπό να διευκολύνει τη μελέτη και είναι επιτρεπτή, αφού στις συνηθισμένες περιπτώσεις που μελετάμε η δύναμη που ασκείται από το ηλεκτροστατικό πεδίο στα ηλεκτρόνια είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος τους. Δηλαδή ο συνυπολογισμός μιας τόσο μικρής δύναμης, όπως το βάρος των ηλεκτρονίων, πρακτικά δε μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα σ' ένα τέτοιο πρόβλημα. Τέλος, αμελητέες θεωρήσαμε και τις δυνάμεις Coulomb ανάμεσα στα ηλεκτρόνια της δέσμης, επειδή η μεταξύ τους απόσταση είναι μεγάλη.

Κίνηση σε μαγνητικό πεδίο

1994

4.8. Δύναμη σε κινούμενο φορτίο

Όπως είναι γνωστό, σε ευθύγραμμο αγωγό, μήκους l που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$, ασκείται δύναμη Laplace $\vec{F}$, που το μέτρο της βρίσκεται πειραματικά ότι είναι

$$F = IlB\eta\mu\varphi$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει η $\vec{B}$ με τη διεύθυνση του αγωγού.

Η δύναμη Laplace είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F_L}$ που το μαγνητικό πεδίο ασκεί στα κινούμενα στοιχειώδη φορτία q, τα οποία αποτελούν το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό. Η $\vec{F_L}$ υπολογίζεται ως εξής: Έστω N ο αριθμός των φορτίων q που διέρχονται από μια τομή του αγωγού σε χρόνο t. Αν είναι υ η ταχύτητα, με την οποία κινούνται τα φορτία κατα μήκος του αγωγού, για να διατρέξουν τον αγωγό απαιτείται χρόνος $t = \frac{l}{\upsilon}$. Επομένως η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό είναι:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{Nq}{\frac{l}{\upsilon}} = \frac{Nq\upsilon}{l}$$

Έτσι η δύναμη Laplace γράφεται:

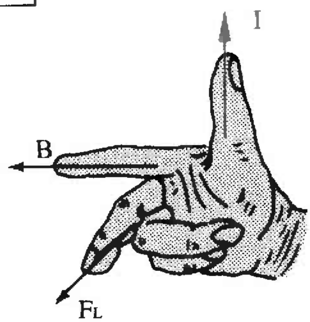
$$F = \frac{Nq\upsilon}{l} lB\eta\mu\varphi = Nq\upsilon B\eta\mu\varphi$$

Η δύναμη που δέχεται κάθε φορτίο είναι $F_L = \frac{F}{N}$ Επομένως:

$$\boxed{F_L = q\upsilon B\eta\mu\varphi}\ ^*$$

όπου φ η γωνία μεταξύ των $\vec{\upsilon}$ και $\vec{B}$.

Η διεύθυνση και η φορά της $\vec{F_L}$ δίνεται από τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού (σχ. 4.13α) σύμφωνα με τον οποίο η $\vec{F_L}$ είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο των $\vec{\upsilon}$ και $\vec{B}$. Όταν το κινούμενο φορτίο είναι θετικό, τότε η φορά του ρεύματος και η φορά της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ συμπίπτουν. Όταν το κινούμενο φορτίο είναι αρνητικό (π.χ. ηλεκτρόνια) τότε η φορά του ρεύματος

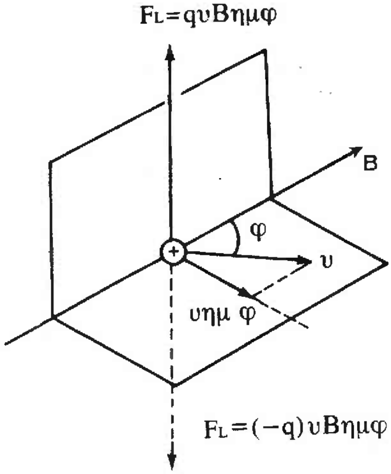


Σχ. 4.13α

---

* Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι: $B = \frac{F_L}{q\upsilon\eta\mu\varphi}$

είναι αντίθετη από τη φορά της ταχύτητας, με αποτέλεσμα η δύναμη που ασκείται στο φορτίο να έχει φορά προς τα κάτω (σχ. 4.13 β).

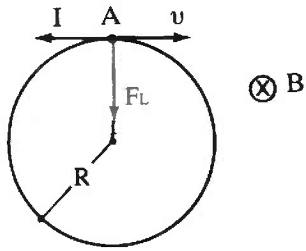


Σχ. 4.13β

1988

4.9. Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο Α, που βρίσκεται σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, υπάρχει μια πηγή που εκτοξεύει λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων (σχ. 4.14). Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ των ηλεκτρονίων είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, του οποίου η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ έχει σχεδιαστεί κάθετη στη σελίδα με φορά από τον αναγνώστη προς το βιβλίο*. Η κίνηση των ηλεκτρονίων της δέσμης μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι αποτέλεσμα της δύναμης Laplace F_L, που ασκείται σ' αυτά από το μαγνητικό πεδίο. Η F_L έχει σταθερό μέτρο, $F_L=e\upsilon B$ (e: φορτίοηλεκτρονίου), είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και βρίσκεται στο επίπεδο του σχήματος αναγκάζοντας τα ηλεκτρόνια να κινούνται στο ίδιο επίπεδο.



Σχ. 4.14

Η δύναμη Laplace παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης $\vec{F}_K$, που αναγκάζει τα ηλεκτρόνια να κινηθούν πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Επομένως:

$$F_L=F_K \Rightarrow e\upsilon B=\frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \boxed{R=\frac{m\upsilon}{eB}} \qquad (4.5)$$

όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου. Από την εξίσωση (4.5) βλέπουμε ότι η ακτίνα

* Με το σύμβολο ⊙ εννοούμε μαγνητική επαγωγή κάθετη στη σελίδα με φορά από το βιβλίο προς τον αναγνώστη και με το σύμβολο ⊗ εννοούμε ότι η μαγνητική επαγωγή είναι κάθετη στη σελίδα και με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

της τροχιάς είναι ανάλογη της ταχύτητας $\vec{υ}$ των ηλεκτρονίων. Υπάρχει όμως εξάρτηση της περιόδου της κυκλικής τους κίνησης από την αρχική τους ταχύτητα; όχι

Γνωρίζουμε ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση η περίοδος είναι ο χρόνος μέσα στον οποίον το σώμα εκτελεί μια πλήρη περιφορά. Επομένως:

$$T=\frac{2\pi R}{υ}$$

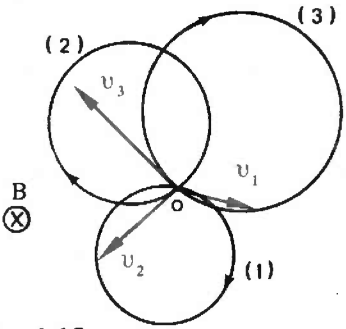
και αν στη σχέση αυτή αντικαταστήσουμε το R από τη σχέση (4.5), παίρνουμε:

$$T=\frac{2\pi}{υ}\,\frac{mυ}{eB}$$

ή

$$\boxed{T=\frac{2\pi m}{eB}} \qquad (4.6)$$

Από τη (4.6) φαίνεται ότι η περίοδος της κυκλικής κίνησης που κάνουν τα ηλεκτρόνια δεν εξαρτάται από την ταχύτητα $\vec{υ}$, αλλά ούτε και από την ακτίνα R της τροχιάς τους. Έτσι αν π.χ. από ένα σημείο O ομογενούς μαγνητικού πεδίου (σχ. 4.15) αναχωρήσουν συγχρόνως ηλεκτρόνια με διαφορετικές ταχύτητες κάθετες στο πεδίο, αυτά θα επανέλθουν ταυτόχρονα στο O, αφού διαγράψουν κυκλικές τροχιές διαφορετικών ακτίνων. Εφαρμογή αυτής της ιδιότητας έχουμε στο κύκλοτρο και στους μαγνητικούς φακούς που περιγράφουμε στη συνέχεια.



Σχ. 4.15

Παράδειγμα

Ένα φορτισμένο σωματίδιο α κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B=1,2 Tesla διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας R=0,45m. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα υ του σωματιδίου

β) τη συχνότητα περιστροφής του

γ) την κινητική του ενέργεια

δ) αν θελήσουμε να επιταχύνουμε το σωματίδιο αυτό σε ηλεκτρικό πεδίο ώστε να αποκτήσει την ίδια κινητική ενέργεια, πόση διαφορά δυναμικού απαιτείται;

(Η μάζα και το φορτίο του σωματιδίου είναι αντίστοιχα $m=6{,}64\cdot10^{-27}$kgr και $q=3{,}2\cdot10^{-19}$Cb).

Λύση

α) Η δύναμη Laplace που δέχεται το σωματίδιο από το μαγνητικό πεδίο θα αποτελεί την απαραίτητη για την κυκλική του κίνηση κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή:

$$F_L = F_K \Rightarrow q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \frac{qBR}{m} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}45}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} m/sec \Rightarrow \upsilon = 2{,}65 \cdot 10^{7} m/sec$$

β) Από την εξίσωση (4.6) έχουμε:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \nu = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}} Hz \Rightarrow$$

$$\nu = 0{,}92 \cdot 10^{7} Hz$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27} \cdot (2{,}65 \cdot 10^{7})^2 Joule \Rightarrow$$

$$E_K = 23{,}3 \cdot 10^{-13} \text{ Joule}$$

δ) Αν το σωματίδιο επιταχυνθεί μεταξύ δυο σημείων, για τα οποία η διαφορά δυναμικού είναι V, η ηλεκτρική ενέργεια που θα μεταφερθεί σ' αυτό είναι qV.
Έτσι:

$$qV = E_K \Rightarrow$$

$$V = \frac{E_K}{q} = \frac{23{,}3 \cdot 10^{-13}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}} Volt \Rightarrow$$

$$V = 7{,}25 \cdot 10^{6} \text{ Volt}$$

4.10. Κύκλοτρο

Το κύκλοτρο είναι μια διάταξη με την οποία πετυχαίνουμε μεγάλες ταχύτητες φορτισμένων σωματιδίων. Αποτελείται από δυο κοίλα ημικυλινδρικά τμήματα σχήματος D (ηλεκτρόδια), που συνδέονται με τους πόλους μιας πηγής εναλλασσόμενης τάσης πολύ μεγάλης συχνότητας. Μεταξύ των δυο ηλεκτροδίων υπάρχει διάκενο και στο κέντρο του Κ βρίσκεται η πηγή παραγωγής των σωματιδίων που θέλουμε να επιταχύνουμε. Η διάταξη των δύο ηλεκτροδίων βρίσκεται μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μεγάλης μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$, που παράγεται από έναν ηλεκτρομαγνήτη και έτσι που το επίπεδό τους να

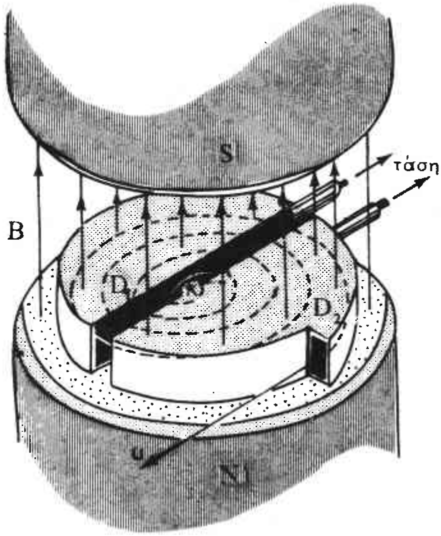
είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές (σχήμα 4.16). Το εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο περιορίζεται στο διάκενο ανάμεσα στα δυο ηλεκτρόδια, αφού στο εσωτερικό τους η έντασή του είναι μηδέν. Για να αποφεύγεται το φρενάρισμα των επιταχυνομένων σωματιδίων, λόγω των κρούσεων με τα μόρια του αέρα, το όλο σύστημα βρίσκεται σε χαμηλή πίεση 10^{-6} torr περίπου.

Ας υποθέσουμε ότι ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο, π.χ. ένα πρωτόνιο, εκπέμπεται από την πηγή Κ. Αν τη στιγμή αυτή το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στα δυο ηλεκτρόδια D_1 και D_2 είναι αυτό που εικονίζεται στο σχήμα 4.17α, το σωματίδιο θα επιταχυνθεί από το ηλεκτρικό πεδίο προς το ηλεκτρόδιο D_2. Στο εσωτερικό του ηλεκτροδίου D_2 το σωματίδιο δέχεται μόνο την επίδραση του μαγνητικού πεδίου, το οποίον ασκεί τη δύναμη Laplace, που το αναγκάζει να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1 = \frac{m\upsilon_1}{qB}$, όπου m και q η μάζα και το φορτίο του σωματιδίου και υ_1 η ταχύτητα εισόδου του στο ηλεκτρόδιο D_2. Τη στιγμή που το σωματίδιο βγαίνει από το ηλεκτρόδιο D_2 (σχήμα 4.17β) θα επιταχυνθεί κατά μήκος της διαδρομής β-γ και θα μπεί στο ηλεκτρόδιο D_1 με ταχύτητα $\upsilon_2 > \upsilon_1$. Μέσα στο ηλεκτρόδιο D_1 το σωματίδιο με την επίδραση της δύναμης Laplace θα κάνει πάλι ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας

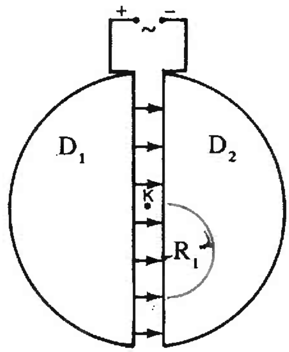
$$R_2 = \frac{m\upsilon_2}{qB}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και επειδή $\upsilon_2 > \upsilon_1$ προκύπτει $R_2 > R_1$.

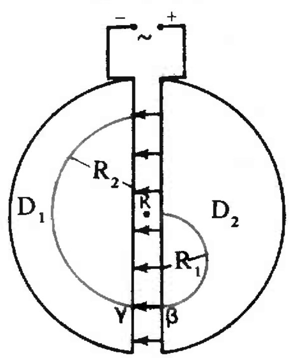
Η κίνηση αυτή του σωματιδίου συνεχίζεται και κάθε φορά που αυτό διέρ-



Σχ. 4.16



Σχ. 4.17α



Σχ. 4.17β

χεται από το διάκενο η ταχύτητα μεγαλώνει, προκαλώντας έτσι αύξηση και στις ακτίνες των κυκλικών τροχιών που διαγράφει μέσα στα ηλεκτρόδια.

Οι διαδοχικές επιταχύνσεις του σωματιδίου κάθε φορά που περνάει από το διάκενο, επιτυγχάνονται μόνο αν η ταχύτητα αυτού και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχουν την ίδια φορά (σχ. 4.17). Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει η περίοδος της εναλλασσόμενης τάσης να είναι ίση με την περίοδο της περιστροφής του σωματιδίου, δηλαδή

$$T_{εναλ.} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Από τον τύπο $R = \frac{m\upsilon}{qB}$ φαίνεται, ότι η μέγιστη ταχύτητα, που αντιστοιχεί στη μέγιστη ακτίνα περιστροφής, είναι:

$$\upsilon_{max} = \frac{qB}{m} R_{max}$$

Η κινητική ενέργεια Εκ που έχει τότε το σωμάτιο είναι:

$$E_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{max} = \frac{1}{2} \frac{q^2B^2}{m} R^2_{max}$$

ή αν πάρουμε σαν R_{max} την ακτίνα R των ηλεκτροδίων D, η Εκ παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} \frac{q^2B^2}{m} R^2} \qquad (4.7)$$

Από τον παραπάνω τύπο φαίνεται ότι, για ένα ορισμένο σωματίδιο που θέλουμε να επιταχύνουμε, η κινητική ενέργεια Εκ που αυτό αποκτά εξαρτάται μόνο από την ακτίνα R των ηλεκτροδίων και την εφαρμοζόμενη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$.

Τελικά, τα σωματίδια που παράγει η πηγή βγαίνουν από το κύκλοτρο με την ταχύτητα που επιθυμούμε και χρησιμοποιούνται συνήθως σαν βλήματα για το βομβαρδισμό πυρήνων και τη μελέτη τους.

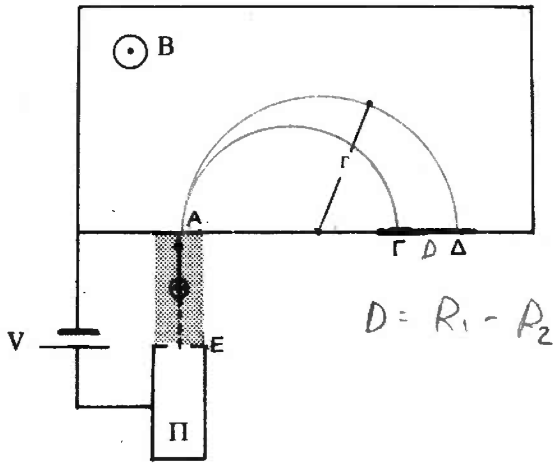
Σημείωση

Το κύκλοτρο αποτέλεσε την πρώτη διάταξη επιτάχυνσης σωματιδίων και πρωτολειτούργησε στα 1932 στο Berkeley της Καλιφόρνιας. Είναι ο πρόγονος των σημερινών γιγαντιαίων επιταχυντών που η μεγάλη αξία τους σαν εργαλεία έρευνας συμβαδίζει με το τεράστιο κόστος τους. Ο εφευρέτης του κύκλοτρου E. Lawrence τιμήθηκε γι' αυτό με το βραβείο Nobel Φυσικής. Τυπικά μεγέθη του κύκλοτρου είναι: συχνότητα της πηγής εναλλασσόμενης τάσης 10MHz, τάση μεταξύ των δυο ηλεκτροδίων 200kV, μαγνητική επαγωγή 2 Tesla, διάμετρος των ηλεκτροδίων 1m.

1980/1997

4.11. Φασματογράφος μάζας

Ας θεωρήσουμε τη διάταξη του σχήματος 4.19. Από μια πηγή Π, παραγωγής θετικών ιόντων, υποθέτουμε ότι βγαίνει ένα ιόν το οποίο αφού επιταχυνθεί από το ηλεκτρικό πεδίο (μεταξύ Ε και Α), λόγω της τάσης V, μπαίνει από το σημείο Α σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$.



Σχ. 4.19.

Το πεδίο με τη δύναμη Laplace που ασκεί στο ιόν, το αναγκάζει να διαγράψει ημιπεριφέρεια ακτίνας r με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ. Στην ομαλή κυκλική κίνηση που κάνει το ιόν μέσα στο μαγνητικό πεδίο, ρόλο κεντρομόλου δύναμης F_K παίζει η δύναμη Laplace F_L. Έχουμε λοιπόν:

$$F_L = F_K$$

$$\text{ή} \quad q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{r}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{\upsilon = \frac{qBr}{m}} \tag{4.8}$$

όπου q και m το φορτίο και η μάζα του ιόντος.

Η ενέργεια που μεταφέρεται από το ηλεκτρικό πεδίο στο ιόν κατά την κίνησή του από το Π στο Α, μέσω του έργου qV, είναι ίση με την κινητική ενέργεια $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ του ιόντος. Επομένως:

$$qV = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$\text{ή} \quad \upsilon^2 = \frac{2qV}{m} \tag{4.9}$$

Από τις σχέσεις (4.8) και (4.9) παίρνουμε:

$$\boxed{\frac{q}{m}=\frac{2V}{B^2r^2}} \qquad (4.10)$$

Ο τύπος (4.10) μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του λόγου $\frac{q}{m}$, του φορτίου προς τη μάζα του ιόντος, αν μετρήσουμε τα V, B και r.

Η διάταξη του σχήματος 4.19 αποτελεί την αρχή λειτουργίας του φασματογράφου μάζας. Στη θέση ΓΔ υπάρχει φωτογραφική πλάκα πάνω στην οποία χτυπάει το ιόν.

Αν εισέλθουν στο μαγνητικό πεδίο π.χ. δυο ιόντα ισοτόπων με το ίδιο φορτίο, τότε με τη βοήθεια της (4.10) υπολογίζουμε τις μάζες των δυο ισοτόπων. Στο σημείο Δ αποτυπώνεται ένα ισότοπο βαρύτερο απ' αυτό που αντιστοιχεί στο σημείο Γ.

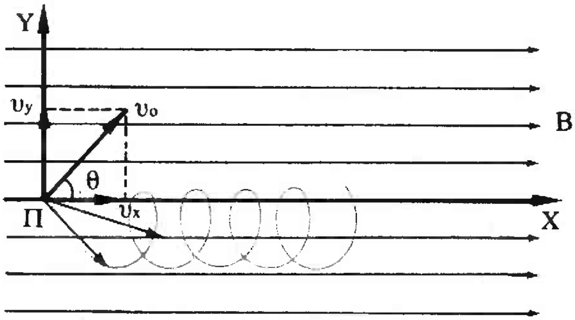
Σημείωση

Ο φασματογράφος που περιγράψαμε λέγεται φασματογράφος του Dempster. Τυπικές τιμές λειτουργίας του φασματογράφου μάζας είναι, τάση γύρω στα 4000 Volt και μαγνητική επαγωγή γύρω στο μισό Tesla.

1995

4.12. Μαγνητικοί φακοί

Οι μαγνητικοί φακοί είναι διατάξεις με τις οποίες επιτυγχάνουμε εστίαση ηλεκτρονίων, όπως με τους συγκλίνοντες φακούς επιτυγχάνουμε εστίαση του φωτός. Αυτό γίνεται με την επίδραση μαγνητικού πεδίου πάνω σε κινούμενα ηλεκτρόνια.



Σχ. 4.20.

Ας θεωρήσουμε μια πηγή ηλεκτρονίων Π μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$ (σχ. 4.20). Θα μελετήσουμε την κίνηση ενός ηλεκτρονίου

μάζας m και φορτίου e, που η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}_o$ σχηματίζει γωνία θ με τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ του ηλεκτρονίου σε δυο συνιστώσες, την $\upsilon_x=\upsilon_o$συνθ παράλληλη προς τη μαγνητική επαγωγή και την $\upsilon_y=\upsilon_o$ημθ κάθετη σ' αυτή. Επειδή κατά τον άξονα x δεν ασκείται καμιά δύναμη στο ηλεκτρόνιο, η κίνησή του σ' αυτή τη διεύθυνση είναι ομαλή με ταχύτητα υ_oσυνθ. Η υ_y προκαλεί την εμφάνιση δύναμης Laplace κάθετης στο επίπεδο των $\vec{\upsilon}_y$ και $\vec{B}$.

Λόγω της δύναμης αυτής το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας:

$$R=\frac{m\upsilon_o \text{ημθ}}{eB} \quad \text{και περιόδου } T=\frac{2\pi m}{eB} \quad \text{ανεξάρτητης}$$

της ταχύτητας υ_oημθ. Επειδή όμως το ηλεκτρόνιο μετακινείται συγχρόνως με ταχύτητα υ_oσυνθ, γι' αυτό εκτελεί μια ελικοειδή κίνηση σαν αποτέλεσμα της σύνθεσης αυτών των δύο κινήσεων.

Στο χρόνο T, που χρειάζεται το ηλεκτρόνιο για να κάνει μια πλήρη περιστροφή, προχωρεί κατά τη διεύθυνση της $\vec{B}$ κατά διάστημα $s=\upsilon_o$συνθ$T \Rightarrow s=\frac{2\pi m}{eB}\upsilon_o$συνθ.

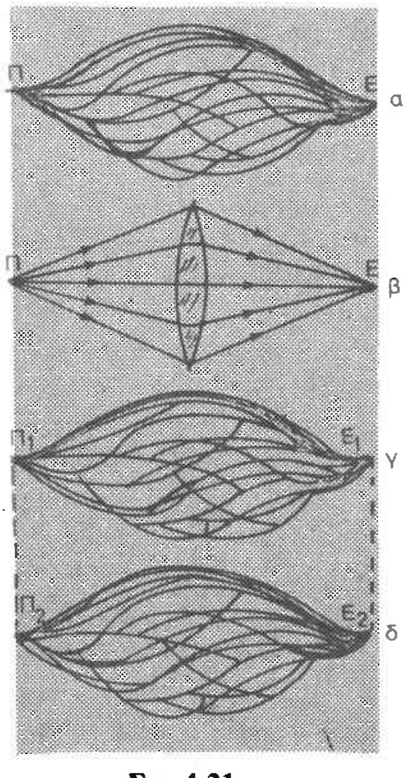
Αν περιοριστούμε σε ηλεκτρόνια που εκτοξεύονται με μικρή γωνία θ, τότε συνθ≃1 και η παραπάνω σχέση γίνεται με ικανοποιητική προσέγγιση

$$s=\frac{2\pi m}{eB}\upsilon_o \qquad (4.11)$$

Δηλαδή το διάστημα s, που διανύεται σε χρόνο μιας περιόδου κατά τον άξονα x είναι το ίδιο για όλα τα ηλεκτρόνια που ξεκινούν από την πηγή Π με την ίδια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$. Επομένως όλα τα ηλεκτρόνια που ξεκινούν από το σημείο Π με ταχύτητες ίσου μέτρου υ_o και σχηματίζουν διαφορετικές **μικρές** γωνίες με τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$, θα συγκεντρώνονται στο ίδιο σημείο Ε (εστίαση ηλεκτρονίων).

Στο σχ. 4.21α εικονίζεται η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στο ίδιο σημείο Ε (εστία) από ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο. Είναι φανερή η αναλογία ανάμεσα στην επίδραση του μαγνητικού πεδίου στα ηλεκτρόνια και στην επίδραση ενός συγκλίνοντος φακού σε μια δέσμη φωτεινών ακτίνων (σχ. 4.21β).

Ας θεωρήσουμε μέσα στο ομογενές



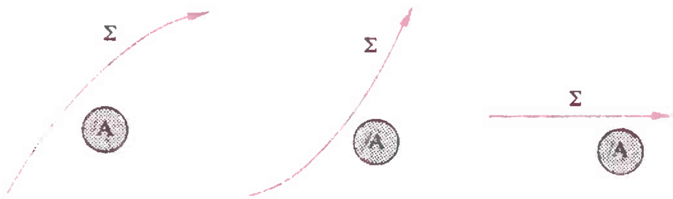
Σχ. 4.21

μαγνητικό πεδίο δύο πηγές ηλεκτρονίων $Π_1$ και $Π_2$ απ' τις οποίες εκτοξεύονται ηλεκτρόνια με ταχύτητες $υ_ο$, σχ. 4.21 γ και δ. Οπως προκύπτει από την εξίσωση (4.11), η εστίαση των ηλεκτρονίων που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τη $\vec{B}$ γίνεται σε δυο σημεία E_1, E_2 τέτοια ώστε $Π_1Π_2=E_1E_2$. Δηλαδή το ομογενές μαγνητικό πεδίο δεν πετυχαίνει μεγέθυνση. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο κατάλληλης μορφής, π.χ. το μαγνητικό πεδίο πηνίου μικρού μήκους (μαγνητικός φακός) θα έχουμε $EE_1>ΠΠ_1$ δηλαδή μεγέθυνση. Το ίδιο πετυχαίνουμε, αν αντί ανομοιογενούς μαγνητικού πεδίου χρησιμοποιήσουμε κατάλληλο ηλεκτρικό πεδίο (ηλεκτρικός φακός).

Τις ιδιότητες των μαγνητικών και ηλεκτρικών φακών εκμεταλευόμαστε στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο. Η λειτουργία του είναι ανάλογη με τη λειτουργία του κοινού μικροσκοπίου, μόνο που αντί για κοινούς φακούς χρησιμοποιεί μαγνητικούς ή ηλεκτρικούς και άντί για δέσμη φωτεινών ακτίνων χρησιμοποιεί δέσμη ηλεκτρονίων. Με το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο μπορούμε να παρατηρήσουμε το μικρόκοσμο και να φωτογραφήσουμε μεγάλα μόρια, κάτι που ήταν αδύνατο να πετύχουμε με το κοινό μικροσκόπιο. (βλέπε παράγραφος 14.9).

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Να περιγράψετε το είδος της δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ ενός ακίνητου αντικειμένου – στόχου Α και ενός σωματιδίου – βλήματος Σ, που θα μπορούσε να εξηγήσει τις τροχιές του σχήματος:



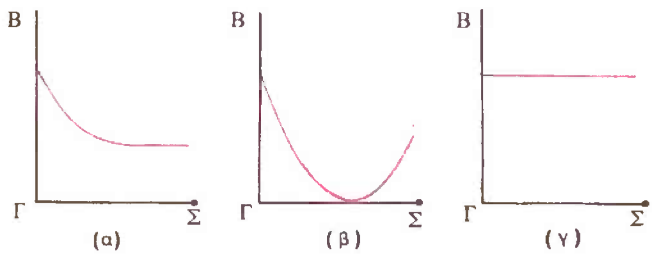
2. Υποθέτουμε, ότι η γη κινείται με σταθερή ταχύτητα διαγράφοντας κυκλική τροχιά γύρω από τον ήλιο. Αν η απόσταση των κέντρων του Ήλιου και της Γης είναι d = $15\cdot10^{10}$m και αγνοήσουμε την επίδραση κάθε άλλου ουράνιου σώματος, να υπολογιστεί η μάζα Μ του Ήλιου.
Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G = $6{,}7\cdot10^{-11}Nm^2kg^{-2}$, και ότι η Γη κάνει μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο ίσο με 365 ημέρες. (Για ευκολία στις πράξεις 365 ημέρες = $3\cdot10^7$s).

(**Απ.** $2{,}23\cdot10^{30}$kgr)

3. Τρεις όμοιες σφαίρες μάζας m η κάθε μια με την επίδραση των αμοιβαίων έλξεων, περιστρέφονται στην ίδια κυκλική τροχιά έτσι, ώστε σε κάθε χρονική στιγμή οι θέσεις τους να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Ποια είναι η ταχύτητα περιστοφής; (Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G)

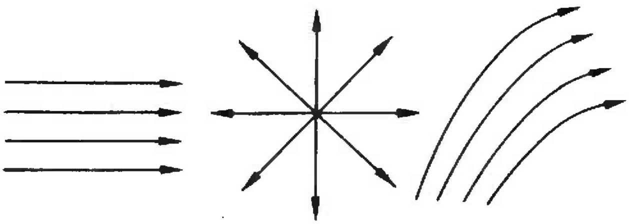
(**Απ.** $\sqrt{Gm/\alpha}$)

4. Ποια από τις καμπύλες αποδίδει κατά προσέγγιση τη μεταβολή του μέτρου της βαρυτικής έλξης που δέχεται ο αστροναύτης, όταν αυτός ταξιδεύει από τη γη (Γ) στη σελήνη (Σ);



5. Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτροστατικού πεδίου δεν τέμνονται ποτέ. Να εξηγήσετε γιατί.

6. Αν αφήσουμε ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε καθένα από τα εικονιζόμενα ηλεκτρικά πεδία θα κινηθεί ή όχι και γιατί;



(α) (β) (γ)

7. Σε ένα άτομο H_2 η ελκτική δύναμη Coulomb μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονίου έχει μέτρο $F = Kc \frac{e^2}{r^2}$
Ας θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρόνιο διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R_1 και ξαφνικά πέφτει σε μια μικρότερη τροχιά ακτίνας R_2. Τότε ακτινοβολείται ενέργεια. Από που προέρχεται αυτή η ενέργεια και πόση είναι;

(Απ. $\frac{K_c e^2}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$)

8. Τρεις όμοιες σφαίρες μάζας m η κάθε μια κατέχουν τις κορυφές ισόπλευρου τρίγωνου πλευράς α. Πόση ενέργεια απαιτείται, για να τις απομακρύνουμε σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους;

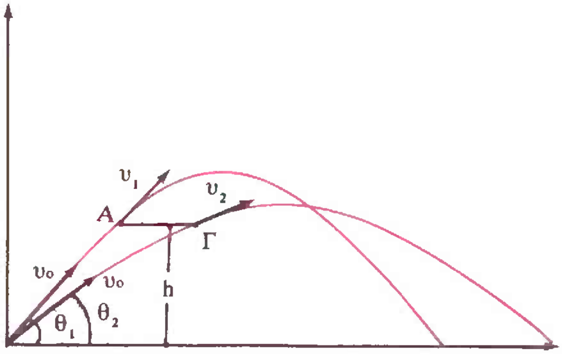
(Απ. $3Gm^2/\alpha$)

9. Ένα ηλεκτρόνιο βάλλεται με αρχική ταχύτητα $3{,}2\cdot10^5$m/sec προς ένα πρωτόνιο σε ηρεμία. Αν υποθέσουμε ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά μακριά από το πρωτόνιο, σε ποια απόσταση από το πρωτόνιο, η ταχύτητα του ηλεκτρονίου θα έχει διπλασιασθεί; (Δίνεται $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$kgr, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$cb και $K_c = 9\cdot10^9 N.m^2cb^{-2}$)

(Απ. $1{,}6\cdot10^{-9}$m)

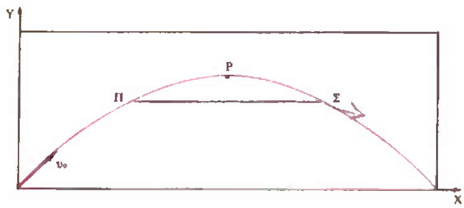
10. Αν υποθέσουμε ότι ένα σώμα μπορεί να διαγράψει κυκλικές τροχιές διαφορετικών ακτίνων γύρω από τον ήλιο, να βρεθούν και να παρασταθούν γραφικά η κινητική ενέργεια, η δυναμική ενέργεια και η ολική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με την απόσταση από την επιφάνεια του ήλιου. Ποια γενικότερα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν;

11. Δυο βλήματα της ίδιας μάζας ρίχνονται με την ίδια ταχύτητα και με διαφορετικές γωνίες, όπως στο σχήμα.



α) Γιατί τα βλήματα δε φτάνουν στο ίδιο ύψος;
β) Στα σημεία Α και Γ, που βρίσκονται στο ίδιο ύψος, τα βλήματα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου, ή όχι;

12. Η τροχιά ενός σώματος που βάλλεται υπό γωνία φαίνεται στο σχήμα. Το Ρ είναι το ψηλότερο σημείο της τροχιάς και τα σημεία Π και Σ βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές; (Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα).



α) Η ταχύτητα στο Ρ είναι μηδέν.
β) Η ταχύτητα στο Π είναι ίση με την ταχύτητα στο Σ.
γ) Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στο Π είναι ίση με την αντίστοιχη συνιστώσα στο Σ.
δ) Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας στο Ρ είναι μηδέν.

13. Το 1936 στους Ολυμπιακούς αγώνες του Βερολίνου, ο αθλητής Όουενς κατέλαβε την πρώτη θέση στο άλμα σε μήκος με επίδοση 8,09m. Ποια θα ήταν η επίδοση, αν το άλμα γινόταν στη Μελβούρνη;
Δίνονται $g_{(Βερολ.)} = 9{,}81 m/sec^2$ και $g_{(Μελβ.)} = 9{,}79 m/sec^2$

(**Απ.** 8,11m)

14. Ένας ποδοσφαιριστής εκτελεί κτύπημα πέναλτι και η μπάλα περνάει εφαπτομενικά πάνω από το οριζόντιο δοκάρι με την ταχύτητά της οριζόντια. Το δοκάρι βρίσκεται σε ύψος h = 2,45m από το έδαφος. Αν η μπάλα φεύγει από το πόδι του ποδοσφαιριστή με ταχύτητα $υ_o$ = 14m/sec, να βρεθεί:

α) η γωνία θ που σηματίζει η $υ_o$ με το οριζόντιο επίπεδο.
β) η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πάνω από το γκολπόστ.
γ) πόσο χρόνο θα χρειαστεί η μπάλα, για να πέσει στο έδαφος.
δ) ποια η απόσταση του σημείου του πέναλτι από τα γκολπόστ.

($g = 10 m/sec^2$)

(**Απ.** α) 30° β) 12,1m/sec γ) 1,4sec δ) 8,48m)

15. Ένα πυροβόλο ρίχνει βλήματα με συχνότητα ένα βλήμα κάθε δευτερόλεπτο, υπό γωνία θ = 60° και αρχική ταχύτητα $υ_o$ = 100m/sec.

α) Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, να βρείτε το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φτάνουν τα βλήματα.
β) Πόσο χρόνο χρειάζεται κάθε βλήμα για να πέσει στο έδαφος;
γ) Πόσα βλήματα βρίσκονται στον αέρα όταν το πρώτο αγγίζει το έδαφος;

($g = 10 m/sec^2$)

(**Απ.** α) 375m β) 17,32sec γ) 17 βλήματα)

16. Ένα βλήμα ρίχνεται υπό γωνία θ = 30°. Όταν το βλήμα φτάνει στο μέγιστο ύψος του, συναντάει τον κορμό ενός ψηλού δέντρου και αφού το διαπεράσει πέφτει στο έδαφος έτσι, ώστε η ταχύτητά του να σχηματίζει γωνία ω = 45° με το οριζόντιο επίπεδο. Ποιο είναι το κλάσμα της ενέργειας που έχασε το βλήμα, καθώς περνούσε από τον κορμό του δέντρου;

(**Απ.** 0,5)

17. Ένα παιδί καθισμένο μέσα σ' ένα βαγόνι τρένου που κινείται με σταθερή ταχύτητα, πετάει κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα. Αυτή θα πέσει μπροστά του, πίσω του ή στα χέρια του; Τι συμβαίνει αν το τρένο κινείται με επιτάχυνση;

18. Μια μπάλα ποδοσφαίρου ρίχνεται οριζόντια από την άκρη της ταράτσας ενός κτηρίου ύψους H = 50m με αρχική ταχύτητα $υ_0$ = 5m/sec.

α) Ποια είναι η θέση της μπάλας μετά από 2sec;

β) Ποιο το μέτρο και ποια η διεύθυνση της ταχύτητάς της στη θέση αυτή με το οριζόντιο επίπεδο;

γ) Με ποια ταχύτητα φτάνει η μπάλα στο έδαφος;

(g = 10m/sec^2)

(**Απ.**α) 10m 20m β) 20,6m/sec 76° γ) 32m/sec)

19. Ένα αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 400km/h και ξαφνικά «βουτάει» υπό γωνία 30° ως προς τον ορίζοντα και αφήνει μια βόμβα, που πέφτει σε στόχο, ο οποίος βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 2km.

α) Από ποιο ύψος άφησε το αεροπλάνο τη βόμβα;

β) Πόσο χρόνο χρειάστηκε η βόμβα, για να φτάσει στο στόχο;

(g = 10m/sec^2)

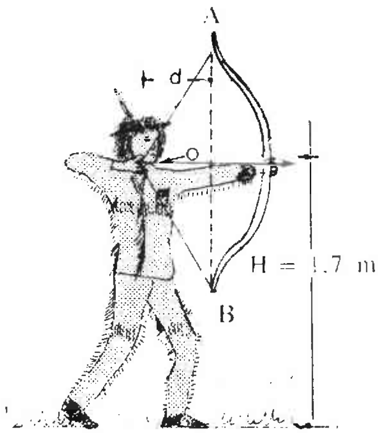
(**Απ.**α) 3318m β) 20,8sec)

20. Ένα αερόστατο ανεβαίνει από την επιφάνεια της γης με σταθερή κατακόρυφη ταχύτητα $υ_y$. Ταυτόχρονα λόγω του ανέμου το αερόστατο έχει και μια οριζόντια ταχύτητα $υ_x$ = Ky, ανάλογη με το ύψος στο οποίο βρίσκεται.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του αερόστατου.

β) Από ποια εξίσωση θα δίνεται η ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο;

(**Απ.**α) $x = \frac{K}{2υ_y}y^2$ β) $υ = υ_y\sqrt{1+K^2t^2}$)



21. Βέλος μάζας 100gr εκτοξεύεται από ύψος H = 1,7m και πέφτει στο έδαφος σε απόσταση x = 20m.

α) Με πόση κινητική ενέργεια έφυγε το βέλος από το τόξο (η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα).

β) Πόση ενέργεια δαπανήθηκε, για να τεντωθεί το τόξο;

γ) Αν η δύναμη που ασκεί η χορδή του τόξου στο χέρι του τοξότη, είναι ανάλογη με την απομάκρυνση d του μέσου της

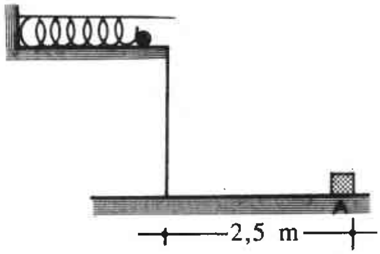
χορδής από τη θέση ισορροπίας, να υπολογιστεί η σταθερά της αναλογίας, δεδομένου ότι η βολή έγινε για d = 20cm.

($g = 10 m/sec^2$)

(**Απ.** α) 58,8Joule β) 58,8Joule γ) 2940N/m)

22. Με τη διάταξη του σχήματος προσπαθούμε να πετύχουμε το στόχο Α συσπειρώνοντας το ελατήριο που βρίσκεται μέσα στο σωλήνα. Συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά 2cm η σφαίρα πέφτει σε απόσταση 25cm μπροστά από το Α. Πόσο πρέπει να συσπειρώσουμε το ελατήριο για να πετύχουμε το στόχο;

(**Απ.** 2,2cm)



23. Σώμα μάζας m_2 = 2kgr είναι τοποθετημένο στην κορυφή κατακόρυφου στόχου που έχει ύψος h = 5m. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m_1 = 0,2kgr κινείται οριζόντια στο ύψος ακριβώς του m_2 και συγκρούεται μετωπικά με αυτό. Τα δυο σώματα πέφτουν στο έδαφος, σε αντίθετες διευθύνσεις το m_2 σε απόσταση s_2=2m και το m_1 σε απόσταση s_1=5m. Πόση ήταν η ταχύτητα του m_1, όταν συγκρούστηκε με το m_2;

($g = 10 m/sec^2$)

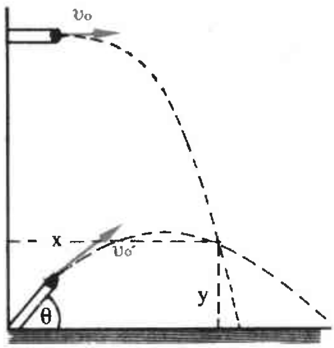
(**Απ.** 15m/sec)

24. Από δυο σημεία που απέχουν κατακόρυφα κατά h, ρίχνονται συγχρόνως δυο βλήματα τα οποία συναντιώνται όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ποια σχέση συνδέει τις δυο ταχύτητες $υ_0$ και $υ_0'$;

β) Μετά από πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα γίνει η συνάντηση των δυο βλημάτων;

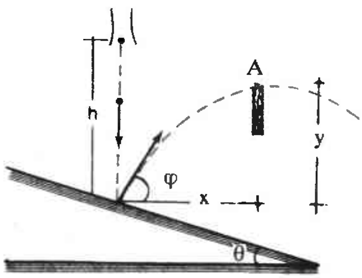
(Δίνονται οι ταχύτητες $υ_0$ και $υ_0'$, η γωνία θ και το g)



(**Απ.** α) $υ_0 = υ_0' συνθ$ β) $t = \frac{h}{υ_0' ημθ}$, $x = υ_0 \frac{h}{υ_0' ημθ}$, $y = h - \frac{1}{2} \frac{gh^2}{υ_0'^2 ημ^2θ}$)

25. Ένας κατασκευαστής χαλύβδινων σφαιρών προκειμένου να ξεχωρίσει τις ελαττωματικές σφαίρες κάνει το εξής πείραμα. Από ύψος h πάνω από το κεκλιμένο

επίπεδο (γωνίας θ) αφήνει τις σφαίρες να κτυπήσουν στο επίπεδο. Αν γίνει ελαστική κρούση, τότε οι σφαίρες αναπηδούν με την ίδια γωνία που προσπίπτουν και διαγράφουν παραβολική τροχιά. Ζητούνται οι συντεταγμένες x και y του σημείου Α που αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος αυτής της τροχιάς όπου πρέπει να βάλουμε το εμπόδιο, ώστε όσες σφαίρες δεν κάνουν ελαστική κρούση να χτυπούν σ' αυτό και έτσι να γίνεται ευκολότερα η διαλογή. Εφαρμογή $\theta = 15^o$, $h = 2m$.



(**Απ.** $h\eta\mu4\theta, h\sigma\upsilon\nu^2 2\theta$)

26. Ένα αερόστατο ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_o = 5m/sec$. Όταν το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος h, αφήνεται να πέσει ένα μικρό σώμα, που φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $t = 10sec$.

α) Πόσο είναι το ύψος h;

β) Με ποια ταχύτητα το σώμα φτάνει στο έδαφος;

γ) Σε ποιο ύψος Η βρίσκεται το αερόστατο τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος; ($g = 10m/sec^2$)

(**Απ.** α) 450m β) −95m/sec γ) 500m)

27. Για να είναι δυνατό να παραμένει ένας δορυφόρος σε τροχιά, πρέπει να έχει κάποια ελάχιστη ταχύτητα, διότι:

α) Η έλξη της γης πρέπει να παίζει το ρόλο της αναγκαίας κεντρομόλου δύναμης.

β) Η ταχύτητα του δορυφόρου πρέπει να υπερβαίνει την ταχύτητα διαφυγής.

γ) Η τροχιά του δορυφόρου είναι ελλειπτική.

28. Οι τεχνητοί δορυφόροι που περιστρέφονται σχετικά κοντά στη γη, παραμένουν στην τροχιά τους για λίγα μόνο χρόνια. Αντίθετα, η σελήνη που και αυτή περιστρέφεται γύρω από τη γη έχει πάντα την ίδια τροχιά. Αυτό οφείλεται στο ότι:

α) Η σελήνη έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα και συνεπώς πολύ μεγαλύτερη αδράνεια από τους τεχνητούς δορυφόρους.

β) Η ταχύτητα των δορυφόρων δε ξεπερνά την ταχύτητα διαφυγής ($\upsilon_\delta = 11{,}2km/sec$).

γ) Οι τεχνητοί δορυφόροι βρίσκονται πιο κοντά στη γη από ότι η σελήνη.

δ) Στους τεχνητούς δορυφόρους ασκείται δύναμη τριβής που αντιστέκεται στην κίνησή τους, γιατί ακόμα και στα μεγάλα ύψη, η πυκνότητα της ατμόσφαιρας δεν είναι μηδέν. Ποια από τις παραπάνω ερμηνείες είναι σωστή;

29. Μπορεί ένας δορυφόρος να κινείται σε τροχιά, που το κέντρο της να βρίσκεται στο Βόρειο πόλο;

30. Ένας δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη και σε ύψος h από την επιφάνειά της.

α) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του δορυφόρου;

β) Πόση είναι η κινητική του ενέργεια;

γ) Η ταχύτητα με την οποία κινείται ο δορυφόρος είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του. Ισχύει το ίδιο και για την ολική του ενέργεια;

Δίνεται η ακτίνα και η μάζα της γης Rг και Mг αντίστοιχα καθώς και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

(**Απ.** α) $-G\frac{mM_Γ}{R_Γ+h}$ β) $\frac{1}{2}G\frac{mM_Γ}{R_Γ+h}$ γ) όχι)

31. Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στην ταχύτητα περιστροφής ενός δορυφόρου στο μικρότερο δυνατό ύψος γύρω από τη γη και στην ταχύτητα διαφυγής $υ_δ$;

(**Απ.** $υ=υ_δ/\sqrt{2}$)

32. Ένα διαστημικό όχημα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης κατακόρυφα και φτάνει σε ύψος h έχοντας κατακόρυφη ταχύτητα $υ_1$. Το όχημα είναι εφοδιασμένο με μικρούς βοηθητικούς πυραύλους και με τη βοήθειά τους μπαίνει σε κυκλική τροχιά μετατρεπόμενο σε τεχνητό δορυφόρο της γης.

α) Πόση είναι η πρόσθετη ταχύτητα $υ_κ$ που προσδίδουν στο όχημα οι βοηθητικοί πύραυλοι, για να το θέσουν στην κυκλική τροχιά;

β) Πόση θα ήταν η ταχύτητα αυτή, αν η μάζα του οχήματος ήταν διπλάσια;

Δίνεται η ακτίνα της γης Rг, η μάζα της Mг και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G.

(**Απ.**α) $\sqrt{υ_1^2+G\frac{M_Γ}{R_Γ+h}}$, $εφθ = υ_1\sqrt{\frac{R_Γ+h}{GM_Γ}}$ β) ίδια)

33. Από την επιφάνεια της γης, όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g, εκτοξεύεται πύραυλος με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας διαφυγής $υ_δ$.

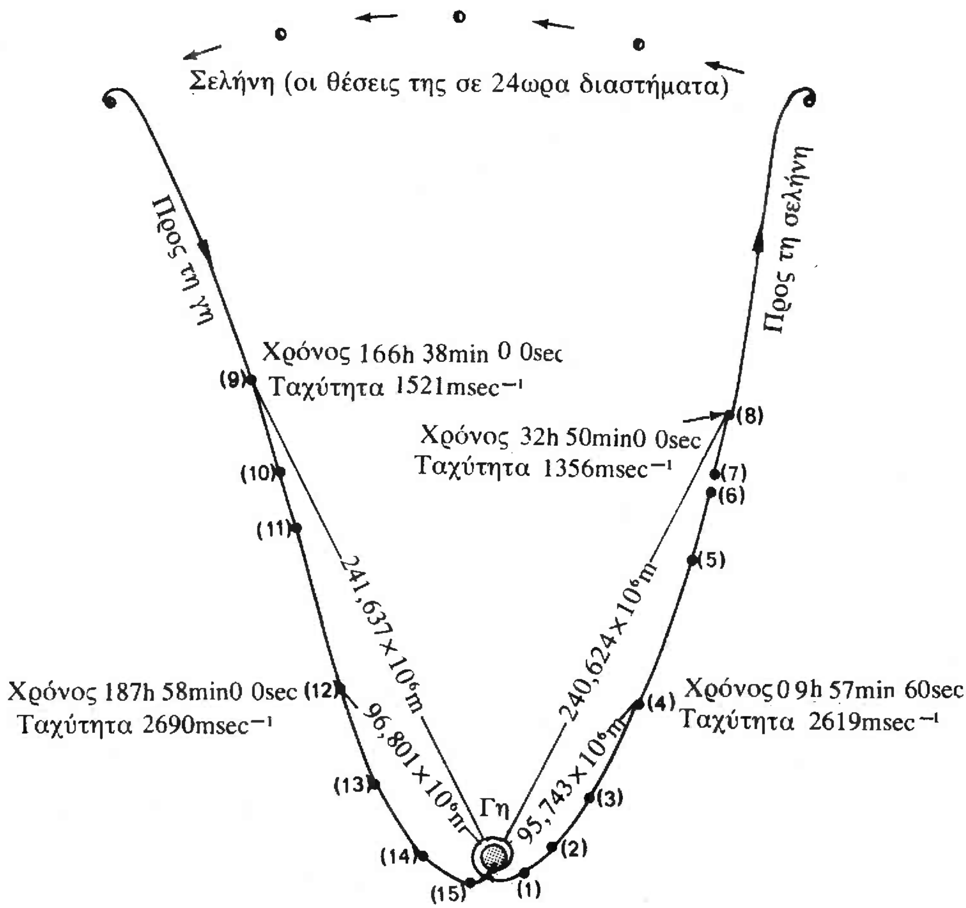
Να βρεθεί μια έκφραση της ταχύτητας που θα έχει ο πύραυλος σε απόσταση r από το κέντρο της γης, σε συνάρτηση με τα g, Rг και r. Να βρεθεί επίσης το μακρύτερο σημείο από τη γη, στο οποίο μπορεί να φτάσει αυτός ο πύραυλος. Ατμοσφαιρική τριβή και περιστροφή της γης δε θα ληφθούν υπ' όψη.

(**Απ.**$υ = \sqrt{gR_Γ(\frac{2R_Γ}{r}-\frac{3}{2})}$, $r = \frac{4}{3}R_Γ$)

34. Ένας πύραυλος επιταχύνεται σε μια ταχύτητα $υ = 2\sqrt{gR_Γ}$ κοντά στην επιφάνεια της γης και κατόπιν οι μηχανές του παύουν να λειτουργούν. Δείξτε ότι θα εγκαταλείψει

για πάντα τη γη και ότι σε πολύ μεγάλη απόσταση απ' αυτή η ταχύτητα του θα είναι $\sqrt{2gRr}$.

35. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά που ακολούθησε το διαστημόπλοιο Απόλλων 11, τόσο κατά τη μετάβαση όσο και κατά την επιστροφή από τη σελήνη.



Όταν το διαστημόπλοιο απείχε από το κέντρο της γης $209 \cdot 10^6$m, είχε ταχύτητα 1527m/sec (σημείο 7 της τροχιάς). Για το χρονικό διάστημα 26h 45min μέχρι 32h 50min (σημείο 8 της τροχιάς) δε λειτούργησαν οι μηχανές του διαστημόπλοιου και η ταχύτητά του ελαττώθηκε σε 1356m/sec. Όπως φαίνεται από το σχήμα, το σημείο 8 της τροχιάς απείχε από το κέντρο της γης $241 \cdot 10^6$m.

α) Γιατί ελαττώθηκε η ταχύτητα του διαστημόπλοιου;
β) Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός επιβράδυνσης;
γ) Για το παραπάνω χρονικό διάστημα πόση ήταν η μέση βαρυτική έλξη της γης για κάθε kgr μάζας του διαστημόπλοιου; (Η απάντηση θα δοθεί με τη βοήθεια της β) Η έλξη της σελήνης δε-λαμβάνεται υπόψη.
δ) Αν το διαστημόπλοιο εκινείτο κατά μήκος της ευθείας που το συνδέει με το κέντρο της γης, θα δεχόταν μεγαλύτερη, ίση, ή μικρότερη επιβράδυνση από αυτή που δέχεται όταν κινείται στην τροχιά του και γιατί;

(**Απ.** β) $7{,}8 \cdot 10^{-3}$m/sec^2 γ) $7{,}8 \cdot 10^{-3}$N/kgr)

36. Προκειμένου να εξεταστεί κατά πόσο αληθεύει ότι η έλξη της γης είναι αντίστροφα ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης, χρησιμοποιήθηκαν τα εξής στοιχεία από την πτήση του διαστημόπλοιου Απόλλων 11:

α/α	χρόνος από την εκτόξευση	απόσταση r από το κέντρο της γης (m)	ταχύτητα (m/sec)
	h min sec		
1	03:58:00	$26{,}3 \cdot 10^6$	5374
	04:08:00	$29{,}0 \cdot 10^6$	5102
2	05:58:00	$54{,}4 \cdot 10^6$	3633
	06:08:00	$56{,}4 \cdot 10^6$	3560
3	09:58:00	$95{,}7 \cdot 10^6$	2619
	10:08:00	$97{,}2 \cdot 10^6$	2594
4	19:58:00	$169{,}9 \cdot 10^6$	1796
	20:08:00	$170{,}9 \cdot 10^6$	1788

Οι προωθητικές μηχανές σταμάτησαν να λειτουργούν πριν γίνουν οι μετρήσεις.

α) Σε κάθε ζευγάρι τιμών οι τιμές διαφέρουν χρονικά κατά 10min. Στο χρονικό διάστημα των 10min, για το πρώτο ζευγάρι, η ταχύτητα μεταβλήθηκε κατά 272m/sec. Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός ελάττωσης της ταχύτητας;
β) Γράψτε (χωρίς άλλο υπολογισμό) τη δύναμη που ασκεί η γη ανά kgr μάζας του διαστημόπλοιου, όταν αυτό βρίσκεται σε απόσταση $27{,}7 \cdot 10^6$m από το κέντρο της γης (αυτή είναι η μέση απόσταση για το ζευγάρι τιμών υπ' αριθμό 1 του πίνακα). Να χρησιμοποιηθεί η απάντηση στο α.

γ) Να χρησιμοποιηθούν τα άλλα ζευγάρια τιμών και να υπολογιστεί ανάλογα η δύναμη ανά kgr σε κάθε περίπτωση. Να συμπληρωθεί ο πίνακας που ακολουθεί:

α/α	μέση απόσταση r από το κέντρο της γης (m)	δύναμη ανά kgr ή ένταση πεδίου βαρύτητας (N/kgr)
1	$27{,}7\cdot10^6$	
2		
3		
4		

δ) Αποδώστε γραφικά σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη δύναμη ανά kgr σε συνάρτηση με το $1/r^2$. Οι τιμές να παρθούν από τον τελευταίο πίνακα. Τι συμπέρασμα βγάζετε; Τι παριστάνει η κλίση της γραμμής;

(**Απ.** α) $0{,}453 m/sec^2$ β) 0,453N/kgr δ) το g μεταβάλλεται ανάλογα με το $1/r^2$)

37. Ο πίνακας δίνει τις απόλυτες τιμές του δυναμικού $V=\frac{GMr}{r}$ σε διάφορες αποστάσεις r από το κέντρο της γης.

r(m)	$6{,}38\cdot10^6$	$6{,}39\cdot10^6$	$6{,}75\cdot10^6$	$10{,}0\cdot10^6$	$20{,}0\cdot10^6$	$40{,}0\cdot10^6$	$80{,}0\cdot10^6$
$V(\frac{Joule}{kgr})$	$62{,}7\cdot10^6$	$62{,}6\cdot10^6$	$59{,}3\cdot10^6$	$40{,}0\cdot10^6$	$20{,}0\cdot10^6$	$10{,}0\cdot10^6$	$5{,}0\cdot10^6$

α. Με τη βοήθεια του πίνακα να βρείτε πόση ενέργεια χρειάζεται για τη μεταφορά 1 kgr μάζας από την επιφάνεια της γης, $r=6{,}38\cdot10^6 m$ σε απόσταση $r'=6{,}39\cdot10^6 m$.

β. Πόση δύναμη, θεωρούμενη σταθερή, πρέπει να ενεργήσει στη μάζα 1kgr για να την ανυψώσει από την επιφάνεια της γης στο ύψος των 10km, με την προϋπόθεση ότι το έργο της θα εκφράζει μεταφορά ενέργειας ίση με την απάντηση στο ερώτημα α.

(**Απ.** α) 10^5Joule β) 10N)

38. Ο πίνακας δίνει την ταχύτητα και την κινητική ενέργεια ανά kgr μάζας του διαστημόπλοιου Απόλλων 11 σε συνάρτηση με την απόσταση από τη γη κατά την κίνησή του προς τη σελήνη.

α/α	απόσταση r από το κέντρο της γης (m)	ταχύτητα (m/sec)	κινητική ενέργεια ανά kgr μάζας (Joule/kgr)
1	$11{,}0\cdot 10^6$	8406	$35{,}33\cdot 10^6$
2	$26{,}3\cdot 10^6$	5374	$14{,}44\cdot 10^6$
3	$54{,}4\cdot 10^6$	3653	$6{,}60\cdot 10^6$
4	$95{,}7\cdot 10^6$	2619	$3{,}43\cdot 10^6$
5	$169{,}9\cdot 10^6$	1796	$1{,}61\cdot 10^6$
6	$209{,}2\cdot 10^6$	1532	$1{,}17\cdot 10^6$
7	$240{,}6\cdot 10^6$	1356	$0{,}92\cdot 10^6$

α. Όπως φαίνεται από τον πίνακα, σε απόσταση $11{,}0\cdot 10^6$m από το κέντρο της γης η κινητική ενέργεια ανά kgr είναι $35{,}33\cdot 10^6$ Joule/kgr, ενώ σε απόσταση $240{,}6\cdot 10^6$m είναι $0{,}92\cdot 10^6$ Joule/kgr. Πόσο αυξήθηκε η δυναμική ενέργεια ανά Kgr μάζας του διαστημόπλοιου;

β. Από τον πίνακα φαίνεται ότι η κινητική ενέργεια συνεχώς ελαττώνεται. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια απόσταση r_o στην οποία μηδενίζεται, πόση θα είναι η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια ανά kgr μεταξύ των αποστάσεων $11{,}0\cdot 10^6$m και r_o;

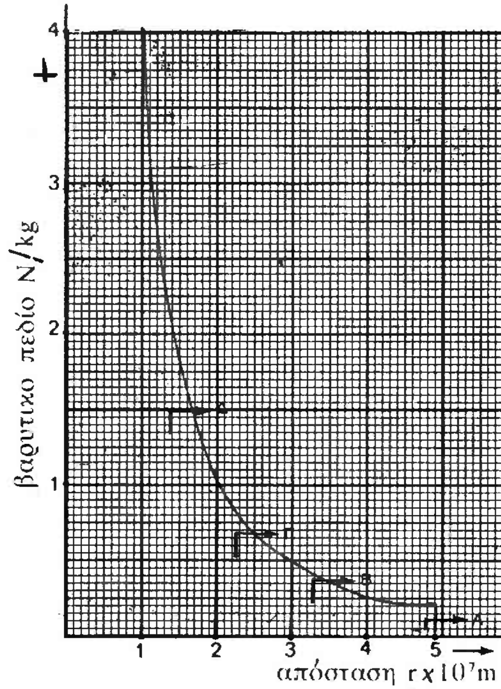
γ. Από τον προηγούμενο πίνακα μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ των διαφόρων θέσεων r και του r_o. Αποδώστε γραφικά αυτή τη μεταβολή σε συνάρτηση με το αντίστροφο της απόστασης από το κέντρο της γης. Τι γραμμή παίρνετε; Πώς από την κλίση της μπορεί να υπολογιστεί η μάζα της γής;

(**Απ.** α) $34{,}41\cdot 10^6 \dfrac{\text{Joule}}{\text{kgr}}$ β) $35{,}33\cdot 10^6 \dfrac{\text{Joule}}{\text{kgr}}$)

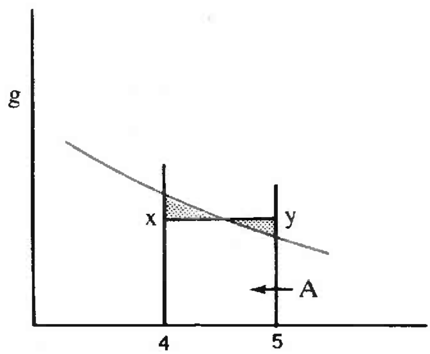
39. Η γραφική παράσταση δίνει τη μεταβολή της έντασης του πεδίου βαρύτητας σε συνάρτηση με την απόσταση r από το κέντρο της γης. Σκοπός της άσκησης είναι να ελέγξουμε γραφικά την αλήθεια της πρότασης: Αν η βαρυτική δύναμη είναι ανάλογη του $-\dfrac{1}{r^2}$, τότε η δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη του $\dfrac{1}{r}$.

Δίνεται η ένταση g του βαρυτικού πεδίου ως συνάρτηση με την απόσταση, $g=\dfrac{GM_Γ}{r^2}$ και το γινόμενο $GM_Γ=4\cdot 10^{14}$ Nm^2kgr^{-1}.

α. Να δικαιολογηθεί γιατί η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη παριστάνει μεταβολή στη δυναμική ενέργεια ανά kgr μάζας, όταν ένα σώμα μετακινείται μεταξύ δύο θέσεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικό r.



β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν Α με τον εξής τρόπο: Να χαραχθεί το ευθύγραμμο τμήμα xy κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται να έχουν ίσα εμβαδά και το xy να είναι παράλληλο στον άξονα των r. Τότε το εμβαδόν Α είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τον άξονα των r και το τμήμα xy.



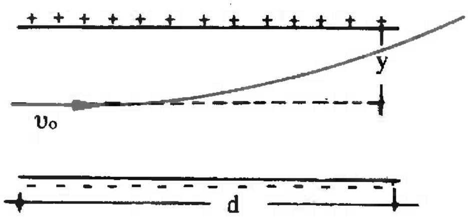
γ. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

r (m)	εμβαδόν	Joule/kgr
$4\cdot10^7$	Α	
$3\cdot10^7$	Α+Β	
$2\cdot10^7$	Α+Β+Γ	
$1\cdot10^7$	Α+Β+Γ+Δ	

Στην κενή στήλη να τοποθετήσετε τις τιμές των εμβαδών που υπολογίστηκαν με τον παραπάνω τρόπο και που αντιστοιχούν στις μεταβολές της δυναμικής ενέργειας για μετακίνηση από την απόσταση $5\cdot10^7$m μέχρι την απόσταση r.

δ. Να παρασταθεί γραφικά η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ανά kgr σε συνάρτηση με το 1/r. Τι συμπεράσματα βγάζετε από τη γραφική αυτή παράσταση;

40. Η απόκλιση της δέσμης των ηλεκτρονίων σε ένα παλμογράφο γίνεται με τη βοήθεια του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ δυο παραλλήλων πλακών $\mathcal{E}=1{,}2\cdot10^4$N/Cb Το μήκος των πλακών είναι d=1,5cm. Ποιά απόκλιση y θα υποστεί η δέσμη αν εισέρχεται κάθετα στο πεδίο με κινητική ενέργεια $\varepsilon_K=2$KeV $=3{,}2\cdot10^{-16}$Joule. ($e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Cb).



(Απ. 0,337mm)

41. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται με ταχύτητα $υ_o$ σε μια περιοχή όπου υπάρχει ένα κατακόρυφο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\mathcal{E}$. Αν η ταχύτητα $υ_o$ του ηλεκτρονίου είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου, να βρεθεί:

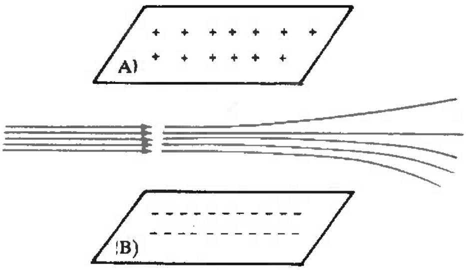
α. Σε πόσο χρόνο το ηλεκτρόνιο έχει οριζόντια απομάκρυνση από το σημείο εισόδου ίση με x.

β. Πόσο είναι το μέτρο της ταχύτητάς του στη θέση αυτή.
Δίνεται το φορτίο q_e και η μάζα του ηλεκτρονίου m_e.

(Απ. α) $t=\dfrac{x}{υ_o}$ β) $υ=\sqrt{υ_o^2+\dfrac{\mathcal{E}^2 q_e^2 x^2}{m_e^2 υ_o^2}}$)

42. Μια δέσμη από ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια, σωμάτια α και Na^{+}*, που έχουν την ίδια ταχύτητα εισέρχεται στο ηλεκτροστατικό πεδίο το οποίο δημιουργούν οι πλάκες Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

* Τα άτομα του Na έχουν μαζικό αριθμό 23.



Τα σωμάτια αποκλίνουν και πλησιάζουν προς τις πλάκες. Ποια από τα σωμάτια θα πλησιάσουν πιο πολύ προς την πλάκα Β;

Α τα ηλεκτρόνια

Β τα πρωτόνια

Γ τα νετρόνια

Δ τα ιονισμένα άτομα του Νατρίου

Ε τα σωμάτια α

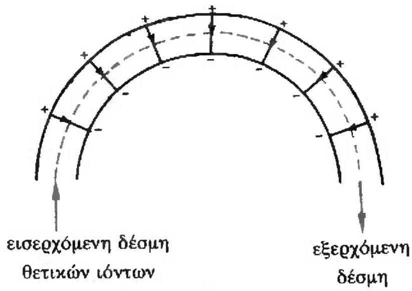
43. Ας υποθέσουμε ότι μια δέσμη θετικών ιόντων μπορεί να διαγράψει την τροχιά η οποία φαίνεται στο σχήμα, κινούμενη μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο, που δημιουργείται μεταξύ των ημικυλινδρικών ηλεκτροδίων.

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

α. Όλα τα εξερχόμενα σωματίδια έχουν αυξήσει την κινητική τους ενέργεια κατά το ίδιο ποσοστό.

β. Η κινητική ενέργεια των εξερχόμενων σωματιδίων είναι ίση με την αρχική.

γ. Τα εξερχόμενα σωματίδια έχουν μικρότερη κινητική ενέργεια.



44. Μια δέσμη όμοιων φορτισμένων σωματιδίων επιταχύνεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από διαφορά δυναμικού 400Volt και στη συνέχεια εισέρχεται κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $B=2\cdot10^{-2}$ Tesla. Αν η αρχική κινητική ενέργεια των σωματιδίων της δέσμης θεωρηθεί αμελητέα και η τροχιά που διαγράφεται στο μαγνητικό πεδίο έχει ακτίνα 20,37cm, να υπολογιστεί ο λόγος φορτίο προς μάζα των σωματιδίων.

(Απ. $48\cdot10^{6}$Cb/kgr)

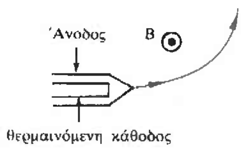
45. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά μιας λεπτής δέσμης ηλεκτρονίων, που εισέρχεται κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Ποιες απ' τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές;

α. Όλα τα ηλεκτρόνια εισέρχονται με την ίδια ταχύτητα στο μαγνητικό πεδίο.

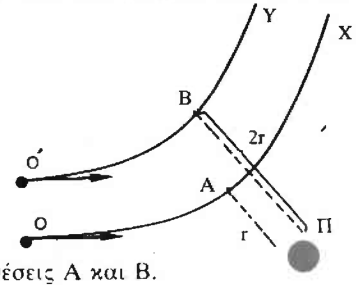
β. Τα ηλεκτρόνια μέσα στο μαγνητικό πεδίο έχουν επιτάχυνση.

γ. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων αυξάνει μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

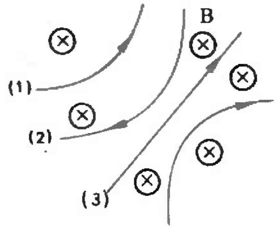
δ. Η τροχιά είναι τμήμα κύκλου.



46. Στο σχήμα φαίνονται οι τροχιές ΟΧ και Ο΄Υ που διαγράφουν δύο σωματίδια α λόγω της επίδρασης του πυρήνα Π ο οποίος απέχει από τα σημεία Α και Β των τροχιών αποστάσεις r και 2r αντίστοιχα.



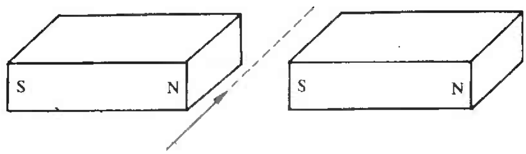
α. Γιατί οι τροχιές αποκλίνουν προς τα πάνω;
β. Ποια σχέση συνδέει τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια στις θέσεις Α και Β από τον πυρήνα Π.
γ. Σχεδιάστε τις ταχύτητες των σωματιδίων στις θέσεις Α και Β.
δ. Η ταχύτητα του σωματιδίου που διαγράφει την τροχιά ΟΧ είναι μεγαλύτερη στη θέση Ο ή στη θέση Α και γιατί;



47. Τέσσερα σωματίδια ακολουθούν τις τροχιές που δείχνονται στο σχήμα. Τι συμπέρασμα μπορεί να βγάλουμε για το είδος του φορτίου κάθε σωματιδίου;

48. Αν ένα ηλεκτρόνιο δεν εκτρέπεται, όταν περνάει μέσα από μια περιοχή στην οποία δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει και μαγνητικό πεδίο σ' αυτή την περιοχή;

49. Μια δέσμη αρνητικά φορτισμένων σωματιδίων εισέρχεται κάθετα στο οριζόντιο μαγνητικό πεδίο που σχηματίζεται μεταξύ των δύο μαγνητών.



Ποιο είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης του πεδίου στη δέσμη;
α. Τα σωματίδια συνεχίζουν να κινούνται στην ίδια διεύθυνση και με την ίδια ταχύτητα με την οποία μπήκαν στο πεδίο.
β. Τα σωματίδια αποκλίνουν προς το νότιο μαγνητικό πόλο.
γ. Τα σωματίδια αποκλίνουν προς το βόρειο μαγνητικό πόλο.
δ. Τα σωματίδια αποκλίνουν προς τα πάνω.
ε. Τα σωματίδια αποκλίνουν προς τα κάτω.

50. Αν ένας μαγνήτης τοποθετηθεί πολύ κοντά στην οθόνη μιας τηλεόρασης, προκαλεί παραμόρφωση στην εικόνα της.

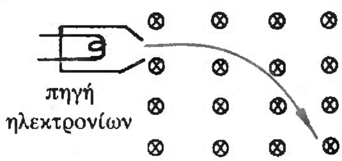
Ποια από τις ακόλουθες ερμηνείες του φαινομένου είναι σωστή;

α. Δημιουργείται ηλεκτροστατική άπωση στη δέσμη των ηλεκτρονίων που σχηματίζουν την εικόνα.

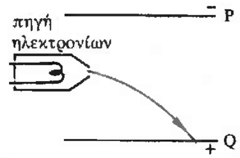
β. Η παρουσία του μαγνήτη μεταβάλλει τις ιδιότητες της φθορίζουσας οθόνης.

γ. Στα κινούμενα ηλεκτρόνια ασκείται δύναμη Laplace, διότι κινούνται σε μαγνητικό πεδίο και για το λόγο αυτό αποκλίνουν με αποτέλεσμα την παραμόρφωση της εικόνας.

51. Μια δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, όπως φαίνεται στο σχήμα α. Στο σχήμα β η ίδια δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των οριζόντιων παράλληλων πλακών P, Q.



Σχ. α



Σχ. β

Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις που περιγράφουν την κίνηση στο πεδίο είναι σωστή για κάθε περίπτωση:

I. ΣΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

α. Η τροχιά είναι τμήμα περιφέρειας κύκλου και η επιτάχυνση είναι πάντα κατακόρυφη (δηλαδή έχει φορά προς το κάτω μέρος της σελίδας).

β. Η τροχιά είναι τμήμα περιφέρειας κύκλου και η επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη στην τροχιά.

γ. Η τροχιά είναι τμήμα παραβολής και η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη.

δ. Η τροχιά είναι τμήμα παραβολής και η επιτάχυνση είναι πάντοτε κάθετη στην τροχιά.

II. ΣΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

α. Η τροχιά είναι τμήμα παραβολής και η επιτάχυνση είναι πάντοτε κάθετη σ' αυτή.

β. Η τροχιά είναι τμήμα παραβολής και η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη.

γ. Η τροχιά είναι τμήμα περιφέρειας κύκλου και η επιτάχυνση είναι πάντοτε κάθετη στην τροχιά.

δ. Η τροχιά είναι τμήμα περιφέρειας κύκλου και η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη.

52. Ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η ταχύτητά του υ να σχηματίζει γωνία θ με την επαγωγή B.

Ποια από τα μεγέθη που αναφέρονται στην κίνηση του σωματιδίου μεταβάλλονται;

α. η ορμή;

β. η κινητική ενέργεια;

γ. η ταχύτητα;

53. Ένα αρνητικό δισθενές ιόν επιταχύνεται μεταξύ δυο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού V=100Volt. Στη συνέχεια το ιόν μπαίνει σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B=1 Tesla κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και διαγράφει ημικύκλιο ακτίνας R=10cm.

α. Πόση είναι η μάζα του ιόντος;

β. Σε πόσο χρόνο το ιόν διαγράφει έναν πλήρη κύκλο;

γ. Αν η διαφορά δυναμικού που επιταχύνει το ιόν αυξηθεί, τι θα συμβεί με την περίοδο και την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του ιόντος; (φορτίο ηλεκτρονίου $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$Cb)

(**Απ.** α) $1{,}6\cdot 10^{-23}$kgr β) $3{,}14\cdot 10^{-4}$sec)

54. Ένα κύκλοτρο έχει διάμετρο 1,52m, λειτουργεί με μαγνητικό πεδίο 1,6Tesla και χρησιμοποιείται για την επιτάχυνση δευτερονίων.

α. Να βρεθεί η συχνότητα του εναλλακτήρα που τροφοδοτεί τα ηλεκτρόδια.

β. Με ποιά κινητική ενέργεια εξέρχονται τα δευτερόνια;

γ. Αν η τάση μεταξύ των ηλεκτροδίων είναι 40000 Volt, σε πόσο χρόνο κάθε δευτερόνιο βγαίνει από το κύκλοτρο;

δ. Αν μεγαλώσουμε την τάση ανάμεσα στα ηλεκτρόδια, τι θα μεταβληθεί στη λειτουργία του κύκλοτρου;

Δίνεται το φορτίο και η μάζα του δευτερονίου $q=1{,}6\cdot 10^{-19}$Cb και $m=3{,}36\cdot 10^{-27}$ kgr αντίστοιχα

(**Απ.** α) 12,13MHz, β) 35,2MeV, γ) 35,2μsec, δ) ο χρόνος περιστροφής μέσα στο κύκλοτρο).

55. Ένα κύκλοτρο έχει τα στοιχεία B=1,8 Tesla, R=0,48m και επιταχύνει θετικά φορτισμένα σωματίδια, για τα οποία είναι $q/m=4{,}8\cdot 10^{7}$ Cb/kgr.

α. Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία τα σωματίδια βγαίνουν από το κύκλοτρο;

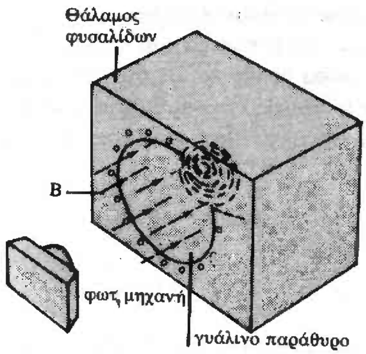
β. Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο, που σχηματίζεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες φορτισμένες μεταλλικές πλάκες, για να πετύχουμε την ίδια ταχύτητα για τα σωματίδια;

(**Απ.** α) $4{,}14\cdot 10^{7}$m/sec β) όχι)

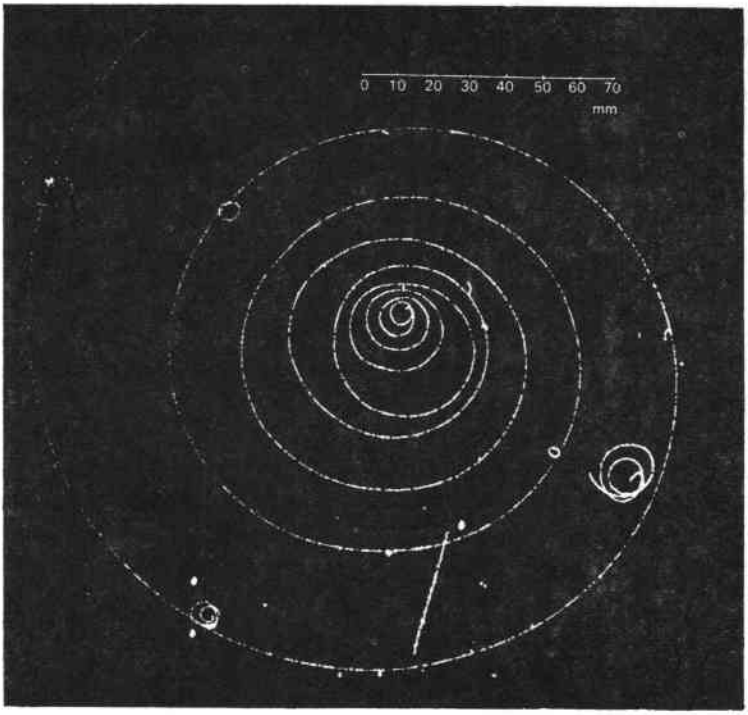
56. Μια δέσμη που αποτελείται από ιόντα άνθρακα και πρωτόνια αναλύεται με το φασματογράφο του σχήματος 4.19. Αν υποθέσουμε ότι το ιόν του άνθρακα και το πρωτόνιο έχουν το ίδιο φορτίο, να βρεθεί η μάζα του πρωτονίου σε συνάρτηση με τη μάζα του άνθρακα και τις αποστάσεις ΑΓ και ΑΔ που βρίσκονται τα ίχνη της δέσμης.

$$\left(\textbf{Απ. } m_p=m_c\left(\frac{ΑΓ}{ΑΔ}\right)^2\right)$$

57. Όταν μια δέσμη φορτισμένων σωματιδίων κινείται μέσα σε υγρό που έχει υπερθερμανθεί, τότε κατά μήκος της τροχιάς της δέσμης σχηματίζονται φυσαλίδες λόγω συγκρούσεων με τα μόρια του υγρού με αποτέλεσμα η διαδρομή της να γίνεται ορατή και να μπορεί να φωτογραφηθεί (η διάταξη λέγεται θάλαμος φυσαλίδων). Στο σχ. α φαίνεται ένας τέτοιος θάλαμος, ενώ το σχ. β είναι η φωτογραφία της τροχιάς μιας δέσμης ηλεκτρονίων που κινήθηκε μέσα σ' αυτόν. Η διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.



Σχ. α

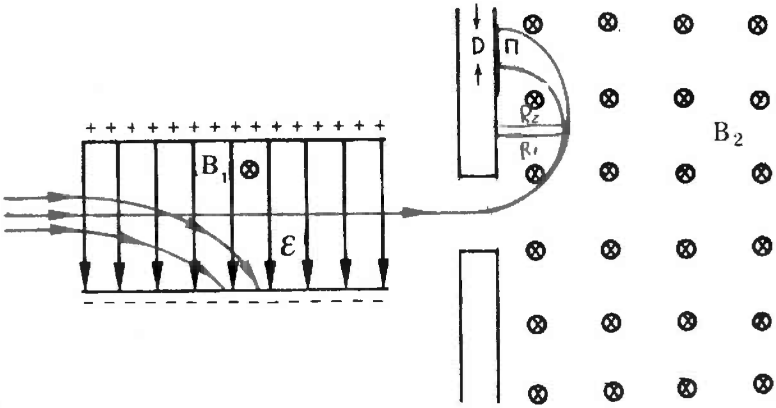


Σχ. β

α. Γιατί η τροχιά είναι σπειροειδής και δεν είναι κυκλική;

β. Αν η μαγνητική επαγωγή ήταν B=1,2Tesla, να υπολογιστεί η αρχική ορμή ενός ηλεκτρονίου, με τη βοήθεια της κλίμακας που φαίνεται στη φωτογραφία.

58. Μια παράλληλη δέσμη από θετικά φορτισμένα ιόντα που έχουν διαφορετικά φορτία, διαφορετικές μάζες και ταχύτητες, εισέρχεται σε περιοχή όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο B_1 και ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}$. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση της δέσμης, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Μερικά από τα ιόντα δεν εκτρέπονται και συνεχίζουν να κινούνται στην αρχική τους διεύθυνση. Τα ιόντα αυτά οδηγούνται σε χώρο που υπάρχει δεύτερο μαγνητικό πεδίο B_2, μέσα στο οποίο αποκλίνουν και αφού διαγράψουν ημικυκλική τροχιά, πέφτουν πάνω σε φωτογραφική πλάκα Π, στην οποία δημιουργούν ίχνη.

α. Εξηγείστε γιατί μερικά ιόντα αποκλίνουν μέσα στο σύνθετο πεδίο, ενώ άλλα συνεχίζουν ανεπηρέαστα την πορεία τους.

β. Υπολογίστε την ταχύτητα των ιόντων που εξέρχονται ανεπηρέαστα από το χώρο του σύνθετου πεδίου.

γ. Αν η αρχική δέσμη αποτελείται από δύο είδη ιόντων διαφορετικής μάζας αλλά με το ίδιο φορτίο και την ίδια ταχύτητα, δημιουργούνται δύο ίχνη που απέχουν μεταξύ τους κατά D. Αν m_1, m_2 οι μάζες των ιόντων και q το φορτίο τους, υπολογίστε την απόσταση D σε συνάρτηση με τα $\mathcal{E}$, B_1, B_2, m_1, m_2, q.

δ. Υπολογίστε την απόσταση D στην περίπτωση που $\mathcal{E}=2\cdot10^3\frac{N}{Cb}$ $B_1=3\cdot10^{-2}$ Tesla, $B_2=0{,}1$Tesla, $m_1=33{,}4\cdot10^{-27}$kgr, $m_2=36{,}74\cdot10^{-27}$kgr, $q=1{,}6\cdot10^{-19}$Cb.

(**Απ.** α) Δεν αποκλίνουν μόνο αυτά για τα οποία ισχύει: $F_L=F_E$.
β) $\upsilon=\frac{\mathcal{E}}{B_1}$ γ) $D=\frac{2(m_2-m_1)}{q}\ \frac{\mathcal{E}}{B_1B_2}$ δ) D=28mm)

5
Μελέτη κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος

Κανόνες Kirchhoff

Όπως είναι γνωστό, ο νόμος του Ohm συνδέει τη διαφορά δυναμικού ή τάση V στα άκρα ενός αγωγού, την ένταση I του ρεύματος που τον διαρρέει και την αντίστασή του R (R=V/I). Στην περίπτωση που το κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή της οποίας η ΗΕΔ είναι E ο νόμος του Ohm γράφεται:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}}$$

όπου $R_{ολ}$ η ολική αντίσταση του κυκλώματος και I το ρεύμα που διαρρέει την πηγή.

Στην πράξη τα ηλεκτρικά κυκλώματα δεν είναι συνήθως τόσο απλά, ώστε η άμεση χρήση του νόμου του Ohm να μας δίνει την ΗΕΔ μιας πηγής, ή την ένταση του ρεύματος με εύκολο τρόπο. Γι' αυτό σε σύνθετα κυκλώματα γίνεται χρήση των δύο κανόνων του Kirchhoff.

5.1. Πρώτος κανόνας του Kirchhoff

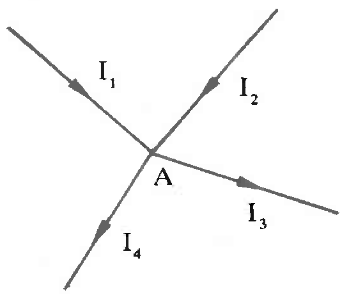
Ο πρώτος κανόνας του Kirchhoff διατυπώνεται ως εξής: **Σε ένα κόμβο που συνέρχονται αγωγοί οι οποίοι διαρρέονται από ηλεκτρικά ρεύματα, το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων είναι μηδέν, δηλαδή:**

$$\Sigma I = 0 \tag{5.1}$$

Για τον κόμβο Α στο σχήμα 5.1 είναι:

$$\Sigma I = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

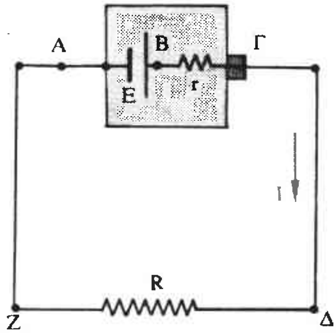
Η φυσική ερμηνεία της σχέσης (5.1) είναι, ότι όσο φορτίο προσέρχεται στον κόμβο Α στη μονάδα του χρόνου, τόσο και απομακρύνεται απ' αυτόν. Κατά συνέπεια, το άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που προσέρχονται πρέπει να ισούται με το αθροίσμα των εντάσεων αυτών που απομακρύνονται.



Σχ. 5.1

5.2. Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 5.2, το οποίο περιλαμβάνει πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης E, εσωτερικής αντίστασης r και αντίσταση R. Όπως γνωρίζουμε, με την επίδραση της ΗΕΔ της πηγής τα ηλεκτρικά φορτία θα κινηθούν στο κύκλωμα και η ενέργεια της πηγής θα μετατραπεί σε θερμότητα μέσω των αντιστάσεων r και R. Έτσι σε χρονικό διάστημα t από τη στιγμή που το κύκλωμα άρχισε να διαρρέεται από ρεύμα, η ενέργεια που θα έχει δώσει η πηγή θα είναι EIt και η ενέργεια που θα έχει μετατραπεί σε θερμότητα θα είναι $I^2Rt + I^2rt$. Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε:



Σχ. 5.2

$$EIt = I^2rt + I^2Rt$$

$$\text{ή} \quad E - Ir - IR = 0 \qquad (5.2)$$

Η σχέση αυτή με λόγια διατυπώνεται ως εξής: **Κατά μήκος ενός κλειστού κυκλώματος που διαρρέεται από ρεύμα, το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού είναι μηδέν.** Η πρόταση αυτή αποτελεί το 2ο κανόνα του Kirchhoff και εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας στα ηλεκτρικά κυκλώματα*.

Επειδή ο 2ος κανόνας του Kirchhoff βασίζεται σε μια θεμελειακή αρχή της φυσικής, θα ισχύει σε κάθε κύκλωμα, όσο πολύπλοκο και αν είναι. Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογές πάνω σε πολύπλοκα κυκλώματα, ας εξετάσουμε περισσότερο την έννοια της διαφοράς δυναμικού σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Όπως γνωρίζουμε, η πηγή δεν παρέχει φορτία στο κύκλωμα, αλλά θέτει σε κίνηση τα φορτία που αυτό έχει. Έτσι ο ρόλος της είναι να «ανεβάζει» τα φορτία από χαμηλό δυναμικό (αρνητικός πόλος), σε υψηλό δυναμικό (θετικός πόλος), ώστε να εξασφαλίζει την κυκλοφορία τους στο κύκλωμα. Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι η ΗΕΔ της πηγής είναι διαφορά δυναμικού ποιοτικά διάφορη από την V=IR, διότι η πρώτη είναι το αίτιο της κυκλοφορίας του ρεύματος στο κύκλωμα, ενώ η δεύτερη είναι το αποτέλεσμά της.

Όταν τα φορτία διέρχονται από αντίσταση R, το δυναμικό μειώνεται κατά

---

* Ο πρώτος και ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff που εκφράζουν αντίστοιχα την αρχή διατήρησης του φορτίου και της ενέργειας για τα ηλεκτρικά κυκλώματα, ισχύουν και όταν οι τάσεις και οι εντάσεις μεταβάλλονται χρονικά, όπως συμβαίνει π.χ. στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος.

$V=IR$. Αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Πράγματι, σε χρόνο t στην αντίσταση R ελευθερώνεται θερμική ενέργεια ίση με $W_1=I^2Rt$. Αυτή η ενέργεια πρέπει να προσφερθεί από το ρεύμα. Αν ονομάσουμε W_2 την ενέργεια του ρεύματος, θα ισχύει $W_2=VIt$, όπου V η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης. Επειδή πρέπει $W_1=W_2 \Rightarrow V=IR$.

Ας θεωρήσουμε πάλι το κύκλωμα του σχήματος 5.2 και έστω ότι αρχίζουμε να υπολογίζουμε τις διαφορές του δυναμικού κατά μήκος του κυκλώματος από το σημείο Α και με φορά π.χ. αυτή των δεικτών του ρολογιού. Από το σημείο Α έως το Β το δυναμικό αυξάνει κατά Ε, επομένως

$$V_A+E=V_B$$

$$\text{ή} \quad V_A-V_B=-E \tag{5.3}$$

Από το σημείο Β έως το Γ λόγω της αντίστασης r προκαλείται μείωση του δυναμικού ή όπως λέμε πτώση τάσης ίση με

$$V_B-V_\Gamma=Ir \tag{5.4}$$

Κατά μήκος του τμήματος ΓΔ το δυναμικό δε μεταβάλλεται, διότι ο αγωγός δεν παρουσιάζει αντίσταση, δηλαδή:

$$V_\Gamma-V_\Delta=0 \tag{5.5}$$

Το δυναμικό στο σημείο Ζ είναι μικρότερο από αυτό στο σημείο Δ κατά IR λόγω της αντίστασης R. Συνεπώς η διαφορά δυναμικού είναι:

$$V_\Delta-V_Z=IR \tag{5.6}$$

Επίσης θα ισχύει:

$$V_Z-V_A=0 \tag{5.7}$$

διότι μεταξύ Ζ και Α δεν υπάρχει αντίσταση.

Αν αθροίσουμε τις σχέσεις (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) και (5.7) έχουμε:

$$V_A-V_B+V_B-V_\Gamma+V_\Gamma-V_\Delta+V_\Delta-V_Z+V_Z-V_A =$$

$$= -E+Ir+0+IR+0$$

$$\text{ή} \quad 0=-E+Ir+IR$$

$$\text{ή} \quad E-Ir-IR = 0$$

δηλαδή προκύπτει η σχέση (5.2).

Το αποτέλεσμα αυτό, ότι δηλαδή το άθροισμα των μεταβολών του δυναμι-

κού κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν, θα μπορούσε να το αναμένει κανείς για τον εξής λόγο. Είδαμε στο κεφάλαιο 1 ότι στα συντηρητικά πεδία δυνάμεων το έργο κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν. Στην προκειμένη περίπτωση ένα κλειστό κύκλωμα αποτελεί κλειστή διαδρομή για ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Επειδή η κίνηση γίνεται μέσα σε συντηρητικό πεδίο το συνολικό έργο είναι μηδέν. Γνωρίζουμε όμως ότι $\Delta V = \frac{\Delta W}{q}$, άρα το άθροισμα των μεταβολών ΔV του δυναμικού θα είναι και αυτό μηδέν.

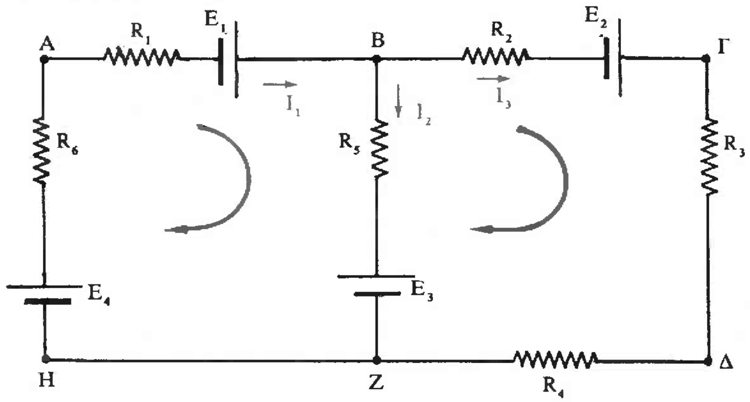
Μπορούμε συνεπώς να συμπεράνουμε ότι η μελέτη του κυκλώματος με τη χρήση των διαφορών δυναμικού, οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα με τη μελέτη του από ενεργειακή άποψη. Στην πράξη η πορεία που ακολουθείται είναι η εξής: Ξεκινάμε από ένα σημείο του κυκλώματος και το διατρέχουμε κατά ορισμένη φορά που την έχουμε προκαθορίσει.

▶ Αν σε μια αντίσταση R το ρεύμα έχει την ίδια φορά με εκείνη που εμείς διατρέχουμε το κύκλωμα, τότε η μεταβολή του δυναμικού στα άκρα της θα είναι αρνητική (−IR), ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα είναι θετική (+IR).

▶ Αν μια πηγή δημιουργεί ρεύμα στο κύκλωμα κατά τη φορά που εμείς το διατρέχουμε, τότε η ΗΕΔ της πηγής θα λαμβάνεται θετική, ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα λαμβάνεται αρνητική. Αν δηλαδή διατρέχουμε το κύκλωμα και συναντήσουμε πρώτα τον αρνητικό πόλο, η ΗΕΔ της πηγής θα λαμβάνεται θετική.

Πριν προχωρήσουμε στη συστηματική ανάπτυξη του τρόπου μελέτης των κυκλωμάτων με τη χρήση των κανόνων του Kirchhoff, σκόπιμο είναι να εισαγάγουμε δύο νέες έννοιες, την έννοια του **βρόχου** και του **κλάδου** σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

▶ Ορίζουμε ως βρόχο ενός κυκλώματος κάθε κλειστή διαδρομή μέσα σ' αυτό.



Σχ. 5.3

Έτσι για το κύκλωμα του σχήματος 5.3 βρόχοι είναι οι κλειστές διαδρομές ΑΒΖΗΑ, ΒΓΔΖΒ.

▶ Επίσης ορίζουμε ως κλάδο ηλεκτρικού κυκλώματος κάθε τμήμα του το οποίο διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα. Π.χ. στο κύκλωμα του σχήματος 5.3 ο κλάδος ΒΓΔΖ διαρρέεται από το ρεύμα I_3.

Τρόπος εργασίας

Έστω ότι είναι γνωστές οι τιμές των ΗΕΔ των πηγών και οι τιμές των αντιστάσεων στο κύκλωμα του σχήματος 5.3 και ζητείται να υπολογιστούν οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τις αντιστάσεις.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον 1ο κανόνα του Kirchhoff, αναζητούμε τους κλάδους του κυκλώματος. Αυτοί είναι οι ΒΑΗΖ, ΒΖ, ΒΓΔΖ και διαρρέονται αντίστοιχα από τα ρεύματα I_1, I_2, I_3, σχ. 5.3. Επειδή δε γνωρίζουμε ποια είναι η φορά των ρευμάτων αυτών, δεχόμαστε αυθαίρετα μια φορά για το κάθε ρεύμα, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος και γράφουμε τον 1ο κανόνα για τον κόμβο Β.

Έτσι προκύπτει:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \tag{5.8}$$

Αν στο τέλος των υπολογισμών κάποιο από τα ρεύματα προκύψει αρνητικό, αυτό σημαίνει ότι η φορά του είναι αντίθετη από αυτή που αρχικά δεχθήκαμε ότι έχει.

Για να εφαρμόσουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff, διακρίνουμε από πόσους βρόχους αποτελείται το κύκλωμα και καθορίζουμε γι' αυτούς μια φορά διαγραφής. Για το κύκλωμα του σχήματος 5.3 οι βρόχοι είναι ο ΑΒΖΗΑ και ο ΒΓΔΖΒ, ενώ ως φορά διαγραφής δεχόμαστε αυτή των δεικτών του ρολογιού. (Η φορά διαγραφής μπορεί να επιλεγεί αντίθετη αυτής που δεχθήκαμε, χωρίς καμιά διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων).

Διατρέχουμε το βρόχο ΑΒΖΗΑ, σύμφωνα με τη φορά διαγραφής ξεκινώντας από το Α. Η διαφορά δυναμικού στις αντιστάσεις R_1, R_5, R_6 θα είναι αρνητική, διότι αυτές διαρρέονται από ρεύμα σύμφωνα με τη φορά διαγραφής. Οι πηγές E_1 και E_4 θα ληφθούν θετικές, διότι δίνουν ρεύμα σύμφωνα με τη φορά διαγραφής, ενώ η E_3 θα ληφθεί αρνητική διότι δίνει ρεύμα αντίθετο από τη φορά διαγραφής.

Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff για το βρόχο αυτό γράφεται:

$$-I_1R_1 + E_1 - I_2R_5 - E_3 + E_4 - I_1R_6 = 0 \tag{5.9}$$

Για το βρόχο ΒΓΔΖΒ ο ίδιος κανόνας δίνει:

$$-I_3R_2 + E_2 - I_3R_3 - I_3R_4 + E_3 + I_2R_5 = 0 \tag{5.10}$$

Στη σχέση αυτή η πηγή E_3 έχει θετικό πρόσημο, γιατί δίνει ρεύμα σύμφωνα με τη φορά διαγραφής του βρόχου, ενώ η διαφορά δυναμικού στη R_5 είναι θετική, γιατί η φορά διαγραφής είναι αντίθετη από το ρεύμα που τη διαρρέει.

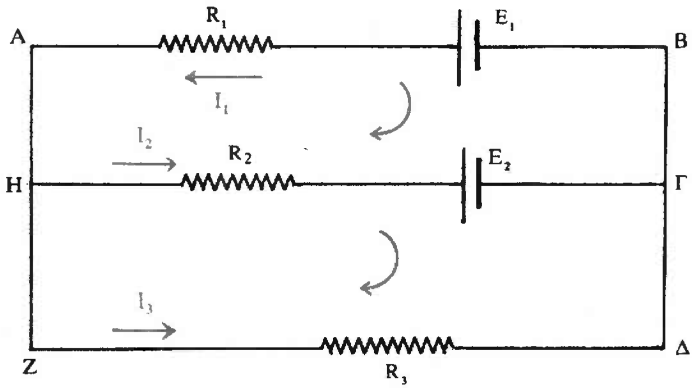
Οι σχέσεις (5.8), (5.9) και (5.10) αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με

τρεις αγνώστους, τις εντάσεις I_1, I_2, I_3, που μπορούν να υπολογιστούν από τη λύση του.

Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι: $E_1=12$Volt, $E_2=13,5$Volt, $R_1=1\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=2\Omega$.

Να υπολογιστούν οι εντάσεις των ρευμάτων στις αντιστάσεις του κυκλώματος.



Λύση

Οι κλάδοι του κυκλώματος είναι οι ΑΒ, ΗΓ, ΖΔ και διαρρέονται αντίστοιχα από ρεύματα I_1, I_2, I_3των οποίων η φορά δεχόμαστε ότι είναι αυτή που φαίνεται στο κύκλωμα.

Ως φορά διαγραφής των βρόχων ορίζουμε τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ο πρώτος κανόνας του Kirchhoff για τον κόμβο Η δίνει:

$$I_1-I_2-I_3=0 \qquad (\alpha)$$

Εξάλλου ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff για τους βρόχους ΑΒΓΗΑ και ΗΓΔΖΗ δίνει αντίστοιχα:

$$I_1R_1-E_1+E_2+I_2R_2=0 \qquad (\beta)$$

$$\text{και} \quad -I_2R_2-E_2+I_3R_3=0 \qquad (\gamma)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα στις σχέσεις (β) και (γ), προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$I_1 1-12+13,5+I_2 3=0 \Rightarrow$$
$$I_1+3I_2=-1,5 \qquad (\delta)$$

$$-I_2 3-13{,}5+I_3 2=0 \Rightarrow$$

και $$3I_2-2I_3=-13{,}5 \qquad (\varepsilon)$$

Οι εξισώσεις (α), (δ) και (ε) αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, από τη λύση του οποίου προκύπτουν οι τιμές:

$$I_1=3A, \quad I_2=-1{,}5A \quad I_3=4{,}5A$$

Το αρνητικό πρόσημο στην ένταση I_2 φανερώνει ότι το ρεύμα αυτό έχει αντίθετη φορά από αυτή που αρχικά δώσαμε.

1998 $\sigma\% = \frac{|X_\pi - X_\mu|}{X_\pi}\cdot 100$ $\Delta x = |X_\pi - X_\mu|$

5.3. Μέτρηση αντίστασης με τη βοήθεια αμπερομέτρου και βολτομέτρου

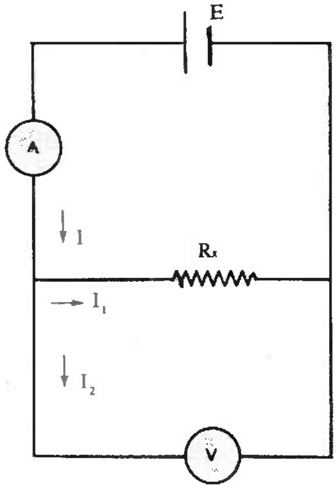
Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι η μέτρηση μιας αντίστασης είναι απλή διαδικασία, αφού σύμφωνα με το νόμο του Ohm αρκεί με ένα βολτόμετρο να μετρηθεί η διαφορά δυναμικού στα άκρα της και με ένα αμπερόμετρο η ένταση του ρεύματος που τη διαρρέει. Το πηλίκο: ένδειξη βολτομέτρου προς ένδειξη αμπερομέτρου θα μας δώσει την τιμή της αντίστασης.

Η μέθοδος όμως αυτή δεν δίνει αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας γιατί:

α) το αμπερόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση, η οποία αν και μικρή μεταβάλλει την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα και

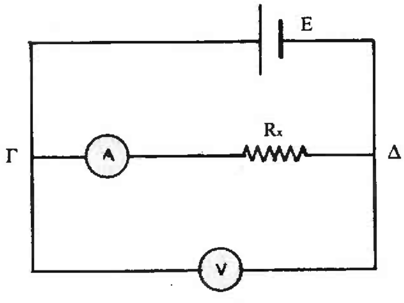
β) η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου, παρόλο που είναι πολύ μεγάλη, δε μπορεί να αποτρέψει τη διέλευση ρεύματος από το όργανο (ένα μικρό ρεύμα είναι αναγκαίο να περάσει από το όργανο, για να μας δώσει ενδείξεις).

Ας υποθέσουμε ότι για τη μέτρηση της αντίστασης R_x πραγματοποιείται το κύκλωμα του σχήματος 5.4. Το βολτόμετρο μετράει πραγματικά τη διαφορά δυναμικού στα άκρα της άγνωστης αντίστασης. Το αμπερόμετρο όμως δε μετράει ακριβώς το ρεύμα που θα περάσει απ' αυτήν, αφού όπως φαίνεται από το σχήμα 5.4 ένα μέρος του ρεύματος θα περάσει από το βολτόμετρο. Πόσο θα είναι το ρεύμα αυτό; Εξαρτάται από την αντίσταση R_x. Αν η R_x είναι μικρή, τότε το ρεύμα θα περάσει σχεδόν όλο από αυτή, γιατί η αντίσταση του βολτομέτρου είναι κατά κανόνα μεγάλη (της τάξης του $5\cdot10^4\Omega$). Αν όμως η αντίσταση R_x είναι μεγάλη, τότε η διά-



Σχ. 5.4

ταξη του σχήματος 5.4 δεν μπορεί να δώσει σωστά αποτελέσματα, γιατί το ρεύμα που θα περάσει από το βολτόμετρο είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με εκείνο που θα περάσει από την αντίσταση. Άρα η παραπάνω διάταξη κρίνεται ανεκτή για τη μέτρηση αντίστασης μόνο στην περίπτωση που η R_x είναι πολύ μικρότερη από την εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου.



Σχ. 5.5

Υπάρχει όμως και ένας άλλος τρόπος συνδεσμολογίας του αμπερομέτρου και του βολτομέτρου για τη μέτρηση της αντίστασης. Ο τρόπος αυτός υποδεικνύεται στο σχήμα 5.5.

Εδώ το βολτόμετρο μετράει τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του αμπερομέτρου και της αντίστασης R_x. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το βολτόμετρο μετράει διαφορά δυναμικού μεγαλύτερη από εκείνη που επικρατεί στα άκρα της R_x, αφού το αμπερόμετρο έχει και αυτό αντίσταση, έστω και πολύ μικρή και επομένως η αντίσταση του κλάδου ΓΔ είναι μεγαλύτερη από την R_x. Αν λοιπόν η άγνωστη αντίσταση είναι πολύ μικρή, τότε το σφάλμα που υπεισέρχεται στη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού είναι μεγάλο και η διάταξη αυτή δε μας επιτρέπει να υπολογίσουμε με ακρίβεια την αντίσταση R_x.

Στο κύκλωμα του σχήματος 5.4 το αμπερόμετρο μετράει ένταση ρεύματος μεγαλύτερη από εκείνη που περνάει από την αντίσταση R_x. Στο κύκλωμα του σχήματος 5.5 το βολτόμετρο μετράει διαφορά δυναμικού μεγαλύτερη από εκείνη που επικρατεί στα άκρα της R_x. Άρα το σφάλμα στον υπολογισμό της αντίστασης από μετρήσεις με βολτόμετρο και αμπερόμετρο είναι αναπόφευκτο.

Για να είναι ακριβής η μέτρηση μιας αντίστασης με τη βοήθεια αμπερομέτρου και βολτομέτρου, πρέπει το πρώτο να έχει πρακτικά μηδενική εσωτερική αντίσταση και το δεύτερο πολύ μεγάλη. Στη συνέχεια του βιβλίου, όπου οι αντιστάσεις των οργάνων αυτών δε δίνονται ή δε ζητούνται, θα θεωρούμε ότι το αμπερόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση μηδέν και το βολτόμετρο άπειρη. Επίσης οι εσωτερικές αντιστάσεις των πηγών θα θεωρούνται αμελητέες, αν δε δίνονται ή δε ζητούνται.

Παράδειγμα

Σπουδαστής χρησιμοποιεί τη διάταξη του σχήματος 5.4, για να πιστοποιήσει την τιμή μιας αντίστασης R για την οποία έχει την πληροφορία ότι είναι 5Ω.

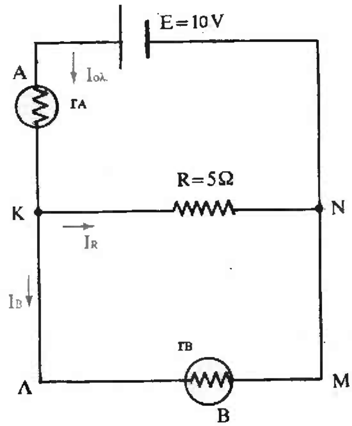
Αν η πηγή έχει ΗΕΔ 10Volt και μηδενική εσωτερική αντίσταση, το αμπερόμετρο Α έχει εσωτερική αντίσταση $r_A = 1Ω$ και το βολτόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση $r_B = 100Ω$, πόσο θα διαφέρει η τιμή που θα μετρήσει ο σπουδαστής από την πραγματική;

Λύση

Το αμπερόμετρο θα δείχνει το ρεύμα $I_{ολ}$ το οποίο είναι:

$$I_{o\lambda}=\frac{E}{R_{o\lambda}} \quad \text{όπου} \quad R_{o\lambda}$$

η ολική αντίσταση που προκύπτει από τον συνδυασμό R, r_A, r_B



Από το σχήμα παίρνουμε ότι

$$R_{o\lambda}=r_A+\frac{Rr_B}{R+r_B}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αντιστάσεων βρίσκουμε:

$$R_{o\lambda}=1+\frac{5\cdot 100}{5+100}=5{,}76\Omega$$

Το ρεύμα $I_{o\lambda}$ θα είναι:

$$I_{o\lambda}=\frac{10}{5{,}76}A=1{,}74A$$

Το αμπερόμετρο θα δείχνει λοιπόν $I_{o\lambda}=1{,}74$ A

Ένα μέρος από το ρεύμα $I_{o\lambda}$, έστω I_R διέρχεται από την αντίσταση R και το υπόλοιπο I_B, από το βολτόμετρο. Εφαρμόζοντας τον 1º κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο K έχουμε:

$$I_{o\lambda}=I_R+I_B$$

$$\text{ή} \quad I_R+I_B=1{,}74A \qquad (\alpha)$$

Επίσης εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο ΚΛΜΝΚ έχουμε:

$$-I_B\cdot r_B + I_R\cdot R = 0$$

$$\text{ή} \quad 5I_R=100I_B \qquad (\beta)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (α) και (β) βρίσκουμε: $I_R=1{,}65A$ και $I_B=0{,}082A$.

Η τάση στην αντίσταση την οποία και μετράει το βολτόμετρο είναι:

$$V_R = RI_R = 5\cdot 1{,}65\text{Volt} = 8{,}25\text{Volt}$$

Υπολογίζοντας την αντίσταση R από τις ενδείξεις των οργάνων βρίσκουμε:

$$R'=\frac{V_R}{I_{o\lambda}}=\frac{8{,}25}{1{,}74}\Omega = 4{,}74\Omega$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της αντίστασης που υπολογίστηκε είναι μικρότερη από την πραγματική.

Ο σπουδαστής για τη μέτρηση της αντίστασης χρησιμοποιεί το κύκλωμα του σχήματος 5.5.

Το ρεύμα που διαρρέει το αμπερόμετρο είναι:

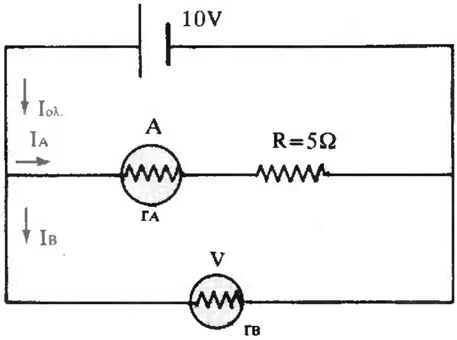
$$I_A=\frac{E}{r_A+R}=\frac{10}{1+5}A \Rightarrow I_A=1{,}66A$$

Επειδή το βολτόμετρο έχει συνδεθεί παράλληλα προς το συνδυασμό αντίσταση - αμπερόμετρο και προς την πηγή Ε, θα δείχνει V=10 Volt.

Η αντίσταση που υπολογίζεται από τις ενδείξεις του βολτομέτρου και του αμπερομέτρου είναι:

$$R' = \frac{V}{I_A} = \frac{10}{R + r_A}\,\Omega = 6\Omega$$

Δηλαδή η αντίσταση που υπολογίζει ο σπουδαστής είναι μεγαλύτερη από την πραγματική.

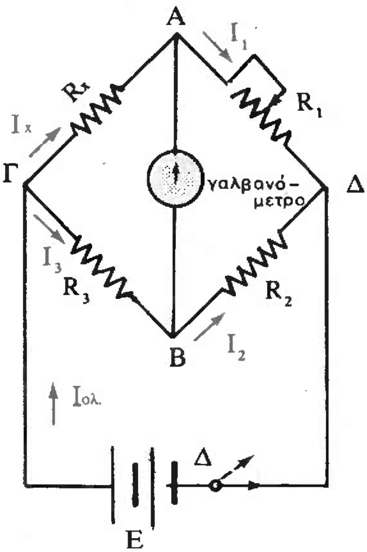


5.4. Η γέφυρα Wheatstone

Όπως είδαμε, η μέθοδος μέτρησης της αντίστασης με τη βοήθεια του αμπερομέτρου και του βολτομέτρου, δεν μπορεί να δώσει αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας. Ωστόσο υπάρχουν διατάξεις, με τις οποίες μπορούμε να υπολογίζουμε την τιμή μιας αντίστασης με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Μια τέτοια διάταξη είναι η γέφυρα Wheatstone, που η αρχή λειτουργίας της φαίνεται στο σχήμα 5.6.

Με τη γέφυρα Wheatstone μπορούμε να υπολογίσουμε μια άγνωστη αντίσταση R_x με τη βοήθεια των γνωστών αντιστάσεων R_1, R_2 και R_3. Οι R_2 και R_3 έχουν σταθερή τιμή, ενώ η R_1 μεταβάλλεται, αλλά μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της (π.χ., αν είναι κιβώτιο αντιστάσεων).

Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ η πηγή παρέχει στο κύκλωμα ρεύμα $I_{ολ}$ το οποίο φθάνοντας στον κόμβο Γ διακλαδίζεται στα ρεύματα I_x και I_3. Όταν μεταξύ των σημείων Α και Β υπάρχει διαφορά δυναμικού, το γαλβανόμετρο διαρρέεται από ρεύμα. Αν μεταβάλουμε την αντίσταση R_1, είναι δυνατό να μηδενιστεί η ένδειξη του γαλβανομέτρου. Τότε λέμε ότι η γέφυρα ισορροπεί. Εφαρμόζοντας τότε τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στους κόμβους Α και Β, παίρνουμε:



Σχ. 5.6.

$$I_x=I_1 \quad (5.11)$$
$$I_3=I_2 \quad (5.12)$$

Επίσης με εφαρμογή του δεύτερου κανόνα του Kirchhoff στους βρόχους ΑΓΒΑ και ΑΒΔΑ προκύπτει:

$$I_xR_x-R_3I_3=0 \Rightarrow \frac{I_3}{I_x}=\frac{R_x}{R_3} \quad (5.13)$$

και

$$-I_2R_2+I_1R_1=0 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1}{R_2} \quad (5.14)$$

Λόγω των (5.11) και (5.12) οι (5.13) και (5.14) δίνουν:

$$\frac{R_x}{R_3}=\frac{R_1}{R_2}$$

ή

$$\boxed{R_x=R_1\frac{R_3}{R_2}} \quad (5.15)$$

Από τη σχέση (5.15) υπολογίζεται τελικά η άγνωστη αντίσταση R_x.

Με τη διάταξη που περιγράψαμε προσδιορίζεται η τιμή μιας άγνωστης αντίστασης R_x με μεγάλη ακρίβεια, διότι το μοναδικό σφάλμα που υπεισέρχεται οφείλεται στον προσδιορισμό της θέσης ισορροπίας από τις ενδείξεις του γαλβανομέτρου.

Παράδειγμα

Μια άγνωστη αντίσταση R_x μετριέται με τη γέφυρα Wheatstone.

Η μεταβλητή αντίσταση R_1 είναι 2,45Ω και ο λόγος $\frac{R_3}{R_2}=2$.

Η ίδια αντίσταση μετριέται με τη βοήθεια βολτομέτρου και αμπερομέτρου. Οι ενδείξεις των οργάνων είναι αντίστοιχα 21Volt και 4A. Να βρεθεί η τιμή της R_x σε κάθε μια περίπτωση και να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

Η τιμή της αντίστασης για την πρώτη περίπτωση θα βρεθεί με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο (5.15).

$$R_x=R_1\frac{R_3}{R_2} \qquad R_x=2{,}45\cdot 2\Omega=4{,}9\Omega$$

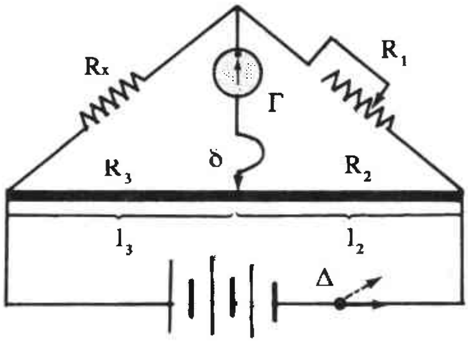
Από το νόμο του Ohm, με αντικατάσταση βρίσκεται ότι

$$R_x=\frac{V}{I} \quad ή \quad R_x=\frac{21}{4}\,\Omega=5{,}25\Omega$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της αντίστασης που βρίσκεται με τη βοήθεια του νόμου του Ohm διαφέρει από αυτή που βρίσκεται με τη μέθοδο της γέφυρας λόγω του σφάλματος που υπεισέρχεται στην απ' ευθείας μέτρηση με το βολτόμετρο και το αμπερόμετρο.

5.5. Γέφυρα με χορδή

Μια απλοποιημένη μορφή της γέφυρας Wheatstone είναι η γέφυρα με χορδή. Σε αυτήν οι αντιστάσεις R_2 και R_3 της γέφυρας έχουν αντικατασταθεί με ευθύγραμμο ομογενές ισοπαχές σύρμα διατομής S και ειδικής αντίστασης ρ, πάνω στο οποίο μπορεί να μετακινείται ο δρομέας δ, σχήμα 5.7.



Σχ. 5.7

Αν μετακινώντας το δρομέα επιτύχουμε να μη διαρρέεται το γαλβανόμετρο από ρεύμα, τότε η γέφυρα ισορροπεί και κατά συνέπεια ισχύει η σχέση (5.15) της προηγούμενης παραγράφου, όπου R_3 και R_2 είναι οι αντιστάσεις που αντιστοιχούν στα μήκη l_3 και l_2.

Οι αντιστάσεις αυτές σε συνάρτηση με τα χαρακτηριστικά του σύρματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_2 = \rho \frac{l_2}{S} \qquad (5.16)$$

και

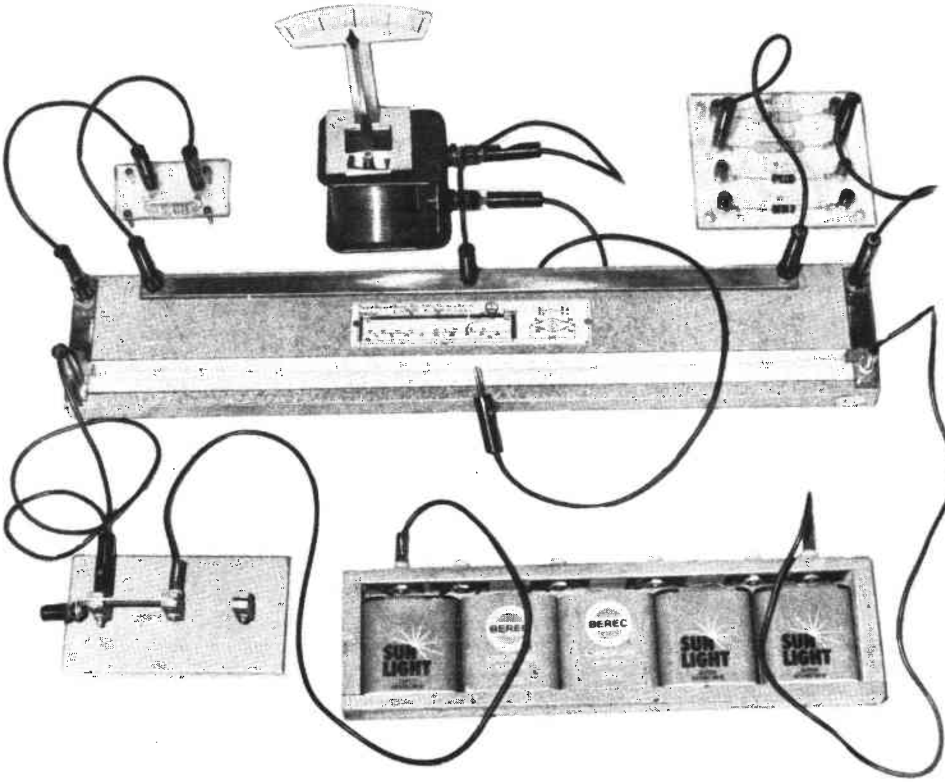
$$R_3 = \rho \frac{l_3}{S} \qquad (5.17)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{l_3}{l_2} \qquad (5.18)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (5.15) το λόγο $\frac{R_3}{R_2}$ με την τιμή του από την (5.18), προκύπτει:

$$\boxed{R_x = R_1 \frac{l_3}{l_2}} \qquad (5.19)$$



Σχ. 5.8. Γέφυρα χορδής του σχολικού εργαστηρίου.

Με τη βοήθεια γέφυρας με χορδή (ή της γέφυρας **Wheatstone**) μπορεί εύκολα να υπολογισθεί η χωρητικότητα ενός πυκνωτή. Σχετικό παράδειγμα θα δοθεί στο κεφάλαιο των εναλλασσομένων ρευμάτων, γιατί στο συνεχές ρεύμα ο πυκνωτής λειτουργεί ως διακόπτης.

1998

5.6. Μέτρηση του θερμικού συντελεστή αντίστασης.

Γνωρίζουμε ότι η ειδική αντίσταση ενός μεταλλικού αγωγού αυξάνει με τη θερμοκρασία. Αν ϱ_o είναι η τιμή της ειδικής αντίστασης στους 0°C και ϱ_θ η τιμή της στους θ°C, τότε ισχύει η σχέση:

$$\varrho_\theta = \varrho_o(1 + \alpha\theta) \qquad (5.20)$$

όπου α ο θερμικός συντελεστής της αντίστασης.

Η ωμική αντίσταση αγωγού ειδικής αντίστασης ρ, μήκους l και διατομής S δίνεται από τη σχέση:

$$R=\rho\frac{l}{S} \qquad (5.21)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και αν υποθέσουμε ότι οι διαστάσεις του αγωγού δεν επηρεάζονται από τη θερμοκρασία προκύπτει ότι η ωμική αντίσταση του αγωγού μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση:

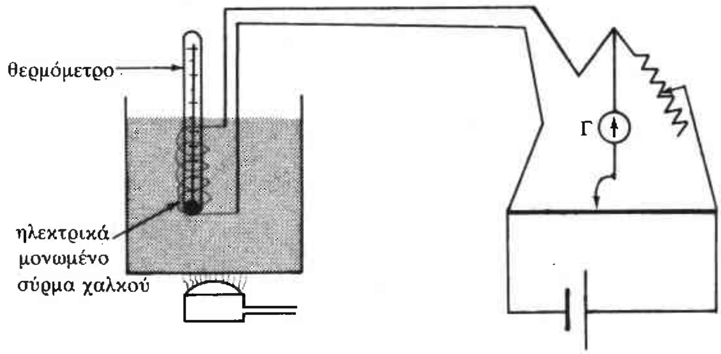
$$R_\theta=R_o(1+\alpha\theta) \qquad (5.22)$$

R_o η αντίσταση στους 0°C και R_θ η αντίσταση στους θ°C.

Από τη σχέση (5.22) προκύπτει ότι η μεταβολή ΔR της αντίστασης είναι:

$$\Delta R=R_\theta-R_o=R_o\alpha\theta \qquad (5.23)$$

Για να υπολογίσουμε το θερμικό συντελεστή α της αντίστασης ενός μετάλλου π.χ. του χαλκού, χρησιμοποιούμε τη διάταξη του σχήματος 5.9. Μέσα σε



Σχ. 5.9.

ένα θερμαινόμενο δοχείο με νερό, βυθίζεται θερμόμετρο που περιβάλλεται από το ηλεκτρικά μονωμένο χάλκινο σύρμα, του οποίου ζητάμε να υπολογίσουμε το θερμικό συντελεστή α της αντίστασης. Τα άκρα του σύρματος συνδέονται σε γέφυρα Wheatstone με τη βοήθεια της οποίας μετράμε την αντίσταση του σύρματος σε διάφορες θερμοκρασίες.

Από τις πειραματικές μετρήσεις σχεδιάζεται η ευθεία του σχήματος 5.10.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ υπολογίζεται ο λόγος

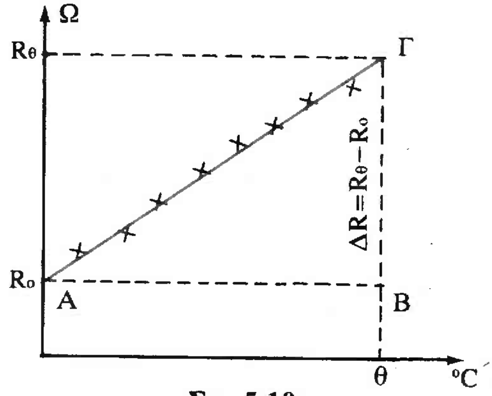
$$\frac{B\Gamma}{AB}=\frac{R_\theta-R_o}{\theta} \qquad (5.24)$$

Η σχέση (5.24) λόγω της (5.23) γράφεται:

$$\frac{B\Gamma}{AB}=\alpha R_o \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{1}{R_o}\frac{B\Gamma}{AB} \qquad (5.25)$$

Από τη σχέση (5.25) υπολογίζεται ο συντελεστής α, αφού από τη γραφική παράσταση υπολογιστεί η αντίσταση R_o.



Σχ. 5.10.

5.7. Διαιρέτης τάσης - ποτενσιόμετρο.

Στο εσωτερικό των ηλεκτρικών συσκευών, όπως π.χ. ραδιόφωνα, ενισχυτές κ.τ.λ., υπάρχουν εξαρτήματα ή κυκλώματα, π.χ. τρανζίστορ, τα οποία λειτουργούν με τάση πολύ μικρότερη από την τάση που τροφοδοτείται η συσκευή. Για την τροφοδοσία αυτών των εξαρτημάτων χρησιμοποιούνται ειδικές διατάξεις που ονομάζονται διαιρέτες τάσης.

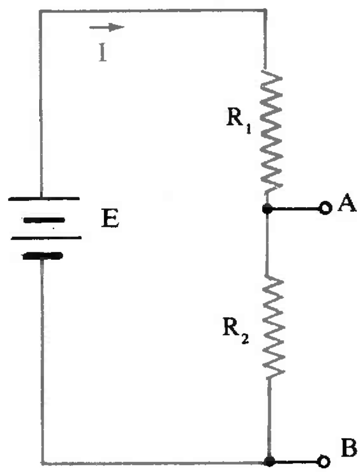
Ένας απλός διαιρέτης τάσης φαίνεται στο σχήμα 5.11. Αποτελείται από δυο αντιστάσεις R_1 και R_2 που συνδέονται σε σειρά με πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης Ε. Η ένταση Ι του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I=\frac{E}{R_1+R_2}$$

Οι τάσεις στα άκρα των αντιστάσεων R_1 και R_2 είναι αντίστοιχα:

$$V_1=IR_1=E\frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad (5.26)$$

$$V_2=IR_2=E\frac{R_2}{R_1+R_2} \qquad (5.27)$$



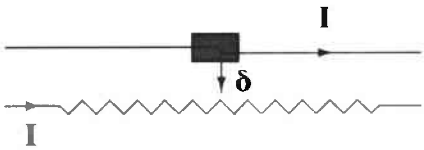
Σχ. 5.11.

Από τις σχέσεις (5.26) και (5.27) προκύπτει ότι η τάση Ε της πηγής διαιρέθηκε σε δυο μέρη V_1 και V_2, που η τιμή

τους καθορίζεται από τις αντιστάσεις R_1 και R_2. Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (5.26) και (5.27) προκύπτει:

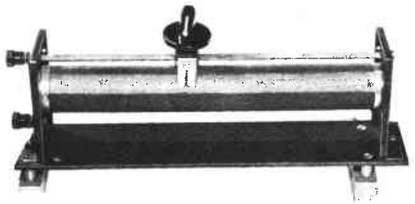
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{5.28}$$

Δηλαδή ο λόγος των τάσεων, στις οποίες διαιρέθηκε η Ε, ισούται με το λόγο των αντιστάσεων που χρησιμοποιούνται για τη διαίρεση αυτή. Επομένως, με κατάλληλη επιλογή των αντιστάσεων που σχηματίζουν το διαιρέτη τάσης, μπορούμε να τροφοδοτήσουμε τα διάφορα μέρη των ηλεκτρικών συσκευών χρησιμοποιώντας μόνο μια πηγή τροφοδοσίας.



Σχ. 5.12.

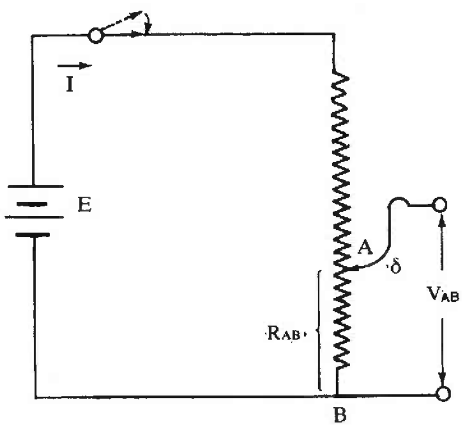
Στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε όχι για μια ορισμένη τιμή τάσης αλλά για τάσεις που μπορούν να μεταβάλλονται, τότε αντί για αντιστάσεις χρησιμοποιούμε το ποτενσιόμετρο. Αυτό αποτελείται από μια αντίσταση πάνω στην οποία προσαρμόζεται ένας δρομέας σχ. 5.12.



Σχ. 5.13.

Η αντίσταση κατασκευάζεται από ισοπαχές ομογενές σύρμα τυλιγμένο ομοιόμορφα πάνω σε κύλινδρο από μονωτικό υλικό, σχήμα 5.13.

Λόγω του τρόπου κατασκευής της αντίστασης του ποτενσιομέτρου, η αντίσταση μεταξύ του δρομέα και του ενός άκρου του ποτενσιομέτρου, είναι ανάλογη με την απόσταση του δρομέα από το άκρο αυτό.



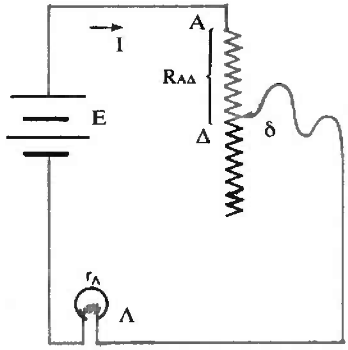
Σχ. 5.14.

Για να πάρουμε διάφορες τιμές τάσης από μια πηγή Ε, χρησιμοποιούμε το ποτενσιόμετρο, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 5.14. Η τάση V_{AB} είναι ανάλογη με την αντίσταση R_{AB} που αντιστοιχεί στο τμήμα ΑΒ, και συνεπώς ανάλογη με την απόσταση του δρομέα από το άκρο Β του ποτενσιομέτρου. Προφανώς, μετακινώντας το δρομέα δ μπορούμε να πάρουμε τάσεις από μηδέν Volt έως Ε.

Ροοστάτης

Το σύστημα δρομέας - αντίσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταβάλει την ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα κύκλωμα, καθορίζοντας έτσι π.χ. τη φωτοβολία ενός λαμπτήρα ή την ταχύτητα περιστροφής ενός κινητήρα. Αυτό πετυχαίνεται με τη σύνδεση του ποτενσιομέτρου, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 5.15. Η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R_{A\Delta} + r_{\Lambda}}$$



Σχ. 5.15

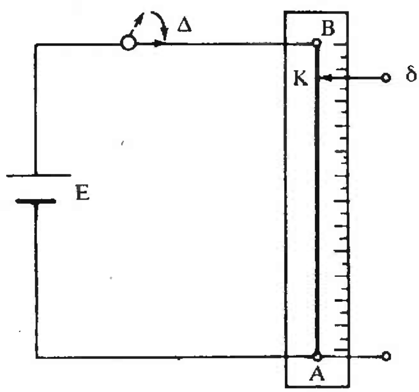
όπου $R_{A\Delta}$ η αντίσταση μεταξύ του άκρου Α και του δρομέα δ, και r_{Λ} η αντίσταση του λαμπτήρα. Επειδή η αντίσταση $R_{A\Delta}$ είναι ανάλογη με την απόσταση ΑΔ, μετακινώντας το δρομέα δ μπορούμε να μεταβάλουμε την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα και συνεπώς τη φωτοβολία του λαμπτήρα. Επειδή με το σύστημα δρομέας - αντίσταση μπορούμε να μεταβάλουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, λέμε ότι το σύστημα αυτό λειτουργεί σαν ροοστάτης.

1994

5.8. Μέτρηση της ΗΕΔ ενός στοιχείου

Το ποτενσιόμετρο εκτός από τη χρήση του ως διαιρέτη τάσης, βρίσκει πολλές εφαρμογές όπως π.χ. στη μέτρηση της ηλεκτρεγερτικής δύναμης και της εσωτερικής αντίστασης ενός στοιχείου.

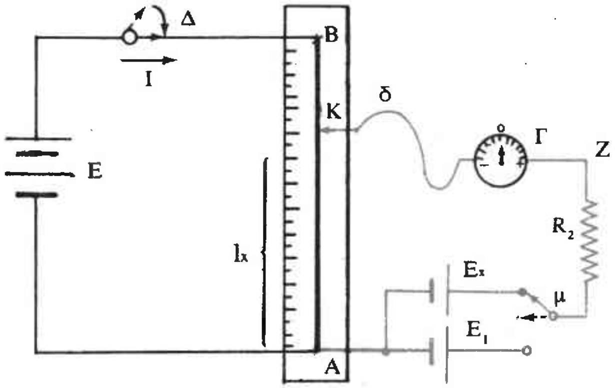
Για να μετρήσουμε την ΗΕΔ ενός στοιχείου με μεγάλη ακρίβεια, χρησιμοποιούμε ποτενσιόμετρο κατασκευασμένο από ομογενή ισοπαχή αγωγό, πάνω στον οποίο ολισθαίνει δρομέας δ, σχήμα 5.16. Επειδή το σύρμα είναι ομογενές και έχει σταθερή διατομή, η αντίσταση μεταξύ του δρομέα και του ενός άκρου θα είναι ανάλογη προς την απόστασή τους, που μπορεί εύκολα να μετρηθεί με τη βοήθεια του κανόνα.



Σχ. 5.16.

Έτσι, αν κλείσουμε το διακόπτη Δ, ο αγωγός ΑΒ διαρρέεται από ρεύμα και η διαφορά δυναμικού V_{AK} θα είναι ανάλογη της απόστασης ΑΚ.

Για να μετρήσουμε την άγνωστη ΗΕΔ ενός στοιχείου, κατασκευάζουμε το κύκλωμα του σχήματος 5.17.



Σχ. 5.17.

Η πηγή E_1 είναι γνωστής ΗΕΔ και θα χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο με το οποίο θα συγκριθεί η άγνωστη ΗΕΔ E_x του στοιχείου.

Η αντίσταση R_2 χρησιμεύει για να προστατευθούν τα στοιχεία E_1, E_x και το γαλβανόμετρο από βραχυκύκλωμα. Γιατί στην περίπτωση που δεν υπάρχει η αντίσταση R_2 και ο δρομέας δ έλθει στη θέση Α, τότε από το κύκλωμα που αποτελείται από την πηγή E_x (ή E_1) και το γαλβανόμετρο θα περάσει ρεύμα μεγάλης έντασης.

Το γαλβανόμετρο έχει το μηδέν στο κέντρο της κλίμακας και έτσι βρίσκουμε αν η πηγή Ε προκαλεί το ρεύμα σ' αυτό, ή αν το ρεύμα προέρχεται από την E_x ή την E_1. Παραδείγματος χάρη, όταν ο δείκτης του γαλβανομέτρου έχει εκτραπεί προς τα δεξιά, το ρεύμα προέρχεται από την πηγή Ε, ενώ όταν εκτρέπεται αριστερά, το ρεύμα προέρχεται από την E_1 ή την E_x, ανάλογα με το ποια είναι συνδεμένη με το γαλβανόμετρο.

Βρίσκεται πειραματικά ότι, όταν ο δρομέας δ είναι κοντά στο Α, ο δείκτης του οργάνου είναι αριστερά, ενώ όταν ο δρομέας είναι κοντά στο Β ο δείκτης βρίσκεται προς τα δεξιά. Όπως είναι φανερό, θα υπάρχει μια θέση του δρομέα πάνω στην ΑΒ π.χ. η Κ για την οποία ο δείκτης του γαλβανομέτρου θα βρίσκεται στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Κ και Ζ βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό. Στη θέση αυτή η ΗΕΔ του στοιχείου E_x θα ισούται με την τάση V_{AK} μεταξύ του άκρου Α και του δρομέα. Αν το Κ απέχει από το Α l_x τότε η αντίσταση R_{AK} είναι:

$$R_{AK} = \rho \frac{l_x}{S}$$

όπου ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού και S η διατομή του. Η τάση V_{AK} είναι:

$$V_{AK} = I\varrho\frac{l_x}{S}$$

όπου I το ρεύμα από την πηγή E.

Επειδή $V_{AK}=E_x$ έχουμε:

$$E_x = I\varrho\frac{l_x}{S} \qquad (5.29)$$

Με το μεταγωγό μ αποσυνδέουμε την E_x και συνδέουμε στο γαλβανόμετρο την E_1. Μετακινούμε πάλι το δρομέα δ και έστω ότι το γαλβανόμετρο δείχνει μηδέν για μια άλλη θέση που απέχει από το A κατά l_1. Πρέπει συνεπώς να ισχύει πάλι ότι:

$$E_1 = I\varrho\frac{l_1}{S} \qquad (5.30)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.29) και (5.30) βρίσκουμε:

$$\frac{E_x}{E_1} = \frac{l_x}{l_1}$$

ή

$$\boxed{E_x = E_1\frac{l_x}{l_1}} \qquad (5.31)$$

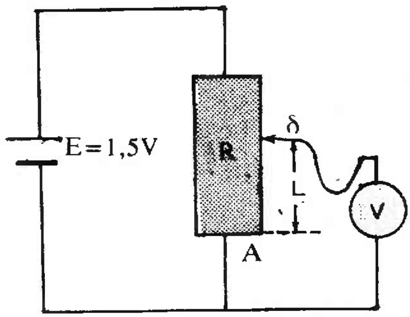
Από τη σχέση (5.31) υπολογίζεται η άγνωστη ΗΕΔ E_x του στοιχείου. Η ακρίβεια που πετυχαίνουμε με τη μέθοδο αυτή εξαρτάται από την ακρίβεια που γνωρίζουμε την τιμή της E_1 και τα σφάλματα που γίνονται στη μέτρηση των μηκών l_x και l_1.

Παράδειγμα

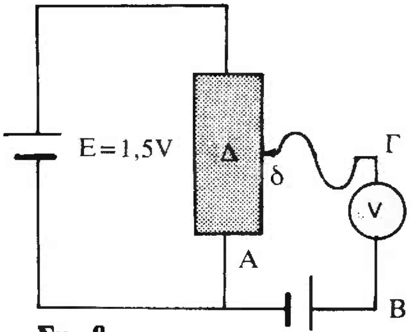
Ένας σπουδαστής πειραματίζεται με το ποτενσιόμετρο του σχήματος α χρησιμοποιώντας βολτόμετρο μεγάλης εσωτερικής αντίστασης. Μετακινώντας το δρομέα δ βρίσκει ότι η ένδειξη του βολτομέτρου είναι ανάλογη της απόστασης L από το άκρο A της αντίστασης.

α) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την κατασκευή της αντίστασης;

β) Το παραπάνω αποτέλεσμα θα το παίρναμε οποιαδήποτε και αν ήταν η αντίσταση του βολτομέτρου;



Σχ. α.



Σχ. β.

γ) Όταν το βολτόμετρο δείχνει 1,1Volt ένα δεύτερο στοιχείο συνδέεται στο κύκλωμα όπως φαίνεται στο σχήμα β και το βολτόμετρο δείχνει μηδέν.

Το στοιχείο αυτό πιστεύεται ότι έχει ΗΕΔ, E′=1,1Volt. Ο σπουδαστής δηλώνει ότι το στοιχείο έχει ΗΕΔ 1,1Volt. Είναι αυτό σωστό; Γιατί;

Απάντηση

α) Μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι η αντίσταση του ποτενσιομέτρου είναι ανάλογη με το μήκος L. Έτσι, το σύρμα του ποτενσιομέτρου, θα πρέπει να είναι ομογενές και ισοπαχές και στην περίπτωση που είναι τυλιγμένο σε κύλινδρο να έχει ίδιο αριθμό σπειρών ανά μονάδα μήκους.

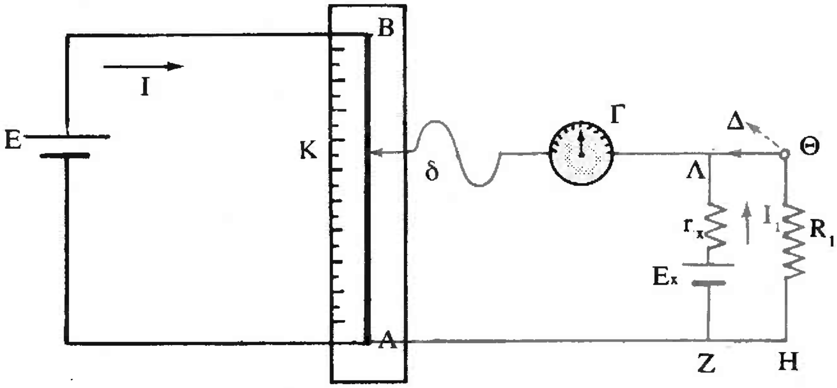
β) Ένα βολτόμετρο με μικρότερη εσωτερική αντίσταση από το αρχικό, θα μας έδινε ενδείξεις αυξανόμενες με το μήκος, αλλά για την ίδια απόσταση L η ένδειξή του θα ήταν μικρότερη από του αρχικού. Αυτό οφείλεται στο ότι το ρεύμα που θα περάσει από το βολτόμετρο μικρής εσωτερικής αντίστασης θα είναι μεγαλύτερο, με αποτέλεσμα να μειώνεται το ρεύμα στο ποτενσιόμετρο και συνεπώς η τάση πάνω σ' αυτό.

γ) Αν εφαρμόσουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο ΑΒΓΔΑ έχουμε $V_{ΔΑ}-E'=0$ ή $V_{ΔΑ}=E'$. Επειδή $V_{ΔΑ}=1{,}1$Volt συμπεραίνουμε ότι το στοιχείο E′ έχει ΗΕΔ ίση με 1,1 Volt.

1997

5.9. Μέτρηση της εσωτερικής αντίστασης στοιχείου.

Για τη μέτρηση της εσωτερικής αντίστασης r_x ενός στοιχείου χρησιμοποιούμε την ποτενσιομετρική διάταξη του σχήματος 5.18.



Σχ. 5.18.

Όταν ο διακόπτης Δ είναι ανοιχτός, μετακινούμε το δρομέα δ μέχρι να μηδενιστεί η ένδειξη του γαλβανομέτρου. Έστω l_x η απόσταση του δρομέα από το άκρο A του ποτενσιομέτρου. Επειδή από το γαλβανόμετρο δεν περνάει ρεύμα, η εσωτερική αντίσταση r_x δεν προκαλεί καμιά πτώση τάσης με αποτέλεσμα να ισχύει:

$$E_x = V_{AK} = I\varrho \frac{l_x}{S} \qquad (5.32)$$

Κλείνουμε το διακόπτη Δ και μετακινούμε πάλι το δρομέα μέχρι να μηδενιστεί ξανά η ένδειξη του γαλβανομέτρου. Έστω l_1 η νέα απόσταση του δρομέα από το άκρο A του ποτενσιομέτρου. Η πτώση τάσης $V_1 = I_1R_1$ στα άκρα της αντίστασης R_1 θα ισούται με $V_{AK'}$ όπου K΄ η νέα θέση του δρομέα. Θα ισχύει πάλι

$$V_{AK'} = V_1 \quad \text{ή} \quad I_1R_1 = I\varrho \frac{l_1}{S} \qquad (5.33)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (5.32) και (5.33) έχουμε:

$$E_x = I_1R_1 \frac{l_x}{l_1} \qquad (5.34)$$

Η ένταση I_1 του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα ΖΗΘΛ είναι:

$$I_1 = \frac{E_x}{r_x + R_1} \qquad (5.35)$$

Από τις (5.34) και (5.35) παίρνουμε για την εσωτερική αντίσταση r_x

$$r_x = R_1\left(\frac{l_x}{l_1} - 1\right) \tag{5.36}$$

Από τη σχέση (5.36) υπολογίζεται η αντίσταση r_x, αν γνωρίζουμε την αντίσταση R_1 και μετρήσουμε τα μήκη l_1 και l_x.

Οι μετρήσεις με τη χρήση ποτενσιομετρικής διάταξης πλεονεκτούν από τις μετρήσεις με βολτόμετρο και αμπερόμετρο διότι:

α) δεν επηρεάζουν το κύκλωμα στο οποίο γίνονται (το γαλβανόμετρο δε διαρρέεται από ρεύμα).

β) στους υπολογισμούς υπεισέρχονται μετρήσεις μηκών που είναι σχετικά εύκολες και ακριβείς.

Κυκλώματα με αντίσταση και πυκνωτή ή αντίσταση και πηνίο σε σειρά

5.10. Γενικά

Τα κυκλώματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα έχουν το χαρακτηριστικό ότι διαρρέονται από ρεύμα σταθερής έντασης. Υπάρχουν όμως και κυκλώματα συνεχούς ρεύματος στα οποία τόσο η τάση όσο και η ένταση μεταβάλλονται με ειδικό τρόπο. Τέτοια κυκλώματα π.χ. είναι εκείνα που περιέχουν σε σειρά ωμική αντίσταση και πυκνωτή, ή ωμική αντίσταση και πηνίο.

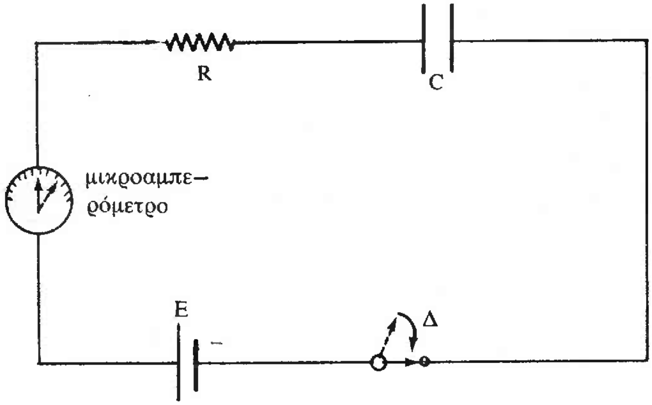
Το κύριο χαρακτηριστικό των κυκλωμάτων αυτών είναι ότι ο χρόνος στον οποίο η τάση, ή η ένταση παίρνει ορισμένη τιμή, καθορίζεται πλήρως από την αντίσταση R και τη χωρητικότητα C για την πρώτη περίπτωση και από την αντίσταση R και την αυτεπαγωγή L για τη δεύτερη. Ο χρόνος αυτός υπολογίζεται με μεγάλη ακρίβεια, με αποτέλεσμα τα κυκλώματα αυτά να βρίσκουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Μπορεί κανείς να αναφέρει σαν παράδειγμα τη χρήση τους στη βιομηχανία, για να εξασφαλίζεται η περιοδική λειτουργία διατάξεων, στα κυκλώματα συσκευών τηλεόρασης για το συγχρονισμό της εικόνας, σε ανορθωτικές διατάξεις, σε κυκλώματα χρονομέτρησης κλπ.

5.11. Κύκλωμα συνεχούς ρεύματος με RC σε σειρά

α) φόρτιση πυκνωτή

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 5.19, όπου αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέεται σε σειρά με αντίσταση R. Το κύκλωμα περιλαμβάνει ακόμα πηγή συνεχούς τάσης E, μικροαμπερόμετρο και διακόπτη Δ.



Σχ. 5.19
Κύκλωμα για τη μελέτη της φόρτισης πυκνωτή

Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ, το μικροαμπερόμετρο δείχνει ακαριαία μια μέγιστη τιμή ρεύματος I_o. Με την πάροδο του χρόνου η ένταση του ρεύματος ελαττώνεται βαθμιαία, γεγονός που φανερώνει ότι ο ρυθμός ροής του ηλεκτρικού φορτίου στο κύκλωμα μειώνεται. Μετά από ορισμένο χρόνο η ένδειξη του οργάνου μηδενίζεται. Αν τότε μετρήσουμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή, θα τη βρούμε ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής, ενώ η τάση στα άκρα της αντίστασης R είναι μηδέν. Λέμε τότε ότι ο πυκνωτής φορτίστηκε.

Η διαδικασία φόρτισης του πυκνωτή είναι η εξής: Τη χρονική στιγμή που κλείνει ο διακόπτης (t=0) τα φορτία με την επίδραση της ηλεκτρεγερτικής δύναμης της πηγής αρχίζουν να κινούνται και η ταχύτητά τους περιορίζεται μόνο από την αντίσταση R. Τα πρώτα φορτία που απέκτησε ο πυκνωτής απωθούν αυτά που συνεχίζουν να έρχονται, με συνέπεια το ρεύμα να ελαττώνεται συνεχώς μέχρι να μηδενιστεί. Αποτέλεσμα της άπωσης είναι ότι απαιτείται πρόσθετο έργο για την κίνηση των φορτίων προς τους οπλισμούς. Το έργο αυτό εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από την πηγή στον πυκνωτή και αποθηκεύεται σ' αυτόν με τη μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου.

Ο χρόνος που διαρκεί η φόρτιση εξαρτάται από την αντίσταση R και τη χωρητικότητα C. Πράγματι, μεγάλη αντίσταση σημαίνει μικρή ένταση ρεύματος και κατά συνέπεια μεγάλο χρόνο για τη φόρτιση του πυκνωτή με ορισμένο φορτίο Q. Εξάλλου, όπως θα δούμε στη συνέχεια ο χρόνος που διαρκεί η φόρτιση του πυκνωτή είναι ανάλογος και προς τη χωρητικότητά του C.

Σε χρονικό διάστημα Δt από το κλείσιμο του διακόπτη Δ, η τάση στον πυκνωτή έχει αυξηθεί κατά ΔV_c και η ένταση του ρεύματος I είναι:

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{C\Delta V_c}{\Delta t}$$

Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff παίρνουμε:

$$E-RI-V_c=0$$

$$\text{ή} \quad E-R\frac{C\Delta V_c}{\Delta t}-V_c=0^*$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνει:

$$\boxed{V_c=E(1-e^{-t/RC})} \qquad (5.37)$$

Στη σχέση (5.37) E είναι η ΗΕΔ της πηγής, e η βάση των Νεπέρειων λογάριθμων ($e\simeq 2{,}718$) και V_c η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t.

Αν στην (5.37) θέσουμε t=0, προκύπτει ότι $V_c=0$, ενώ για $t\to\infty$, $V_c=E$. Δηλαδή για να γίνει η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή, κατά τη φόρτιση, ίση με την ΗΕΔ της πηγής, απαιτείται θεωρητικά άπειρος χρόνος. Εξάλλου αν στην ίδια εξίσωση θέσουμε t=RC παίρνουμε:

$$V_c=E(1-e^{-1})$$

$$\text{ή} \quad V_c=(1-\frac{1}{2{,}718})\,E$$

$$\text{ή} \quad V_c=0{,}632E$$

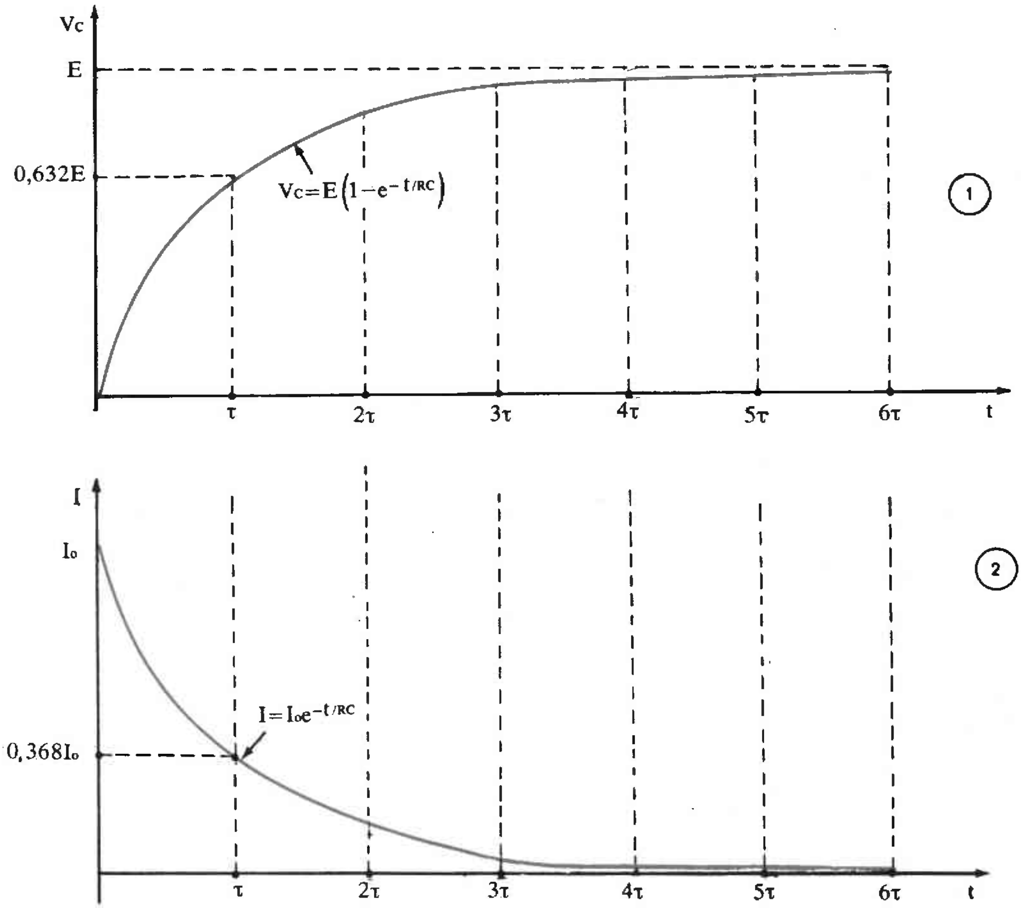
Δηλαδή, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να γίνει η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή, ίση με τα 63,2% της ΗΕΔ της πηγής είναι τ=RC και λέγεται **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.

Οι τιμές της τάσης V_c που προκύπτουν, αν θέσουμε διαδοχικά στον τύπο (5.37) t=2τ, 3τ, 4τ, 5τ, 6τ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
V_c	0	0,632E	0,865E	0,950E	0,982E	0,993E	0,997E

* Η σχέση αυτή γράφεται $E-RC\frac{dV_c}{dt}-V_c=0$ η οποία με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού δίνει την (5.37).

Από τις τιμές του πίνακα φαίνεται ότι η σταθερά χρόνου παρέχει το μέτρο της ταχύτητας φόρτισης του πυκνωτή. Το διάγραμμα (1) του σχήματος 5.20 παρέχει τη μεταβολή της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχ. 5.20. Γραφική παράσταση της τάσης και της έντασης του ρεύματος κατά τη φόρτιση πυκνωτή

Η ένταση I του ρεύματος υπολογίζεται με τη βοήθεια του 2ου κανόνα του Kirchhoff, που για το κύκλωμα του σχηματος 5.19 (διακόπτης κλειστός) γράφεται ως εξής: $E-V_c-RI = 0$, από όπου προκύπτει:

$$I=\frac{E-V_c}{R} \tag{5.38}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.38) την τιμή της V_c από την (5.37) έχουμε:

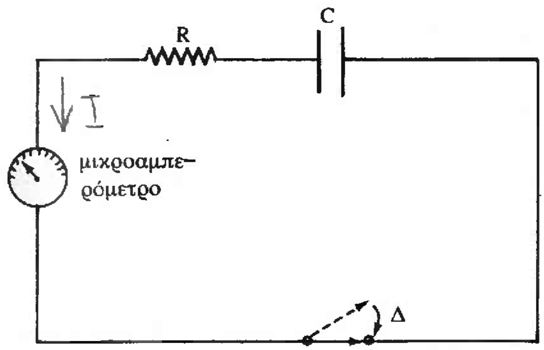
$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (5.39)$$

Αν στη σχέση (5.39) θέσουμε $t=0$ παίρνουμε $I=E/R$ που είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα δηλαδή $I_o=E/R$. Για $t \to \infty$ προκύπτει ότι $I=0$. Η γραφική παράσταση της (5.39) εικονίζεται στο διάγραμμα (2) του σχήματος 5.20. Από το ίδιο διάγραμμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε χρόνο 5τ η φόρτιση του πυκνωτή έχει πρακτικά ολοκληρωθεί.

1989

β) εκφόρτιση πυκνωτή.

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 5.21, όπου ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C και είναι φορτισμένος σε τάση E. Τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείνουμε το κύκλωμα με το διακόπτη Δ. Τότε, όπως δείχνει το μικροαμπερόμετρο, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα που σημαίνει ότι ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται. Η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη εκείνης που έδειχνε το μικροαμπερόμετρο κατά τη φόρτιση. Η ένταση του ρεύματος συνεχώς μικραίνει και τελικά γίνεται μηδέν. Αν τότε μετρήσουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή, βρίσκουμε ότι είναι μηδέν, γεγονός που φανερώνει ότι ο πυκνωτής εκφορτίστηκε.



Σχ. 5.21.

Κατά τη διάρκεια της εκφόρτισης η ένταση του ρεύματος περιορίζεται μόνο από την αντίσταση R. Έτσι, αν αυτή είναι μεγάλη, η εκφόρτιση έχει μεγάλη χρονική διάρκεια, ενώ αν είναι μικρή, είναι σύντομη. Επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια ο χρόνος που διαρκεί η εκφόρτιση τον πυκνωτή είναι ανάλογος και προς τη χωρητικότητά του C.

Η ενέργεια που αρχικά είχε αποταμιευτεί στον πυκνωτή σε μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε θερμότητα πάνω στην αντίσταση R.

Για να μελετήσουμε θεωρητικά την εκφόρτιση, εργαζόμαστε ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι μετά χρόνο t από τη στιγμή που άρχισε η εκφόρτιση η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι V_c και στα άκρα της αντίστασης είναι V_R. Ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff για το παραπάνω κύκλωμα γράφεται:

$$V_c - RI = 0$$

ή
$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \tag{5.40}$$

Η σχέση (5.40) με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού* δίνει ότι το φορτίο Q κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$\boxed{Q = Q_0 e^{-t/RC}} \tag{5.41}$$

όπου Q_0 το φορτίο τη χρονική στιγμή t=0.

Επειδή ισχύει $Q_0 = CE$ και $Q = CV_c$ η (5.41) γράφεται:

$$V_c = E\, e^{-t/RC} \tag{5.42}$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η τάση στον πυκνωτή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Αντικαθιστώντας την τάση V_c στην σχέση (5.40) υπολογίζουμε την ένταση I του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα

$$I = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \tag{5.43}$$

Θέτοντας στη σχέση (5.43) t=0 προκύπτει $I = \frac{E}{R}$ που είναι το ρεύμα το οποίο διαρρέει το κύκλωμα αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη. Αν το ρεύμα αυτό το συμβολίσουμε με I_0 η (5.43) γράφεται:

$$I = I_0 e^{-t/RC} \tag{5.44}$$

---

* Η σχέση (5.40) γράφεται ως εξής: $\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$ από την οποία προκύπτει η (5.41). Στην παραπάνω σχέση ο όρος $R\frac{dQ}{dt}$ έχει πρόσημο σύν διότι $I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ καθόσον ο πυκνωτής εκφορτίζεται.

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η σταθερά χρόνου τ=RC εμφανίζεται και στις εξισώσεις που εκφράζουν την εκφόρτιση του πυκνωτή. Αν στην εξίσωση (5.42) θέσουμε t=τ=RC προκύπτει ότι

$$V_c = Ee^{-1} \quad \text{ή} \quad V_c = 0{,}368E$$

Δηλαδή η σταθερά χρόνου εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για να ελαττωθεί η τάση του πυκνωτή και να γίνει ίση με το 36,8% της αρχικής τάσης E. Οι τιμές της τάσης V_c για τις χρονικές στιγμές t = 2τ, 3τ, 4τ, 5τ, 6τ δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

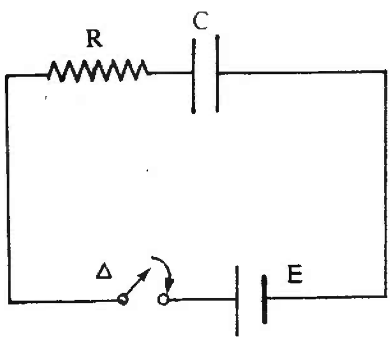
t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ
V_c	E	0,368E	0,135E	0,050E	0,012E	0,007E	0,003E

Εξάλλου από τη σχέση (5.42) προκύπτει ότι για $t \rightarrow \infty$, $V_c=0$. Στο διάγραμμα (1) του σχήματος 5.22 φαίνεται η μεταβολή της τάσης V_c με το χρόνο, ενώ στο διάγραμμα (2) η μεταβολή της έντασης με το χρόνο.

Αν στη σχέση (5.44) θέσουμε t=RC προκύπτει $I=I_o e^{-1}$ ή $I=0{,}368I_o$ και για $t \rightarrow \infty$, I=0. Δηλαδή το ρεύμα γίνεται θεωρητικά μηδέν μετά από άπειρο χρόνο. Όμως, πρακτικά μετά από χρόνο 5τ, το ρεύμα στο κύκλωμα έχει μηδενιστεί. Μπορούμε συνεπώς να θεωρούμε ότι, η εκφόρτιση ολοκληρώνεται σε χρόνο 5τ.

Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι η αντίσταση είναι R=10KΩ, η χωρητικότητα του αφόρτιστου πυκνωτή είναι C=20μF, η πηγή έχει ΗΕΔ E=100Volt και η εσωτερική της αντίσταση είναι αμελητέα. Όταν κλείσει ο διακόπτης Δ να υπολογιστούν:

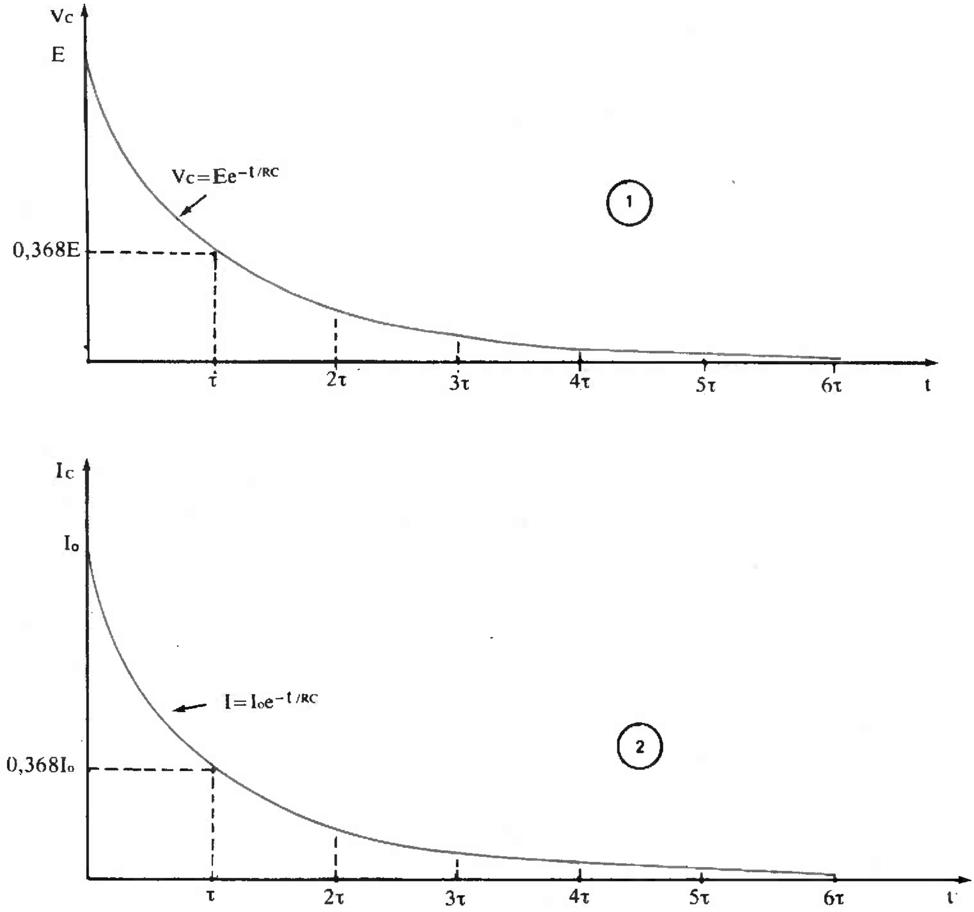


α) η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

β) η τάση στην αντίσταση και η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή 2τ.

γ) η ενέργεια που έχει μεταφερθεί από την πηγή στον πυκνωτή τη χρονική στιγμή 2τ.

δ) σε πόσο χρόνο από το κλείσιμο του διακόπτη Δ θα ολοκληρωθεί η φόρτιση;



Σχ. 5.22. Η τάση V_c και η ένταση του ρεύματος κατά την εκφόρτιση του πυκνωτή.

Λύση

α) Η σταθερά χρόνου είναι τ=RC. Για το συγκεκριμένο κύκλωμα $\tau=10\cdot10^3\cdot20\cdot10^{-6}sec \Rightarrow \tau=0{,}2sec$

β) Από το 2ο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει $E=V_c+V_R$ ή $V_R=E-V_c$.

Από τον πίνακα έχουμε για t=2τ, $V_c=0{,}865E$. Δεδομένου ότι E = 100Volt παίρνουμε $V_c= 86{,}5Volt$. Άρα $V_R= E-V_c= (100-86{,}5)Volt = 13{,}5Volt$.

Συνεπώς για t=2τ, $V_R=13{,}5Volt$.

Το ρεύμα υπολογίζεται από το νόμο του Ohm. Έτσι

$$I=\frac{V_R}{R}=\frac{13{,}5}{1\cdot10^4}A=1{,}35mA$$

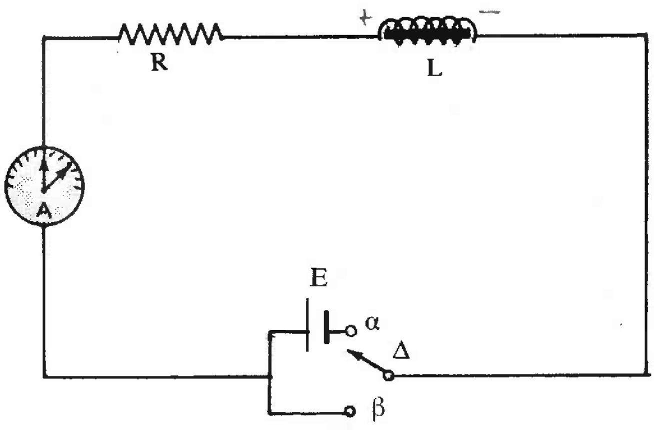
γ) Η ενέργεια E που έχει μεταφερθεί στον πυκνωτή όταν έχει τάση $V_c=86{,}5V$ είναι $E = \frac{1}{2}CV_c^2$. Αντικαθιστώντας έχουμε $E = \frac{1}{2}20\cdot10^{-6}\cdot86{,}5^2Joule = 0{,}0748Joule$.

δ) Ο χρόνος στον οποίο ολοκληρώνεται η φόρτιση είναι θεωρητικά άπειρος. Στην πράξη θεωρούμε ότι η φόρτιση ολοκληρώνεται σε χρόνο 5τ. Σε χρόνο λοιπόν 5×0,2sec = 1sec ο πυκνωτής έχει φορτιστεί.

5.12. Κύκλωμα συνεχούς ρεύματος με RL σε σειρά

α) κλείσιμο του διακόπτη

Έστω ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει πηγή E, ωμική αντίσταση R, πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L και αμελητέας ωμικής αντίστασης, αμπερόμετρο A και διακόπτη Δ, σχ. 5.23.



Σχ. 5.23.

Μέσα στο πηνίο έχει τοποθετηθεί πυρήνας μαλακού σιδήρου για την αύξηση της αυτεπαγωγής L του πηνίου.

Όταν κλείσει ο διακόπτης Δ, από τις ενδείξεις του αμπερομέτρου φαίνεται ότι η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα αυξάνει συνεχώς και τελικά παίρνει τη

μέγιστη τιμή της I_o. Αν τότε μετρήσουμε την τάση στα άκρα του πηνίου, βρίσκουμε ότι είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $E=RI_o$ ή ότι $I_o=E/R$.

Το γεγονός ότι η ένταση του ρεύματος δεν αποκτά ακαριαία τη μέγιστη τιμή της I_o, δικαιολογείται ως εξής: Η ένταση του ρεύματος από μηδέν που ήταν στο ανοιχτό κύκλωμα, παίρνει κάποια τιμή I σε μικρό χρόνο Δt.

Η μεταβολή της έντασης κατά ΔI ($\Delta I = I - 0$) προκαλεί την εμφάνιση ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου σύμφωνα με τον τύπο: $E_{αυτ} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Η $E_{αυτ}$ αντιστέκεται στην παραπέρα αύξηση της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα. Γι' αυτό περνάει αρκετό χρονικό διάστημα, έως ότου η ένταση του ρεύματος αποκτήσει σταθερή τιμή I_o.

Το χρονικό αυτό διάστημα είναι ανάλογο με την αυτεπαγωγή L του πηνίου, διότι η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος είναι ανάλογη του L. Επίσης ο χρόνος αυτός εξαρτάται και από την αντίσταση R του κυκλώματος. Όταν η αντίσταση R είναι μικρή, τότε το ρεύμα I_o($I_o=\frac{E}{R}$) είναι μεγάλο, η μεταβολή από μηδέν σε I_o είναι μεγάλη και αντίστοιχα μεγάλη θα είναι η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, με συνέπεια να αργήσει το ρεύμα να πάρει την τιμή I_o. Αντίστροφα, όταν η αντίσταση R είναι μεγάλη, η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι μικρή, και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να γίνει το ρεύμα ίσο με I_o είναι μικρό.

Αν εφαρμόσουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του σχήματος 5.23 (διακόπτης κλειστός) θα πάρουμε:

$$E - L\frac{\Delta I}{\Delta t} - IR = 0 \qquad (5.45)$$

Η εξίσωση (5.45) που περιέχει την ένταση I και τη μεταβολή της $\frac{\Delta I}{\Delta t}$, μπορεί να λυθεί μόνο με ολοκληρωτικό λογισμό* Αποδεικνύεται ότι η ένταση I του ρεύματος δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (5.46)$$

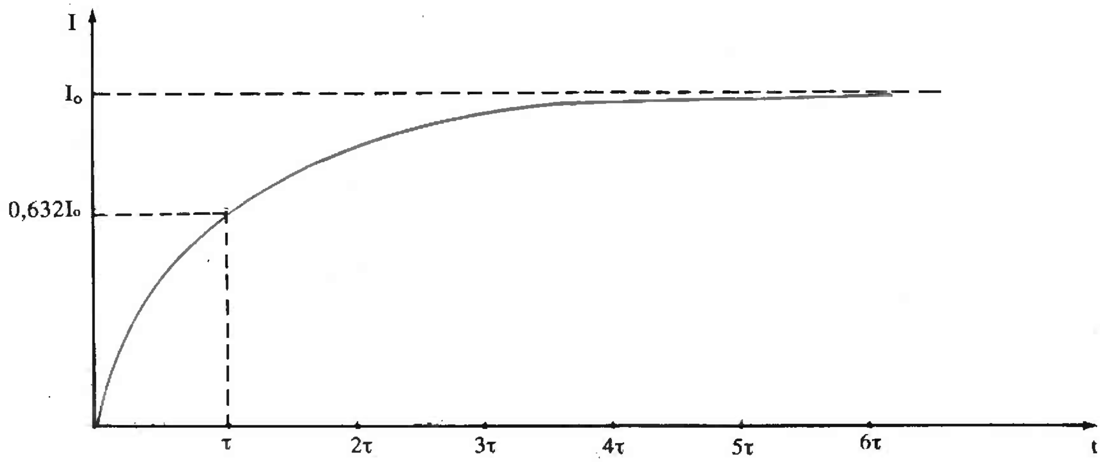
και παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 5.24.

Από την (5.46) προκύπτει ότι για t=0, I=0, ενώ για $t \to \infty$, $I = I_o = E/R$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ύστερα από αρκετό χρόνο, θεωρητικά άπειρο, η ένταση αποκτάει σταθερή τιμή.

Αν στην εξίσωση (5.46) θέσουμε $t=L/R$ προκύπτει:

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-1})$$

* η ακριβής έκφραση της (5.45) είναι: $E - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$ η λύση της οποίας δίνει τη (5.46).



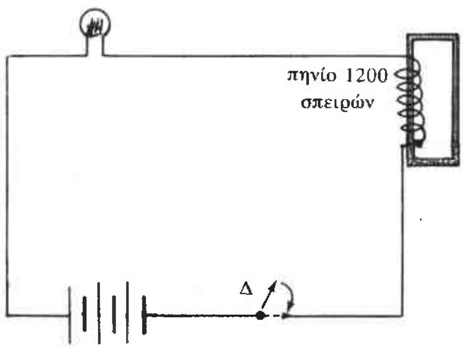
Σχ. 5.24. Γραφική παράσταση του ρεύματος στο κύκλωμα του σχ. 5.23 μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

$$\text{ή} \qquad I=\frac{E}{R}(1-\frac{1}{2,718})$$

$$\text{ή} \qquad I=0,632\frac{E}{R}$$

και επειδή $E/R=I_o$ προκύπτει: $I=0,632I_o$ (5.47)

Το L/R έχει διαστάσεις χρόνου και σε αντιστοιχία με το RC, ονομάζεται **σταθερά χρόνου τ,** του κυκλώματος.



Σχ. 5.25.

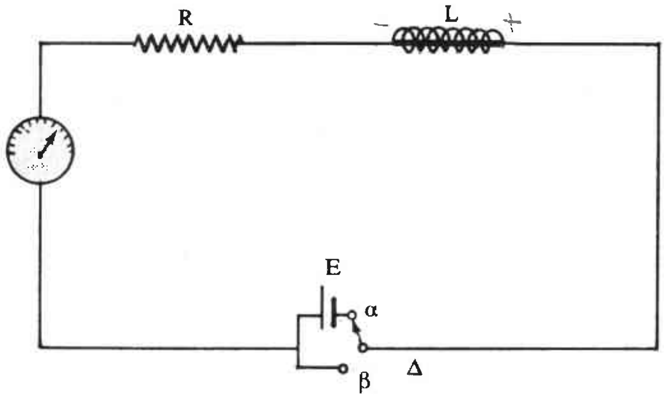
Η σταθερά χρόνου σύμφωνα με τη σχέση (5.47) εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για να πάρει η ένταση του ρεύματος τιμή ίση με το 63,2% της μέγιστης τιμής της.

Μπορούμε να δείξουμε πειραματικά τη βαθμιαία αύξηση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα με αυτεπαγωγή και αντίσταση με τη διάταξη του σχήματος 5.25.

Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ, η φωτοβολία του λαμπτήρα αρχίζει να αυξάνει με βραδύ ρυθμό και μετά από ορισμένο χρόνο σταθεροποιείται στη μέγιστη τιμή της.

β. άνοιγμα του διακόπτη

Ας θεωρήσουμε πάλι το κύκλωμα του σχήματος 5.23 και έστω ότι η ένταση του ρεύματος έχει αποκτήσει σταθερή τιμή $I_o = E/R$. Αν τη χρονική στιγμή t=0



Σχ. 5.23

μεταφέρουμε το μεταγωγό Δ απότομα από τη θέση α, στη θέση β τότε θα παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης του οργάνου κινείται αργά προς την ένδειξη μηδέν. Δηλαδή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, χωρίς να περιέχεται σ' αυτό πηγή.

Αυτό εξηγείται ως εξής: Όταν ο διακόπτης Δ απομακρυνθεί από τη θέση α, το ρεύμα στο κύκλωμα τείνει να μηδενιστεί με αποτέλεσμα να αναπτυχθεί στο πηνίο ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αντιστέκεται στη μείωση του ρεύματος. Έτσι όταν ο διακόπτης έρθει στη θέση β, το κύκλωμα θα συνεχίσει να διαρρέεται από ρεύμα, του οποίου η ένταση από I_o, που ήταν αρχικά, προοδευτικά μηδενίζεται. Τελικά όλη η ενέργεια που είχε αποθηκευτεί στο πηνίο με τη μορφή εβέργειας μαγνητικού πεδίου, μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση R και το ρεύμα μηδενίζεται.

Εφαρμόζοντας το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα παίρνουμε:

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} - RI = 0$$

$$\text{ή} \quad L\frac{\Delta I}{\Delta t} + RI = 0 \qquad (5.48)$$

Η σχέση (5.48) με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού* δίνει για την ένταση I του ρεύματος:

$$I = I_o\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (5.49)$$

* Η ακριβής μορφή της (5.48) είναι: $L\frac{dI}{dt} + RI = 0$ και από τη λύση της οποίας προκύπτει η (5.49).

Από την (5.49) προκύπτει ότι για t=0, $I=I_o$ και για $t\to\infty$, I=0, δηλαδή το ρεύμα μηδενίζεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Αν στην (5.49) θέσουμε t=L/R προκύπτει ότι:

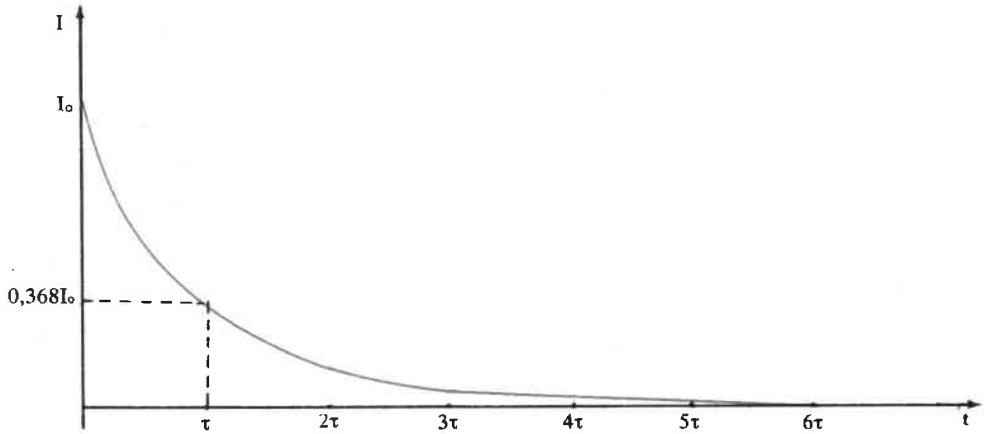
$$I=I_o e^{-1}$$

$$\text{ή} \quad I=\frac{I_o}{e}$$

$$\text{ή} \quad I=0{,}368I_o$$

Δηλαδή σε χρονικό διάστημα ίσο με τη σταθερά χρόνου η ένταση του ρεύματος πέφτει στο 36,8% της αρχικής της τιμής.

Η γραφική παράσταση της σχέσης (5.49)εικονίζεται στο σχ. 5.26



Σχ. 5.26.

Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση, η ένταση του ρεύματος έχει πρακτικά μηδενιστεί σε χρόνο ίσο με 5τ.

5.13. Ενέργεια του μαγνητικού πεδίου

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όταν σε ένα κύκλωμα υπάρχει πηνίο, τότε κάθε μεταβολή στην ένταση του ρεύματος που το διαρρέει συνοδεύεται από εμφάνιση ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, η οποία αντιστέκεται στην κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων στο κύκλωμα. Κατά συνέπεια, για να κινηθούν τα ηλεκτρικά φορτία στους αγωγούς, απαιτείται πρόσθετο έργο που εκφράζει τη μεταφορά ενέργειας από την πηγή στο πηνίο (ενέργεια μαγνητικού πεδίου).

Έτσι όταν ένα πηνίο αυτεπαγωγής L διαρρέεται από ρεύμα έντασης I, έχει αποθηκευμένη ενέργεια E που δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (5.50)$$

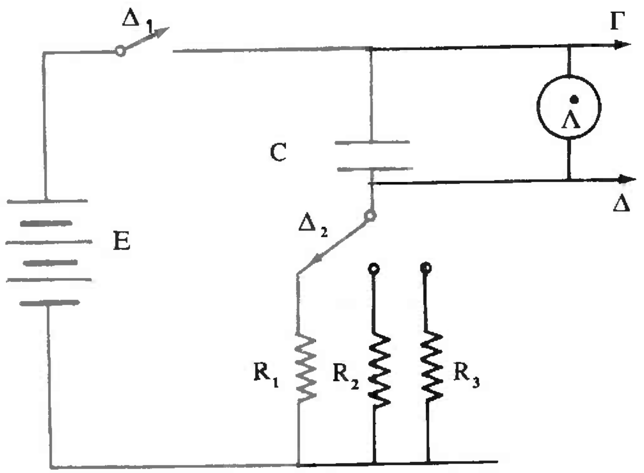
Εφαρμογές των κυκλωμάτων RC

1990

5.14. Αρχή παραγωγής πριονωτής τάσης

Οι συνδυασμοί RC σε σειρά χρησιμοποιούνται κυρίως σε κυκλώματα ηλεκτρονικών συσκευών, όπως π.χ. ο παλμογράφος και η τηλεόραση. Παρόλο που η πλήρης περιγραφή ενός απλού κυκλώματος που περιλαμβάνει ένα ζεύγος RC απαιτεί ειδικές γνώσεις και χρήση ανώτερων μαθηματικών, ωστόσο μπορούμε να μελετήσουμε ποιοτικά ένα τέτοιο κύκλωμα.

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 5.27.



Σχ. 5.27.

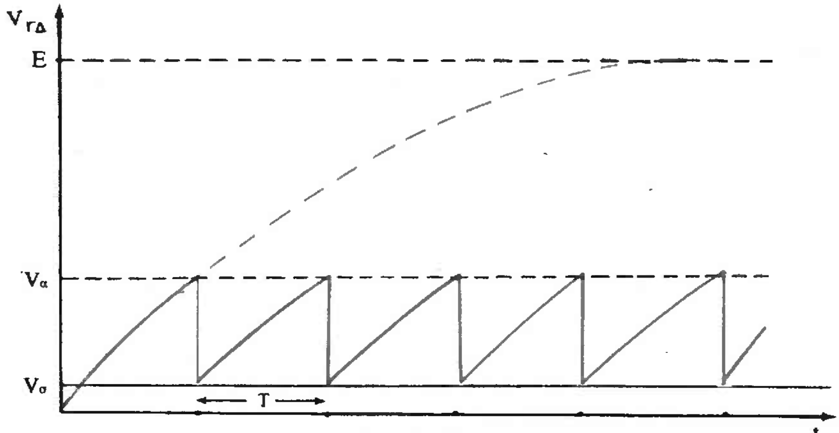
Η λυχνία Λ είναι ειδικής κατασκευής και αντί για νήμα περιέχει αέριο σε χαμηλή πίεση*. Όταν η τάση στα άκρα της υπερβεί μια συγκεκριμένη τιμή V_α

---

* η λυχνία αυτή ονομάζεται θύρατρον.

τότε διαρρέεται από ρεύμα μεγάλης έντασης, οπότε ακαριαία η τάση πέφτει σε μιά χαμηλή τιμή Vσ και η λυχνία δε διαρρέεται πλέον από ρεύμα.

Με το κλείσιμο του διακόπτη Δ_1 σχηματίζεται κλειστό κύκλωμα από τον πυκνωτή C την αντίσταση R_1 και την πηγή Ε. Ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται και η τάση στα άκρα του αυξάνεται προοδευτικά προς την τελική της τιμή, που είναι η τάση Ε της πηγής. Όταν όμως η τάση στον πυκνωτή ξεπεράσει την τάση V_α, (V_α<E), η λυχνία διαρρέται από ρεύμα μεγάλης έντασης και ο πυκνωτής εκφορτίζεται απότομα. Τότε η τάση στα άκρα της λυχνίας πέφτει πολύ κάτω από V_α, δηλαδή στη V_σ, και το ρεύμα μηδενίζεται. Στη συνέχεια με την επίδραση της πηγής ο πυκνωτής αρχίζει πάλι να φορτίζεται και το φαινόμενο επαναλμβάνεται συνεχώς κατά όμοιο τρόπο. Οι μεταβολές της τάσης στα άκρα της λυχνίας με το χρόνο φαίνονται στο σχήμα 5.28.



Σχ. 5.28

Από το διάγραμμα του σχήματος 5.28 φαίνεται ότι η τάση στα άκρα της λυχνίας μεταβάλλεται από V_σ σε V_α και έχει περίοδο Τ.

Λόγω της μορφής της η τάση αυτή ονομάζεται πριονωτή τάση.

Αν μεταφέρουμε το διακόπτη Δ_2 σε άλλη αντίσταση, η σταθερά χρόνου $\tau=RC$ που καθορίζει την ταχύτητα φόρτισης του πυκνωτή αλλάζει. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε αύξηση ή μείωση της περιόδου της πριονωτής τάσης.

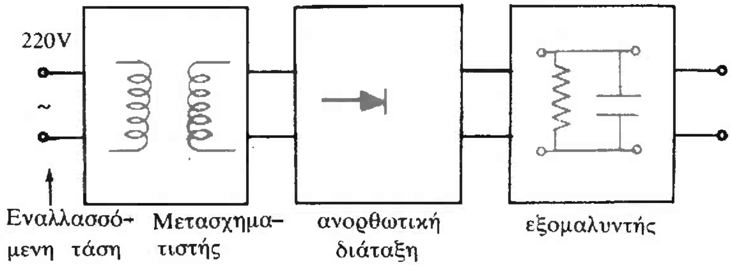
Η πριονωτή τάση είναι βασικό στοιχείο για τη δημιουργία της εικόνας στον παλμογράφο και την τηλεόραση.

1992

5.15. Εξομάλυνση ανορθωμένης τάσης.

Γνωρίζουμε ότι ένας μεγάλος αριθμός ηλεκτρονικών διατάξεων λειτουργεί με συνεχές ρεύμα. Για το λόγο αυτό έπρεπε να βρεθεί τρόπος μετατροπής της εναλλασσόμενης τάσης, την οποία διαθέτουμε, σε συνεχή. Η μετατροπή αυτή

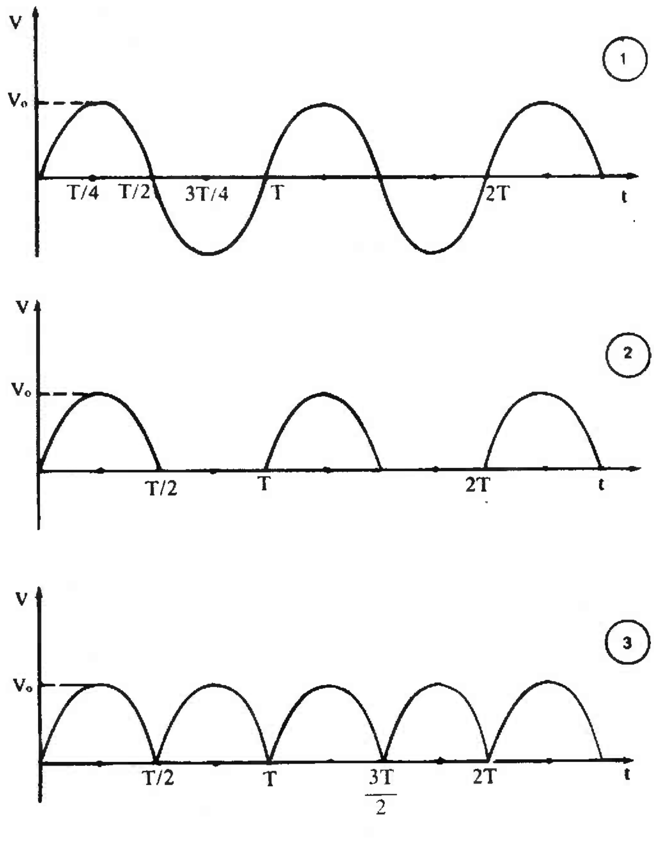
υλοποιείται με το συνδυασμό των εξής τριών διατάξεων, σχ. 5.29. Πρώτον του μετασχηματιστή δεύτερον της ανορθωτικής διάταξης και τρίτον της διάταξης της εξομάλυνσης.



Σχ. 5.29

Ο μετασχηματιστής υποβιβάζει ή ανυψώνει την εναλλασσόμενη τάση στην τιμή που καθορίζουν οι απαιτήσεις μας σε συνεχή τάση.

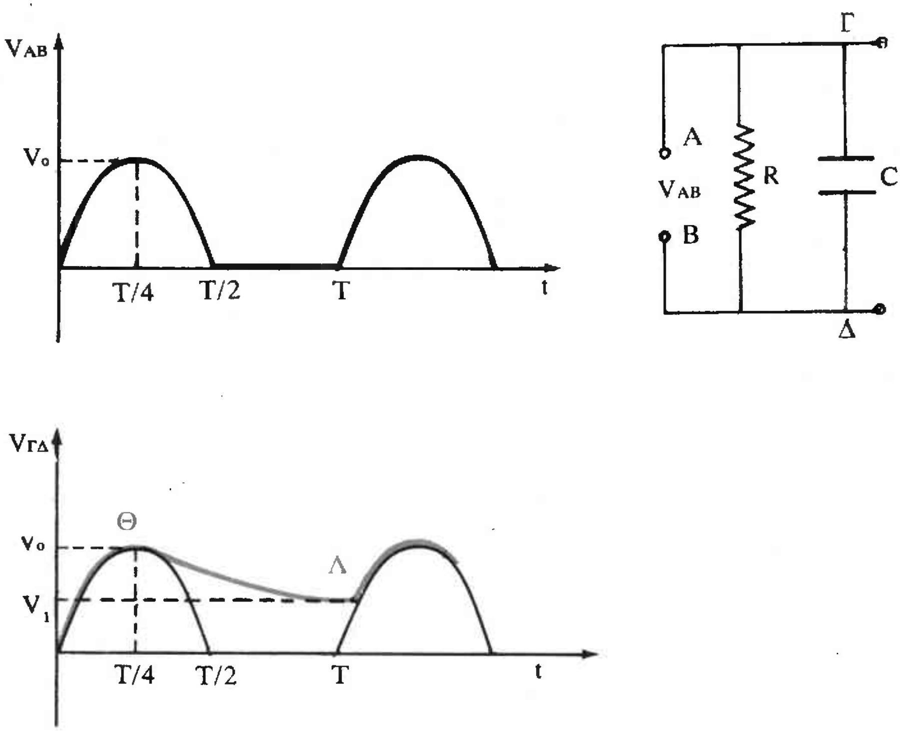
Η ανορθωτική διάταξη μετατρέπει την εναλλασσόμενη τάση σε ημιανορθωμένη ή πλήρως ανορθωμένη τάση, που φαίνονται αντίστοιχα στα διαγράμματα 2 και 3 του σχήματος 5.30.



Σχ. 5.30

Η διάταξη της εξομάλυνσης που περιλαμβάνει αντίσταση και πυκνωτή έχει τον εξής ρόλο. Από το σχήμα 5.30 (2) φαίνεται ότι η ημιανορθωμένη τάση είναι συνεχής (το ρεύμα κινείται μόνο κατά μια φορά), αλλά η τιμή της παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Παραδείγματος χάρη κατά το χρονικό διάστημα από 0 έως T/2 μεταβάλλεται από μηδέν έως V_o και από T/2 έως T είναι συνεχώς μηδέν, με αποτέλεσμα να διαφέρει σημαντικά από τη συνεχή τάση που χρειαζόμαστε.

Αν η ημιανορθωμένη αυτή τάση οδηγηθεί σε ένα σύστημα RC, σχ. 5.31, τότε ο πυκνωτής φορτίζεται και εκφορτίζεται κατά περιοδικά διαστήματα. Ας μελετήσουμε αναλυτικά τι ακριβώς συμβαίνει.

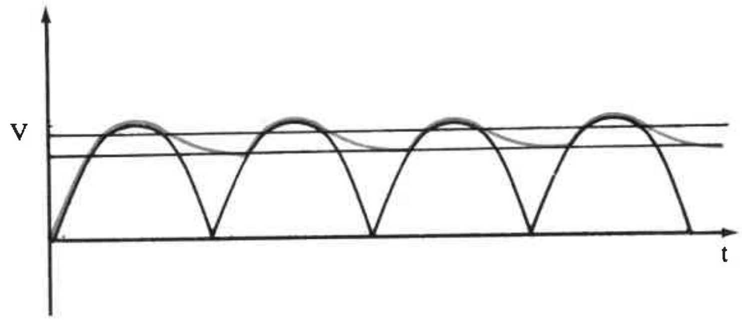


Σχ. 5.31.

Όταν η ημιανορθωμένη τάση V_{AB} αυξάνεται, ο πυκνωτής φορτίζεται και αποκτάει το μέγιστο φορτίο του τη στιγμή που αυτή γίνεται V_o. Στη συνέχεια η μείωση της τάσης οδηγεί σε εκφόρτιση του πυκνωτή. Επειδή όμως η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RC έχει επιλεγεί ώστε να είναι πολύ μεγαλύτερη από την περίοδο της ημιανορθωμένης τάσης, η εκφόρτιση διαρκεί πολύ χρόνο και η αντίσταση R διαρρέεται από ρεύμα κατά το χρονικό διάστημα T/2 ώς T όπως φαίνεται στο σχήμα 5.31 Τη χρονική στιγμή t=T η τάση αρχίζει πάλι να αυξάνεται, ο πυκνωτής που δεν έχει εκφορτιστεί τελείως αρχίζει πάλι να φορτίζεται.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς η ίδια, με αποτέλεσμα οι διακυμάνσεις της τάσης να περιορίζονται μεταξύ V_1 και V_o, σχ. 5.31, δηλαδή η τάση μεταβάλλεται κατά λιγότερο απότομο τρόπο.

Αν αντί ημιανορθωμένης τάσης είχαμε πλήρως ανορθωμένη η εξομάλυνση θα ήταν πιο μεγάλη και η τάση θα έμοιαζε περισσότερο προς τη συνεχή, σχ. 5.32.

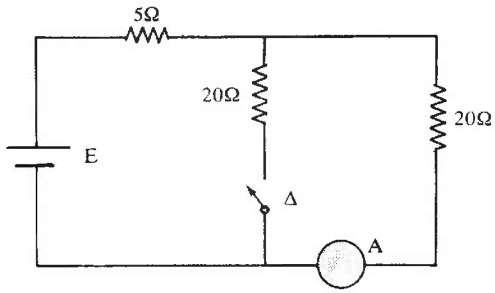


Σχ. 5.32. Η τάση μετά την εξομάλυνση πλησιάζει πολύ προς τη συνεχή τάση V.

Η εξομάλυνση βελτιώνεται ακόμα περισσότερο με ειδικά ηλεκτρονικά κυκλώματα, ώστε η τάση να είναι τελείως σταθερή όπως και στους συσσωρευτές.

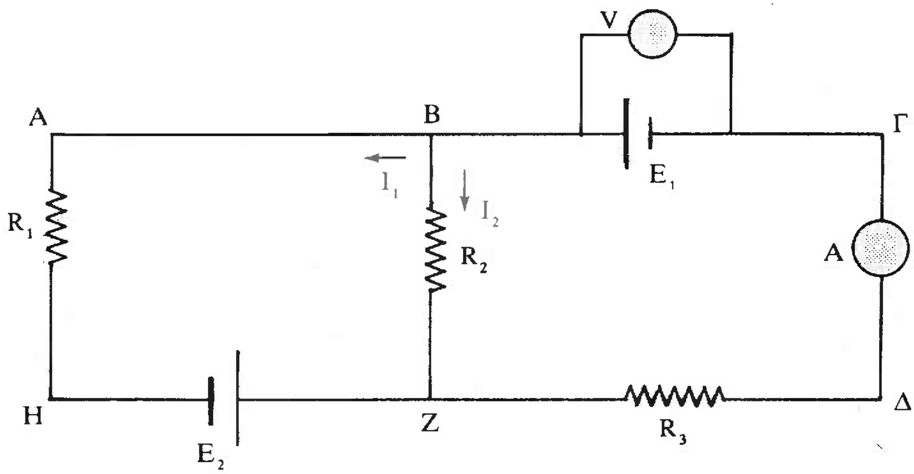
Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Όταν ο διακόπτης Δ είναι ανοιχτός, το αμπερόμετρο δείχνει 2A. Πόση είναι η ΗΕΔ E της πηγής; Πόσο θα δείχνει το αμπερόμετρο, αν ο διακόπτης κλείσει;



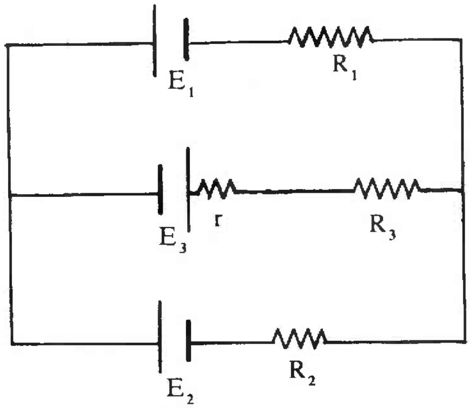
(**Απ.** 50Volt, 5/3 **A**)

2. Να υπολογιστούν οι ενδείξεις των οργάνων του κυκλώματος καθώς επίσης και η αντίσταση R_1. Δίνεται ότι $R_2=2\Omega$, $R_3=2\Omega$, $E_2=20$ Volt, $I_1=5A$ και $I_2=1A$.



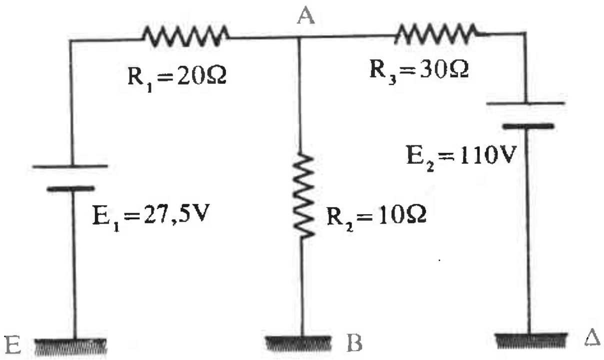
(**Απ.**6A, 14Volt, 4,4Ω)

(3.) Στο εικονιζόμενο κύκλωμα δίνεται ότι: $R_1=R_2=5\Omega$, $r=1\Omega$, $R_3=4\Omega$, $E_1=E_2=20$Volt και $E_3=10$ Volt. Να υπολογιστούν τα ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος.



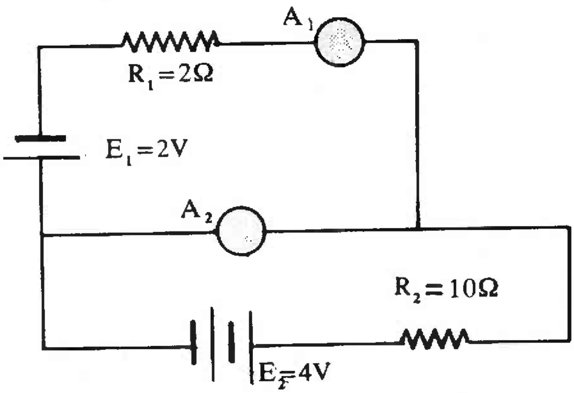
(**Απ.** $I_1=I_2=2A$, $I_3=4A$)

(4.) Να υπολογιστεί η ένταση και η φορά του ρεύματος που διαρρέει κάθε μια από τις τρεις αντιστάσεις στο κύκλωμα του σχήματος. Η εσωτερική αντίσταση των δυο πηγών να θεωρηθεί αμελητέα.



(**Απ.** $I_1=0$, $I_2=2{,}75A$, $I_3=2{,}75A$)

(5.) Δύο ηλεκτρικές πηγές $E_1=2$ Volt και $E_2=4$ Volt, που έχουν μηδενική εσωτερική αντίσταση, συνδέονται με τις αντιστάσεις $R_1=2\Omega$, $R_2=10\Omega$ και τα αμπερόμετρα A_1 και A_2 όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος.



Η ένδειξη κάθε οργάνου μπορεί να είναι μια από τις ακόλουθες τιμές:

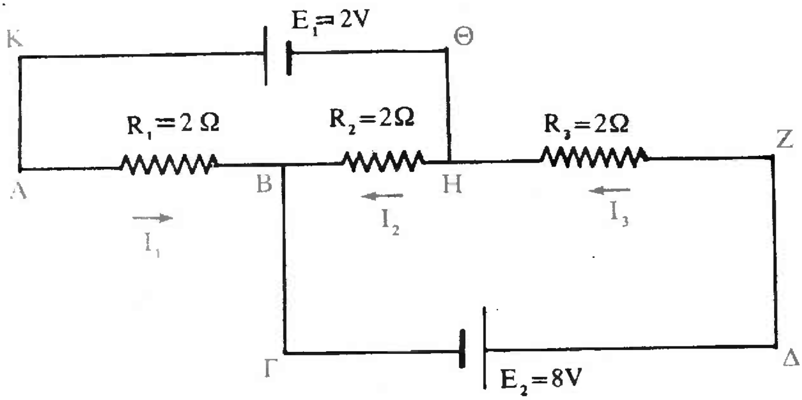
Α 0,4Α Β 0,5Α Γ 0,6Α Δ 1Α Ε 1,5Α

α) Ποια είναι η ένδειξη του αμπερομέτρου A_1;

β) Ποια είναι η ένδειξη του A_2;

(Απ. α) Δ β) Γ)

6. Οι αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 στο κύκλωμα του σχήματος είναι 2Ω η κάθε μία και οι ΗΕΔ των πηγών είναι $E_1=2$ Volt και $E_2=8$ Volt, ενώ η εσωτερική τους αντίσταση είναι αμελητέα.



Τρεις μαθητές Α, Β, Γ έδωσαν για τα ρεύματα I_1, I_2 I_3 τις εξής τιμές:

ο μαθητής Α: $I_1=1A$, $I_2=0{,}5A$, $I_3=2A$

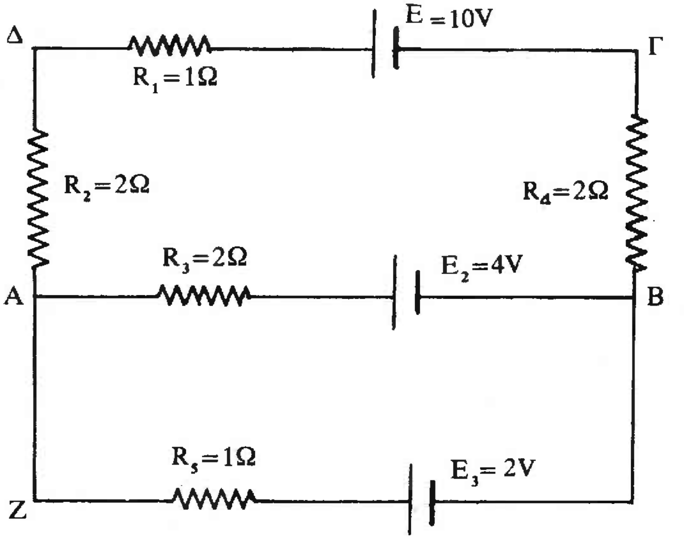
ο μαθητής Β: $I_1=0{,}5A$, $I_2=1A$, $I_3=1{,}5A$

ο μαθητής Γ: $I_1=2A$, $I_2=1A$, $I_3=3A$

Χωρίς να υπολογίσετε εκ νέου τις τιμές των ρευμάτων, μπορείτε να υποδείξετε τη σωστή λύση;

(Απ. Γ)

7. Να υπολογιστούν οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος.

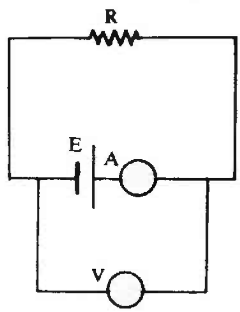


(**Απ.** $\frac{22}{17}$A, $\frac{4}{17}$A, $\frac{26}{17}$A)

8. Πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης E=20 Volt τροφοδοτεί αντίσταση R=8Ω. Η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 2,1A και του βολτομέτρου 15,9 Volt.

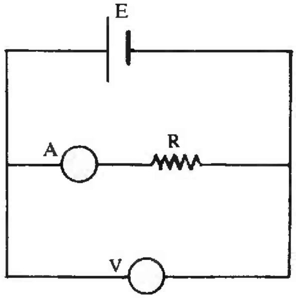
Να υπολογιστεί η εσωτερική αντίσταση της πηγής και η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου.

(**Απ.** 1,95Ω, 140,7Ω)

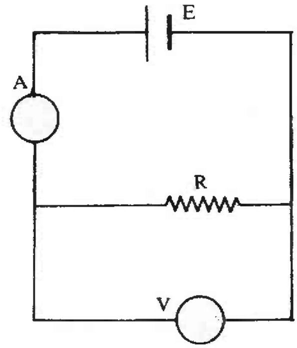


9. Να δείξετε ότι η τιμή που προκύπτει για την αντίσταση R από τις ενδείξεις του βολτομέτρου και του αμπερομέτρου είναι:

$$\frac{V}{I} - R_A$$



όπου V, I οι ενδείξεις του βολτομέτρου και του αμπερομέτρου αντίστοιχα και R_A η εσωτερική αντίσταση του τελευταίου.

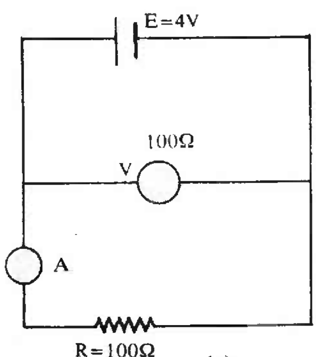


10. Να αποδείξετε ότι η τιμή που προκύπτει για την αντίσταση R από τις ενδείξεις του βολτομέτρου και του αμπερομέτρου είναι:

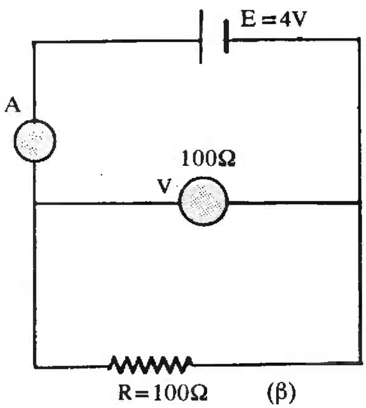
$$\frac{V}{I-\dfrac{V}{R_V}}$$

όπου I, V οι ενδείξεις του αμπερομέτρου και του βολτομέτρου αντίστοιχα και R_V η αντίσταση του βολτομέτρου.

11. Τα κυκλώματα α και β δείχνουν δύο διαφορετικούς τρόπους σύνδεσης ενός βολτομέτρου εσωτερικής αντίστασης 100Ω, ενός αμπερομέτρου, μιας πηγής E=4 Volt, αμελητέας εσωτερικής αντίστασης και μιας αντίστασης R=100Ω.



(α)



(β)

Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις που αναφέρονται στις ενδείξεις των οργάνων είναι σωστές;

α) Το αμπερόμετρο στο κύκλωμα (β) παρέχει το άθροισμα των ρευμάτων που διέρχονται από το βολτόμετρο και την αντίσταση.

β) Ο λόγος της ένδειξης του βολτομέτρου προς την ένδειξη του αμπερομέτρου στο κύκλωμα (β) είναι 50Ω.

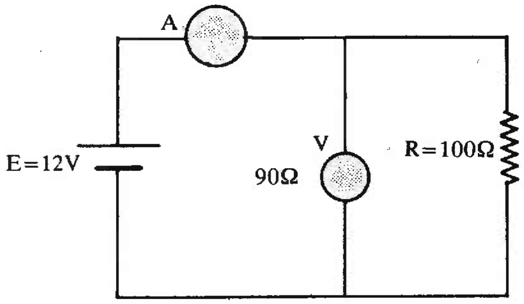
γ) Η τιμή της αντίστασης, όπως υπολογίζεται από τις ενδείξεις των οργάνων, είναι πολύ πιο κοντά στην πραγματική τιμή για το κύκλωμα (α).

δ) Όταν το βολτόμετρο αποσυνδεθεί στο κύκλωμα (α), η ένδειξη του αμπερομέτρου διπλασιάζεται.

ε) Το βολτόμετρο στο κύκλωμα (α) μετράει την πραγματική διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης.

(**Απ.** α) σωστή β) σωστή γ) σωστή δ) λάθος ε) σωστή)

12. Μια ηλεκτρική πηγή τροφοδοτεί κύκλωμα που περιλαμβάνει αντίσταση R=100Ω, βολτόμετρο μικρής εσωτερικής αντίστασης 90Ω και αμπερόμετρο με εσωτερική αντίσταση 10Ω. Ο τρόπος σύνδεσης φαίνεται στο σχήμα.



α) Πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει το αμπερόμετρο;

β) Πόση είναι η ένδειξη του αμπερομέτρου αν από το κύκλωμα αφαιρεθεί το βολτόμετρο;

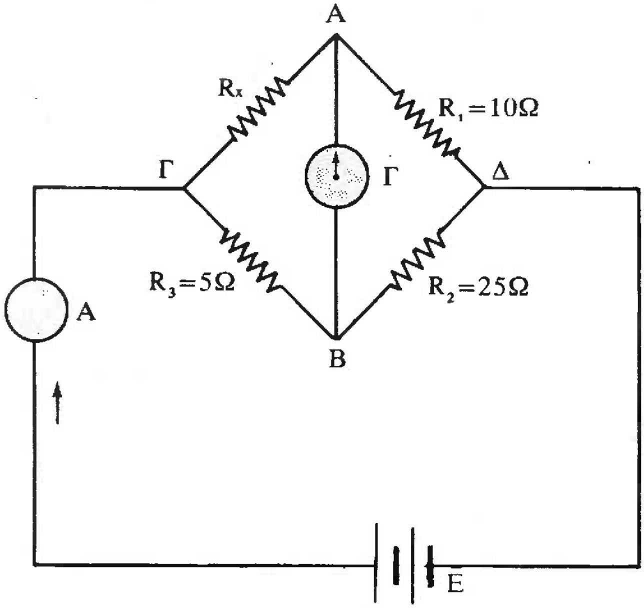
γ) Ποιές θα είναι οι ενδείξεις των οργάνων, αν χρησιμοποιηθεί ο δεύτερος τρόπος σύνδεσης που περιγράφηκε στην παράγραφο 5.3.

(**Απ.** α) 0,21Α β) 0,11Α γ) 0,11Α, 12Volt)

13. Η γέφυρα Wheatstone του σχήματος βρίσκεται σε ισορροπία και το αμπερόμετρο δείχνει 1,4Α. Να υπολογιστούν:

α) η αντίσταση R_x,

β) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε κλάδο της γέφυρας.



(Απ. 2Ω 1Α 0,4Α)

14. Μια συσκευή έχει χαρακτηριστικά λειτουργίας 6Volt, 2Watt και πρόκειται να τροφοδοτηθεί μέσω διαιρέτη τάσης από μπαταρία αυτοκινήτου 12 Volt.

Ποιος από τους παρακάτω συνδυασμούς αντιστάσεων είναι ο καλύτερος και γιατί;

Α $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 2\Omega$

Β $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$

Γ $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 10\Omega$

Δ $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 15\Omega$

Ε $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\Omega$

ΣΤ $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 50\Omega$

(Απ. Α)

15. Μια συσκευή με χαρακτηριστικά λειτουργίας 110Volt, 55Watt πρόκειται να τροφοδοτηθεί από δίκτυο 220Volt. Για τη σύνδεσή της στο δίκτυο προτείνονται οι εξής δύο λύσεις:

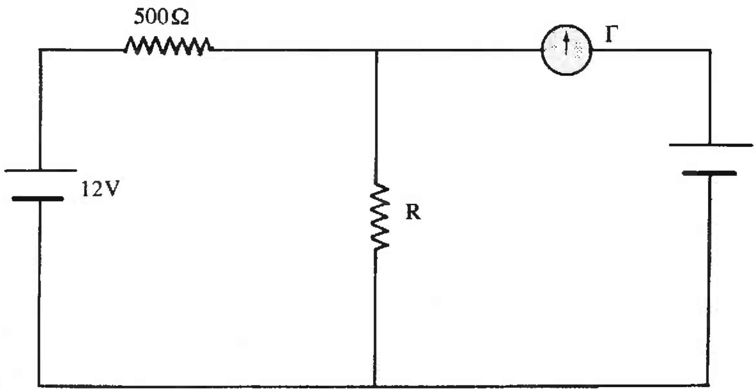
α) Να χρησιμοποιηθεί διαιρέτης τάσης που αποτελείται από δύο αντιστάσεις 200Ω σε σειρά.

β) Να χρησιμοποιηθεί μετασχηματιστής υποβιβασμού τάσης που έχει συντελεστή απόδοσης 80%.

Ποια από τις παραπάνω λύσεις είναι η καλύτερη από πλευράς δαπάνης σε ηλεκτρική ενέργεια;

(Απ. β)

16) Στο κύκλωμα του σχήματος η ένδειξη του γαλβανομέτρου Γ είναι μηδέν. Πόση είναι

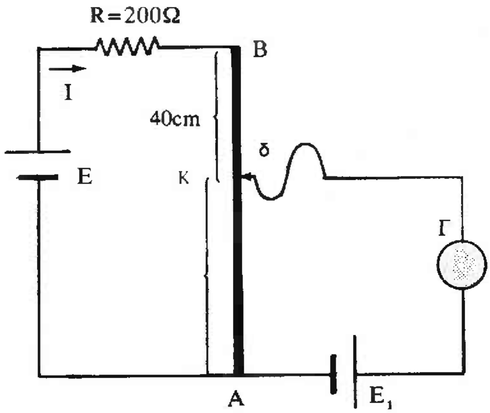


η τιμή της αντίστασης R; **(Απ.100Ω)**

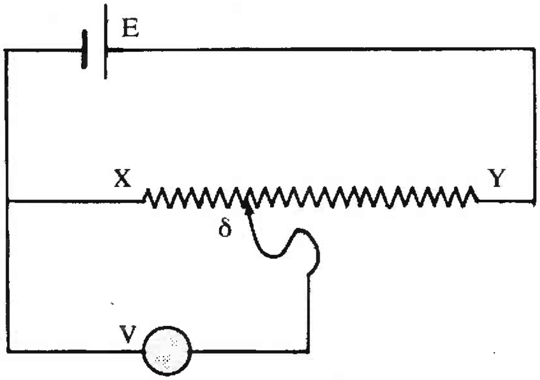
17. Στην ποτενσιομετρική διάταξη του σχήματος, το γαλβανόμετρο δείχνει μηδέν όταν ο δρομέας δ βρίσκεται στη θέση Κ, που απέχει 40cm από το άκρο Β του σύρματος ΑΒ το οποίο έχει μήκος 100cm και αντίσταση 4Ω.

Αν η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R=200Ω είναι 1 Volt, να υπολογίσετε την άγνωστη ηλεκτρεγερτική δύναμη E_1.

(Απ. 0,012Volt)



18. Στο κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι:



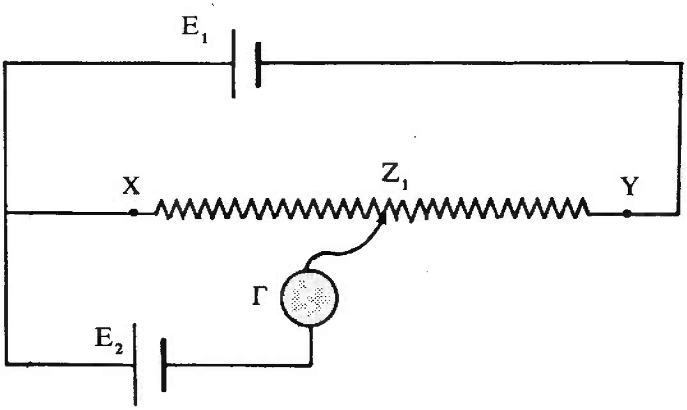
α) Το στοιχείο Ε έχει ΗΕΔ 5 Volt και μηδενική εσωτερική αντίσταση.
β) Το ποτενσιόμετρο έχει μήκος 1m και αντίσταση 6ΚΩ.
γ) Το βολτόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση 2ΚΩ.

Όταν ο δρομέας δ κινείται από το X προς το Y το ρεύμα I που παρέχει η πηγή:

Α αυξάνεται
Β μειώνεται
Γ μέχρι κάποιο σημείο του ποτενσιομέτρου αυξάνεται και κατόπιν μειώνεται.
Δ μέχρι κάποιο σημείο του ποτενσιομέτρου μειώνεται και κατόπιν αυξάνεται
Ε δε μεταβάλλεται καθόλου.

Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστή;

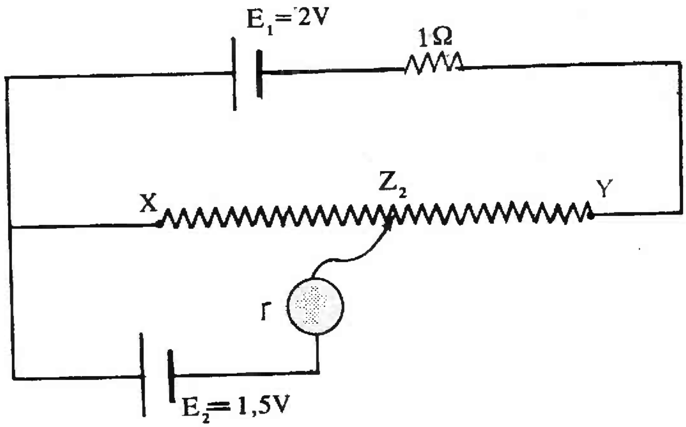
19. Η ποτενσιομετρική διάταξη του σχήματος ισορροπεί, δηλαδή από το γαλβανόμετρο Γ δε διέρχεται ρεύμα. Γνωρίζουμε ότι η πηγή E_1 έχει ΗΕΔ 2Volt και μηδενική εσωτερική αντίσταση, το ποντεσιόμετρο έχει μήκος 100cm και αντίσταση 4Ω, και η πηγή E_2 έχει ΗΕΔ 1,5 Volt.



Η απόσταση XZ_1 είναι:
Α 100cm Β 75cm Γ 25cm Δ 50cm Ε 60cm.

(Απ. Β)

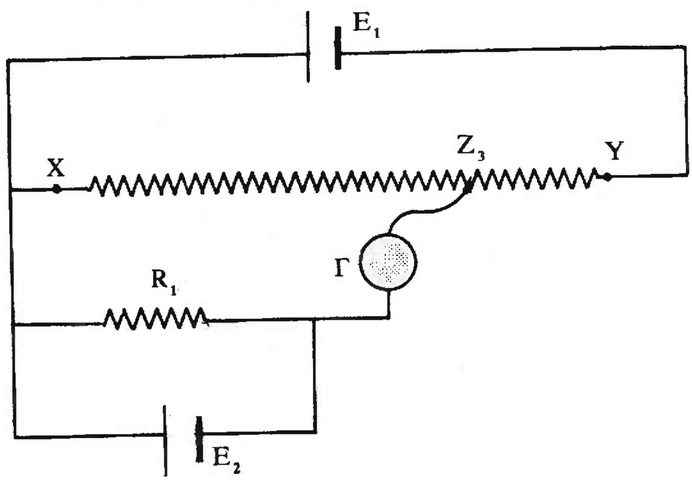
20 Αν αντίσταση 1Ω συνδεθεί σε σειρά με το στοιχείο E_1 της προηγούμενης άσκησης, πόση πρέπει να είναι η απόσταση XZ_2, για την οποία το γαλβανόμετρο δε διαρρέεται από ρεύμα:



Α XZ_2=93,75cm
Β XZ_2=75,5cm
Γ XZ_2=63,3cm
Δ XZ_2=56cm
Ε XZ_2=31,5cm

(Απ. Α)

21 Για την ποτενσιομετρική διάταξη του σχήματος δίνεται ότι:



α) Το στοιχείο E_1 έχει ΗΕΔ 2Volt και μηδενική εσωτερική αντίσταση.
β) Το ποντεσιόμετρο έχει μήκος 100cm.
γ) Η αντίσταση $R_1=1\Omega$
δ) Το στοιχείο E_2 έχει ΗΕΔ 1,5Volt και εσωτερική αντίσταση $r=1\Omega$.
ε) Το γαλβανόμετρο δε διαρρέεται από ρεύμα.

Ποια από τις τιμές της απόστασης του δρομέα από το άκρο Χ είναι η σωστή;

Α $XZ_3=50cm$, Β $XZ_3=37,5cm$, Γ $XZ_3=25,5cm$ Δ $XZ_3=20,5cm$ Ε $XZ_3=12cm$.

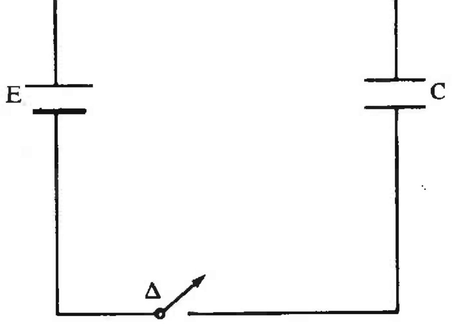
(**Απ.** Β)

22. Προκειμένου να μετρήσουμε:
Α την ΗΕΔ πηγής που έχει μεγάλη εσωτερική αντίσταση,
Β την ΗΕΔ πηγής που έχει μικρή εσωτερική αντίσταση,
Γ διαφορά δυναμικού της τάξης των εκατοντάδων Volt
Δ διαφορά δυναμικού της τάξης των μιλιβόλτ (mV), είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε:
Ι βολτόμετρο μεγάλης εσωτερικής αντίστασης
ΙΙ ποτενσιομετρική διάταξη.

Για κάθε μία από τις περιπτώσεις Α, Β, Γ, Δ, να προτείνετε μέθοδο μέτρησης

23. Δίνεται κύκλωμα που περιλαμβάνει σε σειρά πυκνωτή χωρητικότητας $C=100\mu F$, ωμική αντίσταση $R=20K\Omega$ διακόπτη Δ και πηγή $E=1$ Volt. Στην αρχή ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Αμέσως μόλις κλείσουμε το διακόπτη τι τιμή έχει:
α) Η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή;
β) Το φορτίο του πυκνωτή;
γ) Η τάση στα άκρα της αντίστασης;
δ) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση;
ε) Ορυθμός με τον οποίο αυξάνεται το φορτίο στον πυκνωτή;

(**Απ.** α) 0 Volt, β) 0Cb, γ) 1 Volt, δ) $5\cdot10^{-5}$A, ε) $5\cdot10^{-5}$Cb/sec)



24. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C πρόκειται να φορτιστεί από μια μπαταρία μέσω αντίστασης R όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έστω ότι I_o είναι η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα αμέσως όταν κλείσει ο διακόπτης Δ, V_o η μέγιστη τάση στα άκρα του πυκνωτή και Q_o το μέγιστο φορτίο του, όταν αυτός φορτιστεί πλήρως.

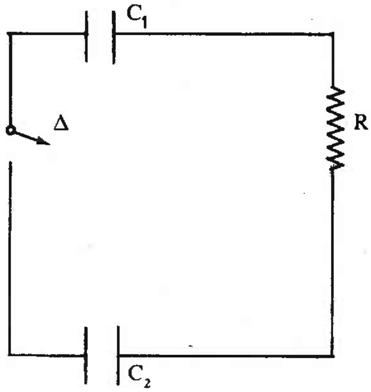
Ι. Τι από τα παρακάτω θα συμβεί, αν η αντίσταση R αντικατασταθεί από άλλη μεγαλύτερη;

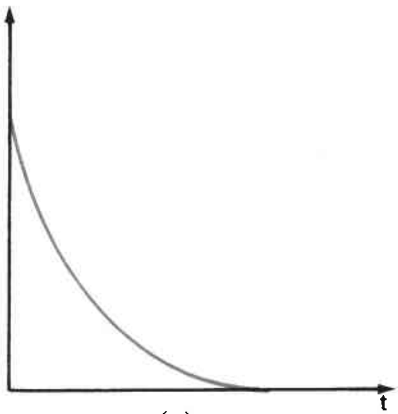
Α Η τιμή I_0 του ρεύματος θα μικρύνει.
Β Η μέγιστη τιμή της τάσης V_0 στον πυκνωτή θα μικρύνει.
Γ Ο πυκνωτής θα φορτιστεί πλήρως σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από όσο αρχικά χρειάστηκε.
Δ Το μέγιστο φορτίο Q_0 θα γίνει μικρότερο.

ΙΙ. Τι από τα παρακάτω θα συμβεί, αν στο αρχικό κύκλωμα ο πυκνωτής C αντικατασταθεί από άλλο, μικρότερης χωρητικότητας;
Α Το ρεύμα I_0 θα μειωθεί.
Β Η τάση V_0 θα αυξηθεί.
Γ Θα χρειαστεί λιγότερος χρόνος για την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή.
Δ Το φορτίο Q_0 θα γίνει μικρότερο.

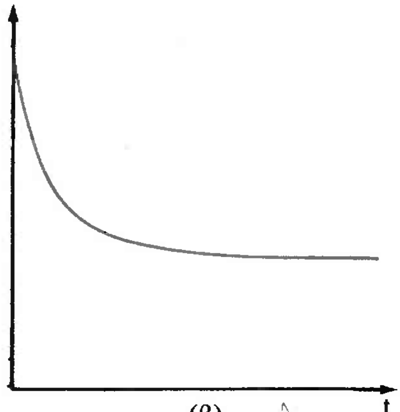
25. Στο κύκλωμα του σχήματος ο πυκνωτής C_1 είναι φορτισμένος με φορτίο Q_0 και ο C_2 είναι αφόρτιστος. Τη στιγμή t=0 κλείνει ο διακόπτης Δ και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα.

Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει:
Α τη μεταβολή του φορτίου του C_1 με το χρόνο.
Β τη μεταβολή του φορτίου του C_2 με το χρόνο
Γ τη μεταβολή του ρεύματος Ι στο κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

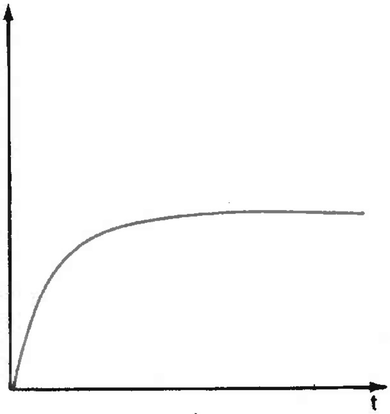




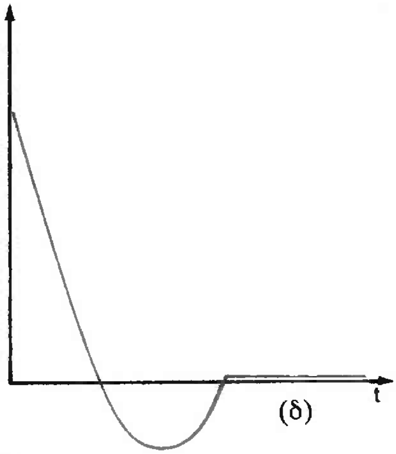
(α)



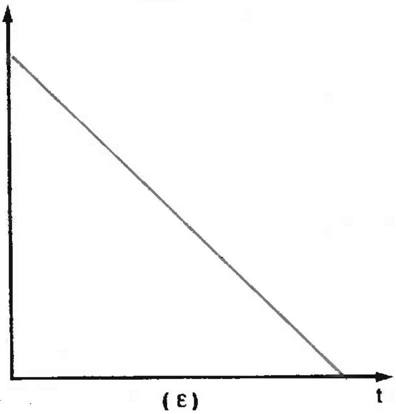
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

26. Σε πόσες σταθερές χρόνου η τάση του πυκνωτή σε κύκλωμα RC σε σειρά κατά τη φόρτιση αποκτάει το 50% της μέγιστης τιμής της;

(Απ. 0,693τ**)**

27. Αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας C φορτίζεται μέσω αντίστασης R. Μετά πόσες σταθερές χρόνου η ενέργειά του θα φτάσει στο μισό εκείνης που έχει όταν φορτιστεί πλήρως;

(Απ. 1,23τ**)**

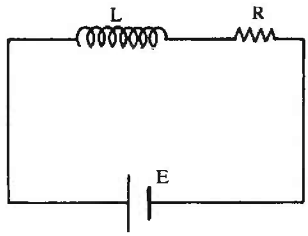
28. Ένα σωληνοειδές, που έχει αυτεπαγωγή 0,5H και ωμική αντίσταση 30Ω, συνδέεται με μια πηγή. Σε πόσο χρόνο η ένταση του ρεύματος θα γίνει το μισό της τελικής της τιμής;

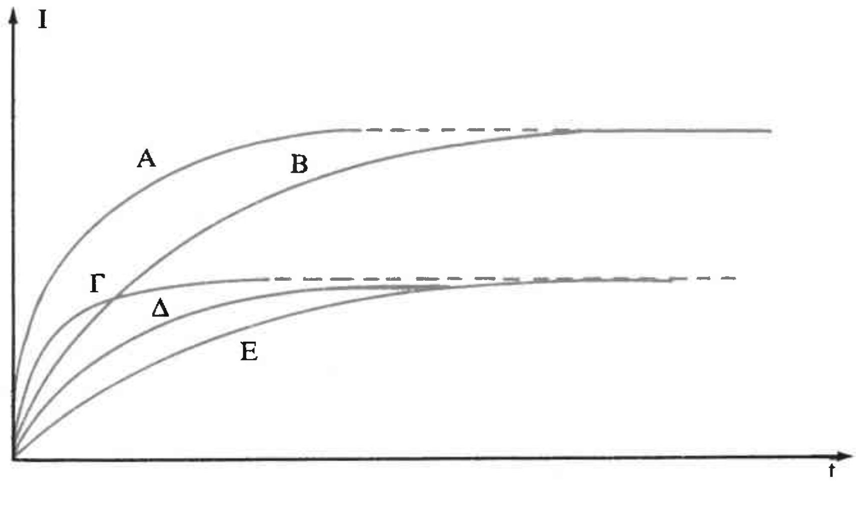
(**Απ.** 11,5msec)

29. Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή συνεχούς ρεύματος ηλεκτρεγερτικής δύναμης E=3 Volt, πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L=3H και ωμική αντίσταση R=10Ω σε σειρά. Μετά την παρέλευση χρόνου ίσου με τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος, ζητούνται: α) η ισχύς την οποία αποδίδει η πηγή, β) η ισχής η οποία καταναλώνεται την αντίσταση, γ) ο ρυθμός με τον οποίον ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο.

(**Απ.** α) 0,57 Watt β) 0,36 Watt γ) 0,21 Joule/sec)

30. Το κύκλωμα στο σχήμα 1 αποτελείται από πηγή E, ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L και ωμική αντίσταση R. Η μεταβολή της έντασης του ρεύματος με το χρόνο αποδίδεται γραφικά με την καμπύλη Δ στο σχήμα 2.

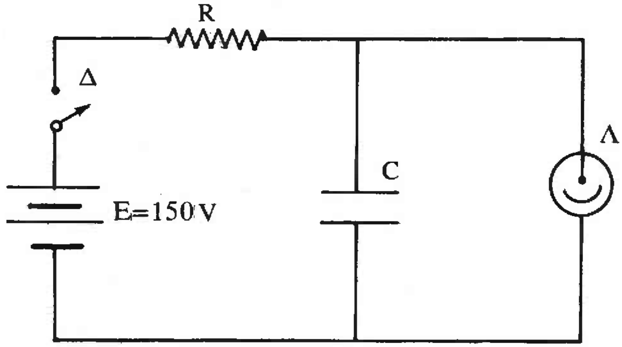




I. Αν το πηνίο αντικατασταθεί με άλλο μικρότερης αυτεπαγωγής χωρίς να μεταβληθεί η αντίσταση, ποια από τις καμπύλες του σχήματος θα αποδίδει καλύτερα τη μεταβολή της έντασης του ρεύματος με το χρόνο;

II. Αν, αντίθετα, στο αρχικό κύκλωμα η αντίσταση R αντικατασταθεί με άλλη μικρότερη, ποια καμπύλη αποδίδει καλύτερα τη μεταβολή της έντασης με το χρόνο;

31. Σε ένα κύκλωμα RC παράλληλα προς τον πυκνωτή συνδέεται λυχνία που περιέχει αέριο Νέον (Ne) σε χαμηλή πίεση. Όταν η τάση στα άκρα της υπερβεί μια συγκεκριμένη τιμή V_α που καθορίζει ο κατασκευαστής, η λυχνία φωτοβολεί έντονα, διαρρέεται από ρεύμα μεγάλης έντασης και η τάση στα άκρα της ελαττώνεται ακαριαία. Όταν η τάση στα άκρα της πέσει κάτω από μια τιμή V_σ, τότε η λυχνία παύει να φωτοβολεί και το ρεύμα που τη διαρρέει μηδενίζεται. Αν για τη λυχνία του κυκλώματος ο κατασκευαστής δίνει ότι: $V_\alpha = 110$ Volt, $V_\sigma = 50$V και ότι η αντίστασή της, όταν φωτοβολεί είναι μηδέν:



1) Να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί η λυχνία θα φωτοβολεί περιοδικά 2) Από τι εξαρτάται ο ρυθμός των αναλαμπών; 3) Πώς θα μεταβληθεί ο ρυθμός αυτός αν αυξηθεί η χωρητικότητα;

(**Απ.** 2) Από την τιμή της αντίστασης και τη χωρητικότητα του πυκνωτή. 3) θα μειωθεί)

6
Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

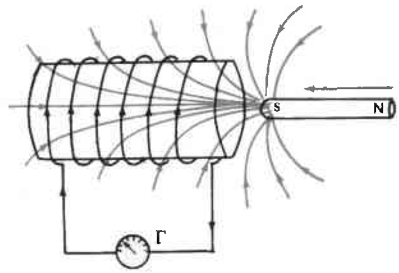
6.1. Τα πειράματα του Faraday και ο νόμος της επαγωγής

Το πείραμα του Oersted, με το οποίο ανακαλύφθηκε στα 1820 ότι αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο, οδήγησε τους επιστήμονες της εποχής εκείνης να μελετήσουν το αντίστροφο πρόβλημα, το οποίο διατυπωνόταν έτσι: Είναι άραγε δυνατό από το μαγνητικό πεδίο να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό ρεύμα;

Ο Faraday ήταν ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά αυτό το πρόβλημα. Στα 1831 ύστερα από μία σειρά επιτυχών πειραμάτων, ανακάλυψε το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, ή νόμο της επαγωγής, όπως λέμε για συντομία, στον οποίο βασίζεται η λειτουργία της ηλεκτρικής γεννήτριας. Η ηλεκτρική ενέργεια που σήμερα παράγεται σχεδόν αποκλειστικά από τις ηλεκτρικές γεννήτριες, επηρέασε και επηρεάζει βαθειά την εξέλιξη της τεχνολογίας και την ευημερία των λαών γενικότερα.

Μερικά από τα πειράματα που οδήγησαν το Faraday στην ανακάλυψη του νόμου της επαγωγής φαίνονται στα σχήματα 6.1, 6.2, 6.3.

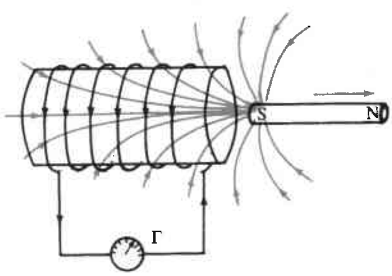
Κατά την κίνηση του ραβδόμορφου μαγνήτη προς το πηνίο παράγεται ηλεκτρικό ρεύμα, όπως δείχνει το γαλβανόμετρο Γ του σχ. 6.1. Η φορά του επαγόμενου ρεύματος δημιουργεί στο πηνίο νότιο πόλο απέναντι από το νότιο πόλο του μαγνήτη.



Σχ. 6.1.

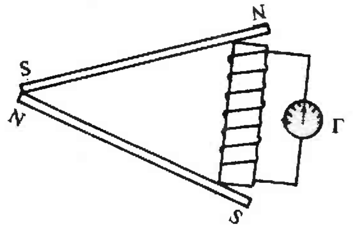
Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το πηνίο, επάγεται σ' αυτό ρεύμα, που έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα 6.2. Στο άκρο του πηνίου απέναντι από το μαγνήτη δημιουργείται βόρειος πόλος.

Όταν ο μαγνήτης έμενε ακίνητος μέσα ή έξω από το πηνίο, το γαλβανόμετρο δεν έδειχνε ρεύμα. Αυτή η παρατήρηση οδήγησε το Faraday στη σκέψη, ότι το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στη μεταβολή της μαγνητικής ροής.



Σχ. 6.2.

Στη διάταξη του σχ. 6.3 η ράβδος, πάνω στην οποία είναι τυλιγμένος ο αγωγός που συνδέεται με το γαλβανόμετρο, είναι από μαλακό σίδηρο, για να μη μαγνητίζεται μόνιμα. Στο γαλβανόμετρο δημιουργείται στιγμιαίο ρεύμα, όταν μετακινούνται οι μόνιμοι μαγνήτες. Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής όπως διατυπώθηκε από το Faraday έχει ως εξής: **«Οποτεδήποτε συμβαίνει μεταβολή στη μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από ένα κύκλωμα, τότε στο κύκλωμα επάγεται μια ηλεκτρεγερτική δύναμη Ε της οποίας το μέτρο είναι ανάλογο με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, που διέρχεται από αυτό το κύκλωμα»**



Σχ. 6.3.

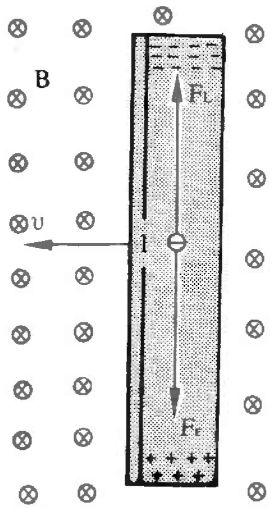
Δηλαδή ισχύει: $E=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Το μείον ερμηνεύεται, όπως θα δούμε σε άλλη παράγραφο, με τον κανόνα του Lenz.

1986

6.2. Το φαινόμενο της επαγωγής σε κινούμενο ευθύγραμμο αγωγό

Θεωρούμε μια μεταλλική ράβδο μήκους l που κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με ταχύτητα $\vec{υ}$ που είναι κάθετη στον άξονά της και κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου όπως φαίνεται στο σχήμα 6.4. Ο αγωγός θεωρείται ότι βρίσκεται στο επίπεδο του σχήματος και η μαγνητική επαγωγή είναι κάθετη με φορά από τον αναγνώστη προς το σχήμα. Είναι φανερό ότι στη μεταφορική κίνηση της ράβδου συμμετέχουν και τα ηλεκτρικά της φορτία, δηλαδή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος.



Σχ. 6.4. κίνηση ευθύγραμμου αγωγού σε μαγνητικό πεδίο

Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.8, όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο q κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, ασκείται πάνω του δύναμη Laplace

$$F_L=qυB \qquad (6.1)$$

ή

$$F_L=qυBημφ, \qquad (6.2)$$

όταν η ταχύτητα $\vec{υ}$ του φορτίου σχηματίζει με τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ γωνία φ.

Στην περίπτωση που μελετάμε, σχήμα 6.4, οι δυνάμεις Laplace ωθούν τα ελεύθερα ηλεκτρόνια* της ράβδου προς το πάνω άκρο της και το φορτίζουν αρνητικά, ενώ το κάτω άκρο της φορτίζεται θετικά.

Με τη διαδικασία αυτή στο εσωτερικό της ράβδου δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**. Αυτό το πεδίο ασκεί σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο δύναμη $\vec{F_ε}$, της οποίας το μέτρο είναι:

$$F_ε = \mathcal{E} e \tag{6.3}$$

Η φορά και η διεύθυνση της $\vec{F_ε}$ έχουν σχεδιασθεί στο σχ. 6.4.

Είναι γνωστό ότι η δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου συνεπάγεται την εμφάνιση διαφοράς δυναμικού. Επειδή στην περίπτωση που μελετάμε το πεδίο είναι ομογενές, ο τύπος (6.3) γράφεται:

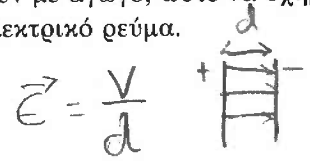
$$F_ε = \frac{E_{επ.}}{l} e, \tag{6.4}$$

όπου $E_{επ}$ είναι η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού.

Καθώς όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια συσσωρεύονται στο πάνω άκρο της ράβδου, η ένταση $\vec{\mathcal{E}}$ του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνεται συνέχεια προκαλώντας έτσι αύξηση στη δύναμη $\vec{F_ε}$. Όπως φαίνεται από το σχήμα 6.4 η δύναμη $\vec{F_ε}$ αντιτίθεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων προς το πάνω μέρος της ράβδου. Έτσι σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα οι δυνάμεις $\vec{F_L}$ και $\vec{F_ε}$ αποκτούν ίσα μέτρα, οπότε σταματάει η κίνηση των ηλεκτρονίων και η διαφορά δυναμικού $E_{επ.}$, μεταξύ των άκρων της ράβδου, ή η ΗΕΔ από επαγωγή, όπως την ονομάσαμε, αποκτάει σταθερή τιμή. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (6.4) με τη βοήθεια της σχέσης (6.1) γράφεται:

$$\boxed{E_{επ.} = υBl} \tag{6.5}$$

Η φορτισμένη ράβδος συμπεριφέρεται τώρα σαν ηλεκτρική πηγή και αν τα άκρα της συνδεθούν με αγωγό, ώστε να σχηματιστεί κλειστό κύκλωμα, αυτό θα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.



* Δύναμη Laplace ασκείται επίσης και στα ιόντα της ράβδου, αλλά αυτά δεν είναι δυνατό να κινηθούν.

** Συμβαίνει κάτι ανάλογο με το φορτισμένο πυκνωτή, που στον ένα οπλισμό του έχει συγκεντρωθεί το θετικό φορτίο, στον άλλο το αρνητικό και ο μεταξύ των οπλισμών χώρος είναι ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

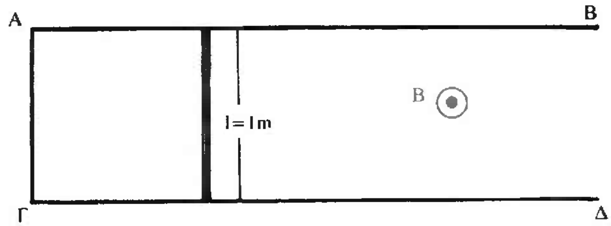
Όταν ο αγωγός κινείται έτσι ώστε να παραμένει κάθετος στο επίπεδο των $\vec{\upsilon}$ και $\vec{B}$, ενώ η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$ σχηματίζει γωνία φ με τη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$, τότε ο τύπος (6.5) γράφεται:

$$E_{επ.} = \upsilon B l ημφ \quad (6.6)$$

Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η ΗΕΔ από επαγωγή προέρχεται από μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική, σε αντίθεση με την ΗΕΔ ενός στοιχείου που προέρχεται από την μετατροπή της αποθηκευμένης χημικής ενέργειας.

Παράδειγμα

Ένας αγωγός έχει μήκος l=1m και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=2,5m/sec πάνω στους μεταλλικούς αγωγούς ΑΒ και ΓΔ υπό την επίδραση σταθερής δύναμης.



Το επίπεδο των αγωγών ΑΒ, ΓΔ είναι κάθετο σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής B=0,2 Tesla.

Αν η αντίσταση του αγωγού είναι R=2Ω και των αγωγών ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ είναι αμελητέα, να υπολογιστούν:

α) Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή που αναπτύσσεται στον κινούμενο αγωγό.

β) Η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει.

γ) Η μηχανική ενέργεια που θα μετατραπεί σε ηλεκτρική σε χρόνο 2 sec. Οι τριβές να θεωρηθούν αμελητέες.

Λύση

α) Η ζητούμενη Η.Ε.Δ. του αγωγού είναι:

$E_{επ.} = \upsilon B l = (2{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 1)$ Volt $= 0{,}5$Volt

β) Η ένταση του ρεύματος υπολογίζεται από το νόμο του Ohm και είναι

$$I = \frac{E_{επ.}}{R} = \frac{0{,}5}{2} A = 0{,}25A$$

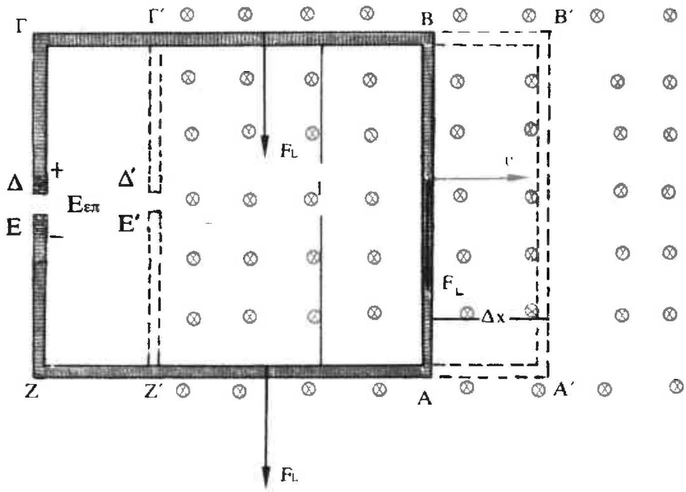
γ) Η ηλεκτρική ενέργεια είναι ίση με $E_{\varepsilon\pi}It$ και γίνεται θερμότητα πάνω στην αντίσταση. Επειδή δεν υπάρχουν τριβές, όλη η μηχανική ενέργεια της ράβδου μετατρέπεται τελικά σε ηλεκτρική ενέργεια. Δηλαδή είναι:

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\eta\lambda.} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \text{ Joule} = 0{,}25 \text{ Joule}$$

1993

6.3. Το φαινόμενο της επαγωγής σε κινούμενο πλαίσιο

Ας θεωρήσουμε έναν αγωγό σε σχήμα πλαισίου, σχ. 6.5, ο οποίος εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, με το επίπεδό του κάθετο στη μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ΗΕΔ από επαγωγή.



Σχ. 6.5

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το πλαίσιο έχει φθάσει στη θέση που δείχνει το σχήμα 6.5. Πάνω στον αγωγό ΑΒ αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή, το μέτρο της οποίας σύμφωνα με τον τύπο (6.5) είναι:

$$E_{AB} = \upsilon B l \tag{6.7}$$

Στους αγωγούς ΒΓ και ΑΖ δεν αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή, γιατί οι δυνάμεις Laplace ωθούν τα ηλεκτρόνια προς τις πλευρικές επιφάνειες των αγωγών. Συνεπώς $E_{B\Gamma} = E_{ZA} = 0$. Κατά μήκος των ΓΔ και ΕΖ δε δημιουργείται ΗΕΔ, επειδή τα τμήματα αυτά βρίσκονται έξω από το πεδίο.

Αν αθροίσουμε τις ΗΕΔ σε όλα τα τμήματα του πλαισίου, παίρνουμε:

$$E_{\varepsilon\pi.} = E_{AB} + E_{B\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{EZ} + E_{ZA}$$

$$\text{ή} \quad E_{\varepsilon\pi.} = \upsilon Bl + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$\text{ή} \quad E_{\varepsilon\pi.} = \upsilon Bl \qquad (6.8)$$

Έστω ότι σε χρόνο Δt το πλαίσιο μετακινείται προς τα δεξιά (διακεκομμένες γραμμές σχ. 6.5) κατά

$$\Delta x = \upsilon \Delta t \qquad (6.9)$$

Αν συνδυάσουμε τις (6.8) και (6.9), η τάση $E_{\varepsilon\pi}$ γράφεται:

$$E_{\varepsilon\pi.} = \frac{\Delta x}{\Delta t} Bl \qquad (6.10)$$

Το γινόμενο lΔx παριστάνει την αύξηση της επιφάνειας ΔS του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο, και έτσι η ΗΕΔ από επαγωγή δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\varepsilon\pi.} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} \qquad (6.11)$$

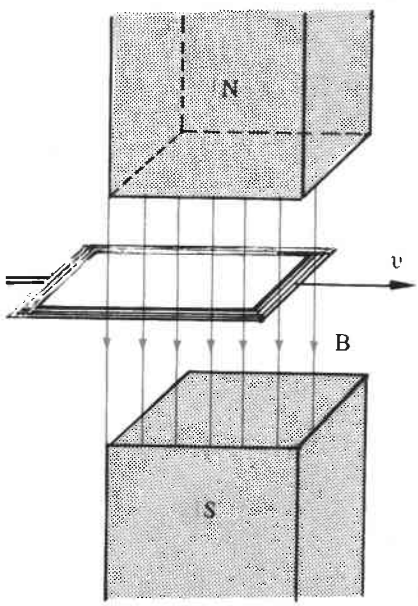
Το γινόμενο BΔS παριστάνει την αύξηση της μαγνητικής ροής ΔΦ που διέρχεται από το πλαίσιο σε χρόνο Δt. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$E_{\varepsilon\pi.} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (6.12)$$

Όταν το πλαίσιο μπει ολόκληρο στο μαγνητικό πεδίο, η μαγνητική ροή που διέρχεται από αυτό είναι σταθερή και η Η.Ε.Δ. από επαγωγή γίνεται μηδέν.

Στην περίπτωση που το πλαίσιο αποτελείται από n σπείρες, σχήμα 6.6, η σχέση (6.12) γράφεται:

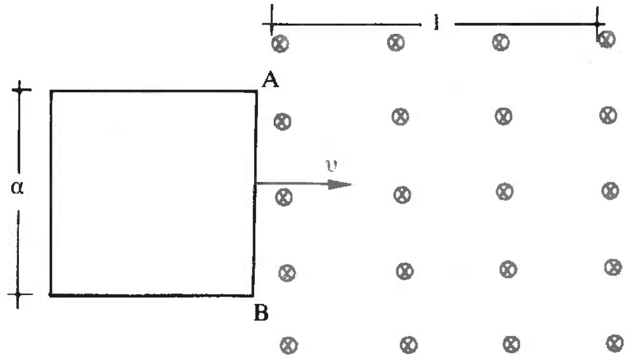
$$E_{\varepsilon\pi.} = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (6.13)$$



Σχ. 6.6.

Παράδειγμα

Ένα τετράγωνο πλαίσιο πλευράς $\alpha=10^{-1}m$ διέρχεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=1m/sec$ από ομογενές μαγνητικό πεδίο $B=0,1Tesla$ που είναι κάθετο στο επίπεδο και την ταχύτητα του πλαισίου.



Αν το πλάτος του πεδίου είναι $l=20cm$ και η αντίσταση του πλαισίου $R=0,1\Omega$, να παρασταθούν γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο:

α) Η μαγνητική ροή που περνάει από το πλαίσιο.

β) Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή στο πλαίσιο.

γ) Η δύναμη Laplace που δέχεται το πλαίσιο.

Λύση

α) Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το πλαίσιο αρχίζει να εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο. Σε μικρό χρονικό διάστημα t η πλευρά ΑΒ του πλαισίου θα προχωρήσει κατά $x=\upsilon t$. Το τμήμα της επιφάνειας του πλαισίου που θα βρίσκεται μέσα στο πεδίο έχει εμβαδό $S=\alpha\upsilon t$ και η μαγνητική ροή που θα διέρχεται από αυτό είναι $\Phi=B\alpha\upsilon t$.

Η ροή θα αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο, αφού τα Β, α, υ είναι σταθερά, μέχρις ότου το πλαίσιο εισέλθει ολόκληρο στο μαγνητικό πεδίο. Σε χρονικό διάστημα ίσο με $t=\frac{\alpha}{\upsilon}=\frac{0,1m}{1m/sec}=0,1sec$, το πλαίσιο θα έχει εισέλθει ολόκληρο στο πεδίο και η ροή θα έχει μέγιστη τιμή ίση με $\Phi_{max}=B\alpha^2=0,1\ Tesla\ (0.1m)^2=10^{-3}Wb$.

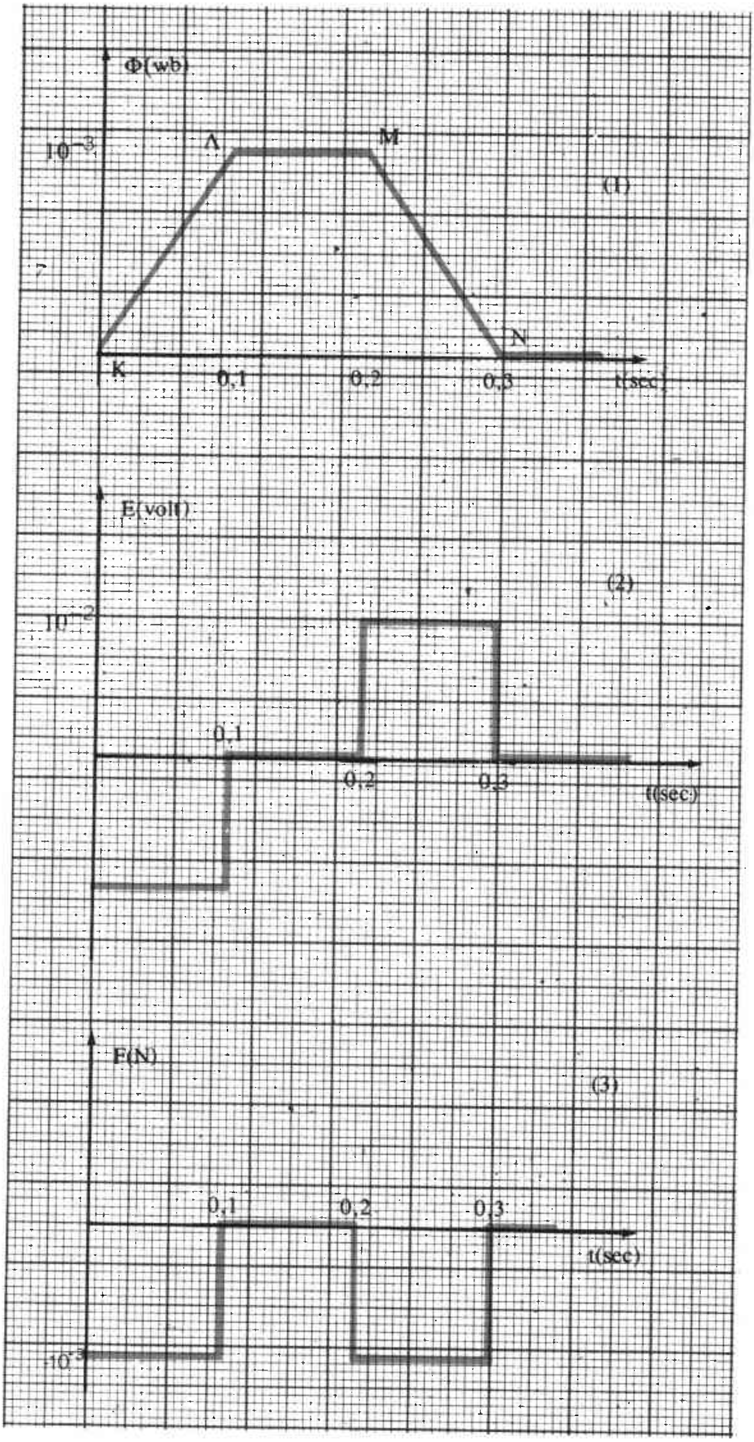
Η μεταβολή της μαγνητικής ροής με το χρόνο από μηδέν sec έως 0,1sec αποδίδεται γραφικά με το τμήμα ΚΛ στο διάγραμμα (1).

Το πλαίσιο θα βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο πεδίο για χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που απαιτείται, για να φθάσει η πλευρά ΑΒ στο τέλος του πεδίου. Επειδή το πεδίο έχει πλάτος 20cm και το πλαίσιο 10cm, το χρονικό αυτό διάστημα είναι ίσο με $\frac{20cm-10cm}{1m/sec}=0,1sec$.

Συνεπώς τη στιγμή $t=0,2sec$ το πλαίσιο θα αρχίσει να εξέρχεται από το πεδίο. Κατά το χρονικό διάστημα 0,1sec έως 0,2 sec η μαγνητική ροή θα είναι σταθερή, ίση με $\Phi_{max}=10^{-3}Wb$ και θα αντιστοιχεί στο τμήμα ΛΜ του διαγράμματος (1).

Σε μικρό χρονικό διάστημα t μετά τη στιγμή 0,2sec το τμήμα της επιφάνειας του πλαίσιου που θα βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με $\alpha^2-\upsilon\alpha t$. Η μαγνητική ροή που θα διέρχεται απ' αυτό είναι $\Phi=B(\alpha^2-\upsilon\alpha t)=\Phi_{max}-B\upsilon\alpha t$.

Η έξοδος του πλαισίου διαρκεί χρόνο ίσο, με $\frac{\alpha}{\upsilon}=0,1$ sec. Έτσι τη χρονική στιγμή $t=0,3sec$ το πλαίσιο θα βρίσκεται όλο εκτός πεδίου και η μαγνητική ροή που διέρχεται


Φ(wb)
10⁻³
Λ
M
(1)
N
K
0,1
0,2
0,3
t(sec)
E(volt)
(2)
10⁻²
0,1
0,2
0,3
t(sec)
F(N)
(3)
0,1
0,2
0,3
t(sec)
-10⁻³

απ' αυτό είναι μηδέν. Κατά το χρονικό διάστημα 0,2sec έως 0,3sec η ροή μειώνεται γραμμικά με το χρόνο, όπως δείχνει το τμήμα ΜΝ στο διάγραμμα (1).

β) Στο χρονικό διάστημα από $t_1=0$ sec έως $t_2=0{,}1$sec η μαγνητική ροή αυξάνεται από

Φ_1 = 0Wb έως $\Phi_2 = BS = B\alpha\upsilon(t_2 - t_1) = 10^{-3}$Wb. Στο χρονικό αυτό διάστημα η ΗΕΔ είναι σταθερή και έχει τιμή:

$$E_{\varepsilon\pi.} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} = -\frac{10^{-3}}{0{,}1}\text{Volt} = -10^{-2}\text{Volt}$$

Από $t_2=0{,}1$sec έως $t_3=0{,}2$sec η μαγνητική ροή είναι σταθερή και έτσι $E_{\varepsilon\pi.}=0$.

Στο χρονικό διάστημα από $t_3=0{,}2$sec έως $t_4=0{,}3$sec η μαγνητική ροή ελαττώνεται από $\Phi_3=10^{-3}$Wb έως $\Phi_4=0$Wb. Σ' αυτή τη χρονική διάρκεια η ΗΕΔείναι πάλι σταθερή και έχει τιμή.

$$E_{\varepsilon\pi.} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_4 - \Phi_3}{t_4 - t_3} = -\frac{0 - 10^{-3}}{0{,}1}\text{Volt} = 10^{-2}\text{Volt}$$

Οι παραπάνω μεταβολές της τάσης αποδίδονται γραφικά στο διάγραμμα (2).

γ) Η δύναμη Laplace αντιτίθεται στην είσοδο του πλαισίου στο πεδίο σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz. Στο χρονικό διάστημα 0,1sec έως 0,2sec που το πλαίσιο δε διαρρέεται από ρεύμα (η ΗΕΔ στο πλαίσιο είναι μηδέν) η δύναμη Laplace έχει μέτρο μηδέν.

Κατά την έξοδο του πλαισίου από το πεδίο η δύναμη Laplace επίσης αντιτίθεται στην κίνηση του πλαισίου.

Το μέτρο της δύναμης είναι:

$$F_L = BI\alpha = B\frac{E_{\varepsilon\pi.}}{R}\alpha = 0{,}1\text{T}\frac{10^{-2}}{0{,}1}\frac{\text{Volt}}{\Omega}\,0{,}1\text{m} \Rightarrow F_L = 10^{-3}\text{N}$$

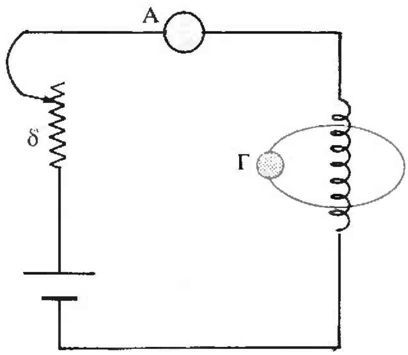
Η μεταβολή της δύναμης Laplace με το χρόνο αποδίδεται γραφικά στο διάγραμμα 3.

6.4. Το φαινόμενο της επαγωγής σε ακίνητο πλαίσιο και το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Το φαινόμενο της επαγωγής μπορεί να παρατηρηθεί και στην περίπτωση που ένα πλαίσιο είναι ακίνητο, αρκεί να μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από αυτό. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του κλειστού κυκλικού αγωγού που περιβάλλει το πηνίο του σχήματος 6.7.

Το πείραμα αποδεικνύει ότι, όταν ο δρομέας δ είναι ακίνητος, το γαλβανόμετρο Γ δείχνει ότι από τον κυκλικό αγωγό δε διέρχεται ρεύμα.

Όταν μετακινούμε το δρομέα, παρατηρούμε ότι, όσο διαρκεί η μετακίνησή του, από το γαλβανόμετρο Γ διέρχεται ρεύμα, η ένταση του οποίου είναι ανά-



Σχ. 6.7.

λογη της ταχύτητας μεταβολής $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ του ρεύματος στο πηνίο.

Οι μεταβολές της έντασης του ρεύματος στο πηνίο προκαλούν ανάλογες μεταβολές της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο και συνεπώς της μαγνητικής ροής που διέρχεται από τον κυκλικό αγωγό. Επομένως η τάση που επάγεται στον κυκλικό αγωγό και δημιουργεί το ρεύμα που τον διαρρέει, είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ της μαγνητικής ροής. Έτσι σε συμφωνία με τον κανόνα του Lenz μπορούμε να γράψουμε για την τάση $E_{επ.}$ που αναπτύσσεται στον κυκλικό αγωγό

$$E_{επ.} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (6.14)$$

Από τη σχέση (6.14) συμπεραίνουμε γενικότερα ότι: **Η τάση από επαγωγή που αναπτύσσεται σ' ένα ακίνητο πλαίσιο όταν διέρχεται μέσα απ' αυτό μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή παρέχεται από τον ίδιο τύπο, ο οποίος ισχύει και στην περίπτωση που το πλαίσιο κινείται στο μαγνητικό πεδίο.** Ωστόσο γεννιέται ερώτημα για την προέλευση της δύναμης που κινεί τα ηλεκτρόνια στον κυκλικό αγωγό του σχήματος 6.7. Όπως είδαμε, όταν ένα πλαίσιο κινείται σε μαγνητικό πεδίο σταθερής μαγνητικής επαγωγής, τα ηλεκτρόνια κινούνται λόγω της δύναμης Laplace ($F_L = q\upsilon B$). Στην προκειμένη περίπτωση που το πλαίσιο είναι ακίνητο δεν υπάρχει τέτοια δύναμη. Επομένως είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι τα ηλεκτρόνια στον κυκλικό αγωγό κινούνται υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου άγνωστης προέλευσης. **Το ηλεκτρικό αυτό πεδίο πρέπει να προέρχεται από τις μεταβολές της μαγνητικής ροής που οφείλονται στο χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Δεχόμαστε λοιπόν ότι κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται από ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να είναι επίσης χρονικά μεταβαλλόμενο και το οποίο ακολουθεί το ρυθμό μεταβολής του μαγνητικού πεδίου.** Οι δυναμικές γραμμές του παραγόμενου ηλεκτρικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι με το επίπεδό τους κάθετο στη μαγνητική επαγωγή και επεκτείνονται πολύ πέρα από το χώρο μεταβολής της μαγνητικής ροής, σχ. 6.9.

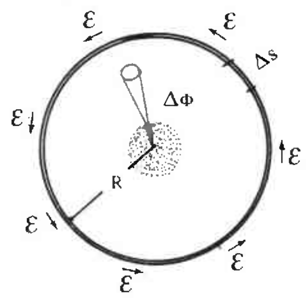
Αν θεωρήσουμε ότι σε μια χρονική στιγμή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι I, τότε από κάθε τομή του αγωγού θα διέρχεται το ίδιο φορτίο q. Το φορτίο αυτό θα δέχεται σε όλα τα σημεία του αγωγού δύναμη $F = \mathcal{E}q$. Αν το πηνίο βρίσκεται στο κέντρο του κυκλικού αγωγού, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, λόγω συμμετρίας, θα έχει το ίδιο μέτρο σε όλα

τα σημεία του κατά τη χρονική στιγμή t. 1984/1998

Ας θεωρήσουμε ότι ο κυκλικός αγωγός διαιρείται σε μικρά τμήματα Δs, σχ.6.8. Τότε το έργο που θα παράγει η δύναμη $\vec{F}$ κινώντας το φορτίο στο διάστημα Δs είναι $\Delta W = \mathcal{E} q \cdot \Delta s$. Αθροίζοντας τα έργα ΔW κατά μήκος του κυκλικού αγωγού υπολογίζεται το ολικό έργο, που είναι:

$$W_{ολ} = \Sigma \Delta W = \Sigma \mathcal{E} q \Delta s = q \mathcal{E} \Sigma \Delta s$$

$$\text{ή} \quad W_{ολ} = q \mathcal{E} 2\pi R \qquad (6.15)$$



Σχ. 6.8.

όπου R η ακτίνα του κυκλικού αγωγού.

Το πηλίκο $\frac{W_{ολ}}{q}$ έχει διαστάσεις τάσης και αντιστοιχεί στην ΗΕΔ από επαγωγή $E_{επ.}$, που αναπτύχθηκε στον κυκλικό αγωγό.

Έτσι η σχέση (6.15) γράφεται:

$$\mathcal{E} = \frac{E_{επ.}}{2\pi R} \qquad (6.16)$$

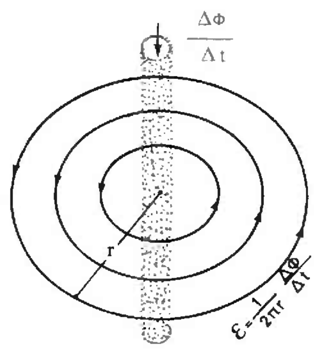
Αν σ' αυτή τη σχέση αντικαταστήσουμε την τάση από επαγωγή $E_{επ.}$ με την τιμή της από τη σχέση (6.14), η ένταση $\mathcal{E}$ κατά τη χρονική στιγμή t θα είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \qquad (6.17)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει και για κάθε άλλη χρονική στιγμή και παρέχει το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου γιά κάθε απόσταση R από το πηνίο που δημιουργεί τη μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή.

1998 Το ηλεκτρικό πεδίο που προέρχεται από τις μεταβολές της μαγνητικής ροής παρουσιάζει τρεις σημαντικές διαφορές από το ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργείται από ακίνητα ηλεκτρικά φορτία.

- Οι δυναμικές του γραμμές είναι κλειστές, ενώ στο ηλεκτροστατικό πεδίο οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία.
- Είναι πεδίο μη συντηρητικό. Δηλαδή η ενέργεια που μεταφέρεται από το πεδίο σε ένα ηλεκτρικό φορτίο που κινείται σε κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδέν.



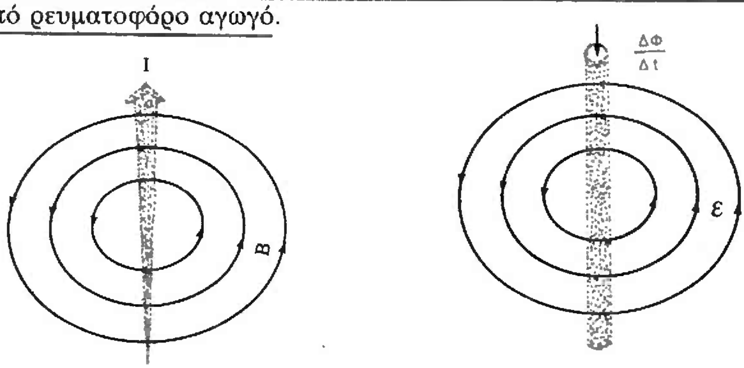
Σχ. 6.9. Το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές περιβάλλουν κυκλικά τη μαγνητική επαγωγή.

▸ Γενικά είναι πεδίο χρονικά μεταβαλλόμενο.

Στην περίπτωση που ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι σταθερός, τότε, όπως προκύπτει από την εξίσωση (6.17), το πεδίο είναι χρονικά αμετάβλητο.

Η ύπαρξη του ηλεκτρικού πεδίου δεν εξαρτάται από την παρουσία του κυκλικού αγωγού, γιατί το πεδίο δημιουργείται, όταν υπάρχει μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή. Ο ρόλος του αγωγού περιορίζεται μόνο στο να παρέχει τα φορτία, η κίνηση των οποίων μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε πειραματικά το ηλεκτρικό πεδίο.

Η δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου γύρω από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει αναλογίες με το φαινόμενο της δημιουργίας μαγνητικού πεδίου γύρω από ρευματοφόρο αγωγό.



(α) **Σχ. 6.10** (β)

Γύρω από τον αγωγό, σχ. 6.10.α, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο που η μαγνητική του επαγωγή είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την απόσταση απ' αυτόν ($B=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2I}{r}$). Αντιστοίχως γύρω από τη μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή, σχ. 6.10.β, δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η ένταση $\mathcal{E}$ έχει μέτρο αντιστρόφως ανάλογο προς την απόσταση (σχέση 6.17).

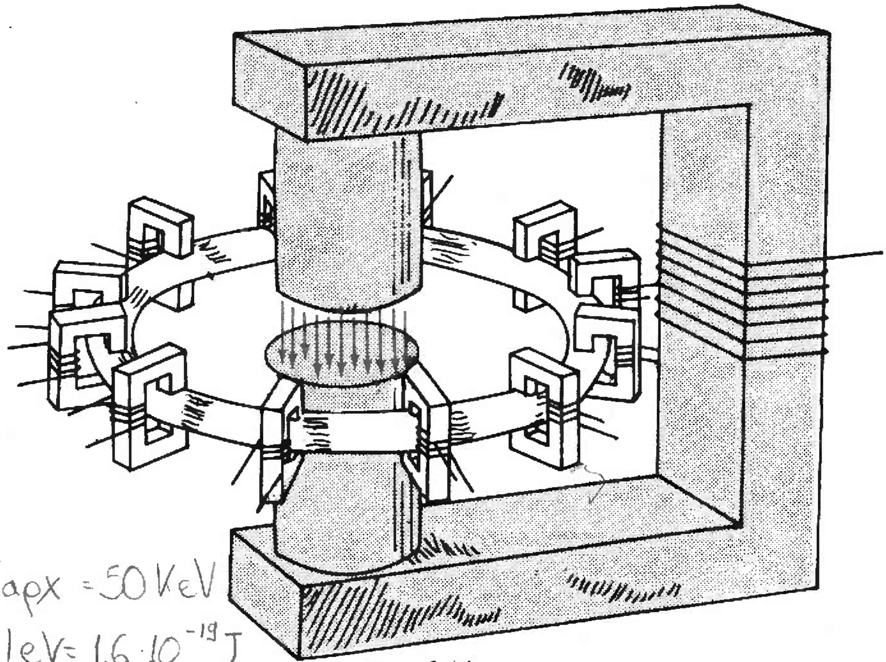
6.5. Βήτατρο

Η δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου από μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή χρησιμοποιείται για την επιτάχυνση ηλεκτρονίων στη συσκευή που ονομάζεται βήτατρο* ή επιταχυντής από επαγωγή, σχ. 6.11.

Το βήτατρο αποτελείται από ένα ισχυρό ηλεκτρομαγνήτη, ένα αερόκενο δακτύλιο, μέσα στον οποίο επιταχύνονται τα ηλεκτρόνια, και μικρούς ηλεκτρομαγνήτες που τοποθετούνται στην περιφέρεια του δακτυλίου, για να εξασφαλίζουν την κυκλική κίνηση στα ηλεκτρόνια.

Όταν ο ηλεκτρομαγνήτης τροφοδοτηθεί με εναλλασσόμενο ρεύμα, η μαγνη-

* Ονομάζεται έτσι επειδή τα ηλεκτρόνια λέγονται και σωμάτια βήτα.



Eαρχ = 50 KeV
1eV = 1,6·10^-19 J

Σχ. 6.11

τική επαγωγή του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου είναι μεγάλη και μεταβάλλεται με τη συχνότητα του ρεύματος. Κατά συνέπεια και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής θα μεταβάλλεται με την ίδια συχνότητα.

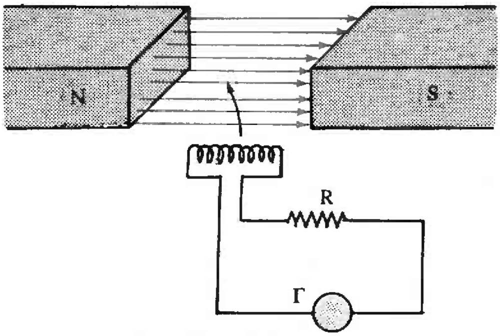
Τα ηλεκτρόνια που φέρονται μέσα στο δακτύλιο επιταχύνονται με την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου κατά το χρονικό διάστημα Ο–Τ/4 της περιόδου του ρεύματος. Σ' αυτό το χρονικό διάστημα η ένταση του ρεύματος συνεχώς αυξάνεται, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$. Η αύξηση της μαγνητικής επαγωγής προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο σταθερής φοράς που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια στον αερόκενο δακτύλιο. Όταν συμπληρωθεί χρόνος Τ/4, τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από το δακτύλιο με ειδική διάταξη και ταχύτητα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

Τα ηλεκτρόνια που έχουν την ταχύτητα αυτή χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ακτίνων Χ πολύ υψηλής ενέργειας, για θεραπεία του καρκίνου και τον προσδιορισμό της δομής των κρυστάλλων.

6.6. Μέτρηση της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$.

Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, αν με ένα γαλβανόμετρο (βαλλιστικό γαλβανό-

μετρο)* μετρηθεί το φορτίο Q που αναπτύσσεται λόγω του φαινομένου της επαγωγής. Η διάταξη που χρησιμοποιείται φαίνεται στο σχήμα 6.12 και αποτελείται από ένα μικρό πηνίο αμελητέας ωμικής αντίστασης, που συνδέεται με ευαίσθητο γαλβανόμετρο Γ και αντίσταση R.



Σχ. 6.12.

Το πηνίο εισάγεται στο μαγνητικό πεδίο με τον άξονά του παράλληλο στις δυναμικές γραμμές. Η μαγνητική ροή που περνάει από το πηνίο, από μηδέν που ήταν εκτός πεδίου, γίνεται μέγιστη. Αν το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι S, τότε η μέγιστη ροή που θα διέρχεται απ' αυτή είναι B.S. Έτσι αν το πηνίο αποτελείται από N σπείρες και θεωρήσουμε ότι η διάρκεια εισόδου είναι Δt, η Η.Ε.Δ. που θα αναπτυχθεί από επαγωγή στο κύκλωμα είναι:

$$E_{επ} = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N\frac{BS-0}{\Delta t} \qquad (6.18)$$

Κατά το χρονικό διάστημα Δt το κύκλωμα θα διαρρέεται από ρεύμα που η έντασή του είναι:

$$I = \frac{E_{επ.}}{R} \qquad (6.19)$$

Το φορτίο Q που κινείται στο χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$Q = I\Delta t \qquad (6.20)$$

Από τις σχέσεις (6.18), (6.19), (6.20) προκύπτει:

$$\boxed{Q = \frac{BNS}{R}} \qquad (6.21)$$

* Το βαλλιστικό γαλβανόμετρο αντί για ενδείξεις ρεύματος παρέχει ενδείξεις ηλεκτρικού φορτίου.

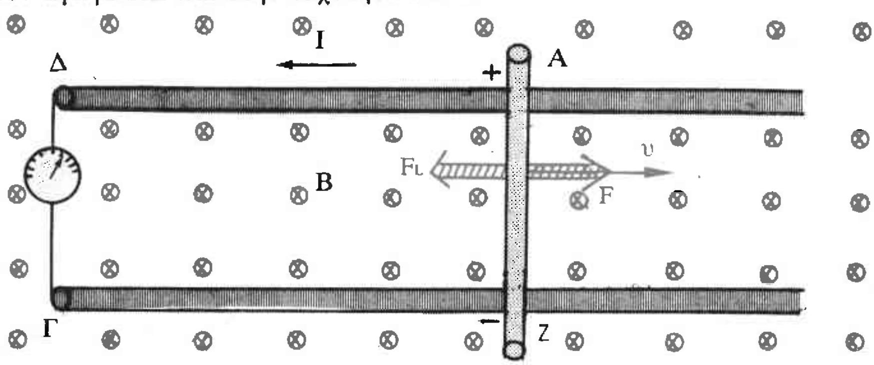
Το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$ βρίσκεται από τη σχέση αυτή και είναι ίσο με:

$$\boxed{B=\frac{RQ}{NS}} \qquad (6.22)$$

Τα N, S δίνονται από τον κατασκευαστή του πηνίου, το Q παρέχεται από τις ενδείξεις του οργάνου και το R μπορεί να μετρηθεί, αν διακόψουμε το κύκλωμα και το συνδέσουμε σε μία γέφυρα χορδής.

6.7. Ο κανόνας του Lenz ως συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας

Αγωγός ΑΖ μήκους l, γλυστράει χωρίς τριβή με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πάνω σε δύο μεταλλικές ράβδους που συνδέονται στα άκρα τους με γαλβανόμετρο, ώστε να σχηματιστεί κλειστό κύκλωμα, σχ. 6.13. Η διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\vec{B}$, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στον αγωγό ΑΖ και στην ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$.



Σχ. 6.13.

Επειδή ο αγωγός ΑΖ κινείται σε μαγνητικό πεδίο, στα άκρα του εμφανίζεται ΗΕΔ από επαγωγή, το μέτρο της οποίας δίνεται από τον τύπο $E_{επ.}=\upsilon Bl$. Το κλειστό κύκλωμα ΑΖΓΔΑ διαρρέεται από ρεύμα έντασης I.

Η κυκλοφορία ρεύματος στο κύκλωμα δημιουργεί ένα πρόσθετο φαινόμενο: Ο αγωγός ΑΖ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, άρα θα ασκηθεί πάνω του δύναμη Laplace, που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση $F_L=IBl$, (6.23) και η φορά της είναι αντίθετη προς την ταχύτητα του αγωγού, σχ. 6.13. Με άλλα λόγια η δύναμη Laplace αντιστέκεται στην κίνηση του αγωγού, δηλαδή στην αιτία που δημιουργεί το ρεύμα. Αυτό ακριβώς απο-

τελεί τον κανόνα του Lenz, ο οποίος διατυπώνεται έτσι: **«Το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να αντιστέκεται στην αιτία που το προκαλεί».**

Είναι φανερό ότι, για να κινείται ο αγωγός ΑΖ προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, πρέπει να ασκείται πάνω του δύναμη $\vec{F}$ αντίθετη με τη δύναμη Laplace F_L. Αν σε χρόνο Δt ο αγωγός μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά Δx, τότε η δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο $W_1 = F\Delta x$ ή, επειδή $\Delta x = \upsilon\Delta t$,

$$W_1 = F\upsilon\Delta t \tag{6.24}$$

Επειδή $F = F_L$ η σχέση (6.24) λόγω της (6.23) γράφεται:

$$W_1 = IBl\upsilon\Delta t \tag{6.25}$$

Το έργο W_1 εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρθηκε, από το αίτιο που συντηρεί την ομαλή κίνηση του αγωγού, στο κύκλωμα με τη μορφή ηλεκτρικής ενέργειας. Πράγματι η ενέργεια W_2 του ρεύματος για το κλειστό κύκλωμα του σχήματος 6.13 είναι:

$$W_2 = E_{\varepsilon\pi.} I\Delta t, \tag{6.26}$$

όπου $E_{\varepsilon\pi.}$ η ΗΕΔ από επαγωγή στα άκρα της ράβδου, που είναι $E_{\varepsilon\pi.} = \upsilon Bl$. Επομένως η σχέση (6.26) γράφεται:

$$W_2 = \upsilon BlI\Delta t \tag{6.27}$$

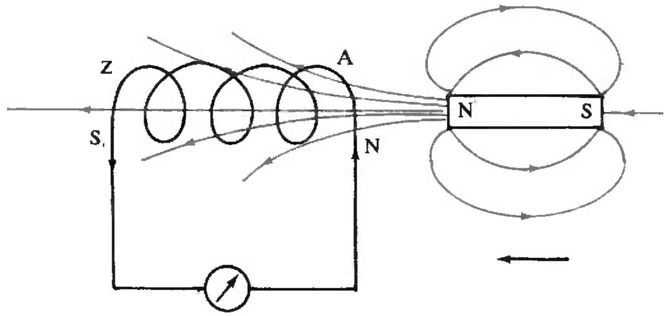
Από τις σχέσεις (6.25) και (6.27) συμπεραίνουμε ότι $W_1 = W_2$, δηλαδή ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Τι θα συνέβαινε, αν το επαγωγικό ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος 6.13 είχε αντίθετη φορά, δηλαδή αν δεν ίσχυε ο κανόνας του Lenz; Η δύναμη Laplace θα είχε φορά προς τα δεξιά.

Στην περίπτωση αυτή όχι μόνο δεν θα χρειαζόνταν η δύναμη $\vec{F}$, για να κινηθεί ο αγωγός με σταθερή ταχύτητα, αλλά με την επίδραση της $\vec{F}_L$ η ράβδος θα εκτελούσε επιταχυνόμενη κίνηση, η ταχύτητά της θα μεγάλωνε συνέχεια, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η κινητική της ενέργεια, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Συνεπώς το επαγωγικό ρεύμα μπορεί να έχει μόνο τη φορά που σημειώνεται στο σχήμα 6.13, δηλαδή να προκαλεί δύναμη Laplace που αντιστέκεται στην κίνηση του αγωγού, η οποία δημιουργεί αυτό το ρεύμα.

Στην περίπτωση που ένα πλαίσιο είναι ακίνητο και μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται απ' αυτό ισχύει πάλι ο κανόνας του Lenz.



Σχ. 6.14

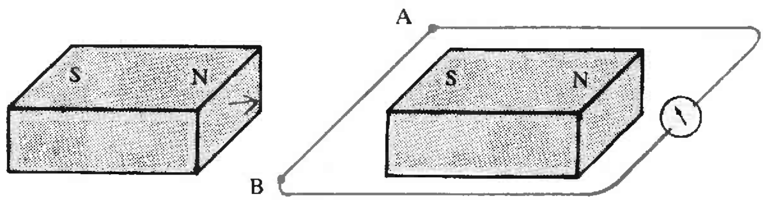
Όταν ο μαγνήτης κινείται προς το πηνίο (σχ. 6.14), απέναντι από το βόρειο πόλο του αναπτύσσεται στο πηνίο πάλι βόρειος πόλος, με αποτέλεσμα να απαιτείται πρόσθετη μηχανική ενέργεια για την παραπέρα κίνηση του μαγνήτη. Αυτή ακριβώς η ενέργεια μετατρέπεται στο κύκλωμα σε ηλεκτρική.

Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από το πηνίο, τότε το άκρο Α γίνεται νότιος πόλος, με αποτέλεσμα να απαιτείται πρόσθετη ενέργεια για την απομάκρυνσή του.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε οποιαδήποτε περίπτωση παράγεται ρεύμα από επαγωγή, η φορά του είναι τέτοια, ώστε να συμφωνεί με τον κανόνα του Lenz.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

1. Το γαλβανόμετρο θα δείξει μεγαλύτερη απόκλιση, όταν το σύρμα ΑΒ κινηθεί:
α) Πάνω και κάτω;
β) Δεξιά και αριστερά;
γ) Προς τα μέσα και έξω του βιβλίου;

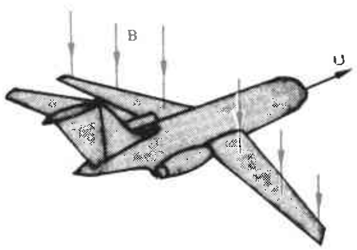


Στο σχήμα το σύρμα ΑΒ πηγαίνει προς το μέσα μέρος του βιβλίου και βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο των δύο μαγνητών.

2. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=15m/sec σε οριζόντιο δρόμο. Η κατακόρυφη συνιστώσα του γήινου μαγνητικού πεδίου στον τόπο που κινείται το αυτοκίνητο είναι $B=3{,}5\cdot10^{-5}$ Tesla. Βρείτε την τάση απο επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του προφυλακτήρα του αυτοκινήτου, ο οποίος έχει μήκος 1,5m και είναι ηλεκτρικά μονωμένος από το σώμα του αυτοκινήτου.

(**Απ.** $7{,}875\cdot10^{-4}$ Volt)

3. Ένα αεροπλάνο κινείται στο μαγνητικό πεδίο της γης έτσι, ώστε η κατακόρυφη συνιστώσα του γήινου μαγνητικού πεδίου να είναι κάθετη στις πτέρυγες και στην ταχύτητά του υ. Υποστηρίζεται ότι μεταξύ των άκρων των πτερύγων του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή.



α) Δημιουργείται κατά τη γνώμη σας μια τέτοια διαφορά δυναμικού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Από ποια σχέση θα υπολογίζεται το μέτρο της; Αν κατά τη γνώμη σας δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Μπορεί να μετρηθεί αυτή η διαφορά δυναμικού, αν υπάρχει, με τη βοήθεια βολτόμετρου; Εκφράστε αναλυτικά τη γνώμη σας. Σας θυμίζουμε ότι, όσον αφορά το μέγεθος, μπορούμε να μετράμε πολύ μικρές διαφορές δυναμικού.

✳ **4.** Ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους l=1m κινείται, σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ=2m/sec κάθετη στον άξονά του, μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B=1,2 Tesla.

α) Να υπολογιστεί η $E_{επ.}$ που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού.

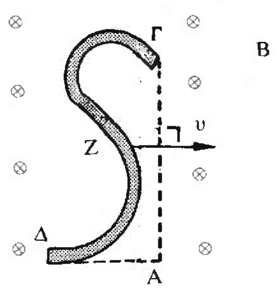
β) Αν η $E_{επ.}$ εφαρμοστεί κατάλληλα σε ωμική αντίσταση R=20Ω, να βρεθεί η θερμότητα που ελευθερώνεται σε χρόνο t=10min.

γ) Πώς συνδέεται η απάντηση στην ερώτηση (β) με τη μηχανική ενέργεια που δαπανάται για την κίνηση του αγωγού στο χρονικό διάστημα των 10min;

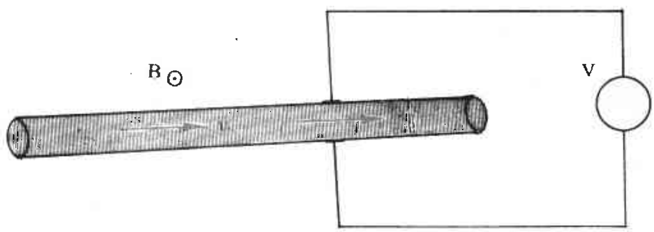
(**Απ.** α) 2,4Volt, β) 41,5 cal γ) είναι ίσες)

✳ **5.** Ο αγωγός του σχήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα υ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στον αγωγό και στην ταχύτητά του. Να βρεθεί η τάση από επαγωγή στα άκρα του αγωγού.

(**Απ.** Bυ(ΓΑ))



✳ **6.** Οι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι η ταχύτητα του αίματος στις φλέβες ενός ζώου μπορεί να μετρηθεί με τον τρόπο που δείχνει το πιο κάτω σχήμα. Ένα μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B είναι κάθετο στη φλέβα και με τη βοήθεια βολτομέτρου μετριέται η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο ηλεκτροδίων που προσαρμόζονται σε δύο απέναντι σημεία της φλέβας. Τόσο το αίμα, όσο και τα τοιχώματα των φλεβών είναι αγωγοί του ηλεκτρισμού.



α) Έχει λογική βάση ο παραπάνω ισχυρισμός; Μπορεί να υπάρξει έστω και μικρή διαφορά δυναμικού, αν τα ηλεκτρόδια τοποθετηθούν σε κατάλληλη θέση; Είναι η παραπάνω θέση των ηλεκτροδίων η κατάλληλη;

β) Επιπλέον υποστηρίζεται ότι, αν απομακρυνθεί το βολτόμετρο και από τα ηλεκτρόδια διαβιβαστεί ηλεκτρικό ρεύμα, τότε η διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αντλία που ωθεί το αίμα προς τα εμπρός. Είναι αυτό κατορθωτό;

7. Ένας ευθύγραμμος αγωγός ΟΑ μήκους l, περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που διέρχεται από το άκρο του Ο, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στον αγωγό και παράλληλες στον άξονα της περιστροφής.

α. Να εξηγήσετε γιατί αναπτύσσεται τάση από επαγωγή στα άκρα του αγωγού.

β. Το μέτρο της τάσης αυτής να εκφραστεί ως συνάρτηση του μήκους του αγωγού, της γωνιακής ταχύτητας ω και της μαγνητικής επαγωγής Β.

(**Απ.** β) $\frac{Bl^2\omega}{2}$)

8. Ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους l=1m περιστρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο Β= 0,5 Tesla γύρω από άξονα που διέρχεται από σημείο που απέχει 25cm από το ένα άκρο του. Ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος στον αγωγό και παράλληλος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Αν η συχνότητα περιστροφής είναι 180 στροφές/min, πόση τάση από επαγωγή αναπτύσσεται:

α) Μεταξύ του κάθε άκρου του αγωγού και του σημείου από το οποίο περνάει ο άξονας περιστροφής;

β) Μεταξύ των δύο άκρων του αγωγού;

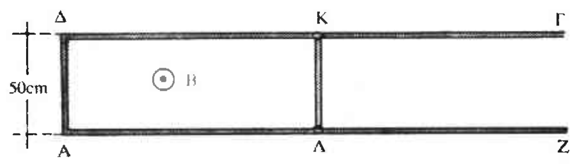
(**Απ.** α) 0,29 Volt, 2,65 Volt, β) 2,36 Volt)

9. Δυο σιδερένιες ράβδοι που σχηματίζουν με τον ορίζοντα γωνία θ συνδέονται στο κάτω άκρο τους με σύρμα αμελητέας αντίστασης. Από το πάνω άκρο των ράβδων αφήνουμε να ολισθήσει χωρίς τριβή κατά μήκος τους ένας πρισματικός αγωγός μάζας m, μήκους l και αντίστασης R, που μετά από λίγο αποκτάει σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{ορ}$. Αν η διάταξη βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο B_κ να δείξετε ότι:

$$\upsilon_{ορ}=\frac{mgR\eta\mu\theta}{B_\kappa^2 l^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Οι ράβδοι είναι μεταξύ τους παράλληλοι και έχουν αμελητέα αντίσταση.

10. Ένας αγωγός σχήματος Π βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με το επίπεδό του κάθετο στη μαγνητική επαγωγή.



Ο αγωγός ΚΛ ολισθαίνει χωρίς τριβή πάνω στα τμήματα ΔΓ και ΑΖ και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση ΔΑ. Αν ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ=15m/sec$ και η μαγνητική επαγωγή Β είναι 0,2 Tesla, βρείτε:

α) Την έκφραση της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο που σχηματίζεται από τον αγωγό σχήματος Π και τις διαδοχικές θέσεις του αγωγού ΚΛ, σε συνάρτηση με το χρόνο.

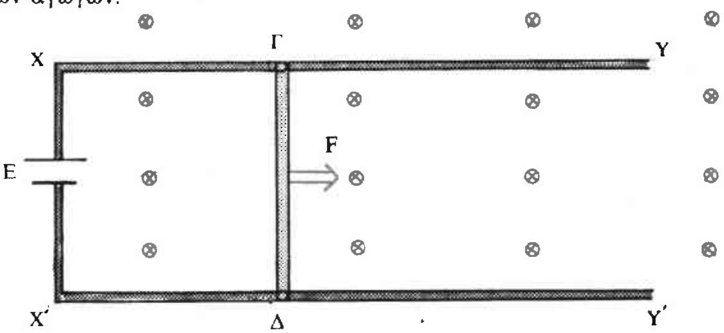
β) Πόση ΗΕΔ αναπτύσσεται από επαγωγή στα άκρα του αγωγού ΚΛ

γ) Με ποιο ρυθμό πρέπει να προσφέρεται ενέργεια στον κινούμενο αγωγό, ώστε να διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I=1A$

δ) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στον αγωγό ΚΛ κατά τη διεύθυνση της κίνησής του, αν το ρεύμα έχει ένταση 1Α

(**Απ.** α) **$Φ = 1,5t$ (Wb)** β) $E_{επ}=1,5$ Volt γ) 1,5 Joule/sec δ) 0,1N.)

11. Στα άκρα δυο παράλληλων αγωγών χωρίς αντίσταση εφαρμόζεται τάση $E=50Volt$. Κατά μήκος των δυο αγωγών και κάθετα σ' αυτούς μπορεί να γλυστράει χωρίς τριβές αγωγός ΓΔ μήκους 100cm και ωμικής αντίστασης 10Ω. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου η μαγνητική επαγωγή $B=1$ Tesla είναι κάθετη στο επίπεδο των αγωγών.



α) Ποια θα είναι η διεύθυνση και η φορά της δύναμης που θα ασκηθεί επάνω του; Ποιο είναι το αποτέλεσμα αυτής της δύναμης;

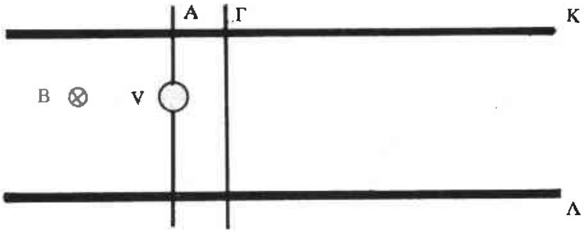
β) Ο αγωγός τίθεται σε κίνηση λόγω της δύναμης Laplace, οπότε στα άκρα του Γ και Δ θα εμφανιστεί ΗΕΔ από επαγωγή. Ποιος τύπος παρέχει αυτήν την ΗΕΔ και ποια είναι η φορά του ρεύματος που προκαλεί στο κύκλωμα;

γ) Να εφαρμόσετε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα ΧΓΔΧ'. Τι συμπεραίνετε για την ένταση του ρεύματος;

δ) Ποιο θα είναι το μέτρο της οριακής ταχύτητας που τελικά θα αποκτήσει ο αγωγός;

(**Απ.** α) Θα κινηθεί με την επίδραση της δύναμης Laplace. β) $E_{επ}=Bυl$, αντίθετη από το ρεύμα που προκαλεί η πηγή Ε. γ) Μειώνεται. δ) $υ_{ορ}=50m/sec$)

12. Δυο παράλληλοι μεταλλικοί αγωγοί Κ, Λ βρίσκονται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με το επίπεδό τους κάθετο στη μαγνητική επαγωγή Β.



Δύο άλλοι μεταλλικοί αγωγοί Α, Γ ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω στους πρώτους. Στο μέσο του αγωγού Α είναι συνδεμένο βολτόμετρο πολύ μεγάλης εσωτερικής αντίστασης, οι ενδείξεις του οποίου κατά τακτά χρονικά διαστήματα καταγράφονται και μπορούν να παρασταθούν γραφικά.

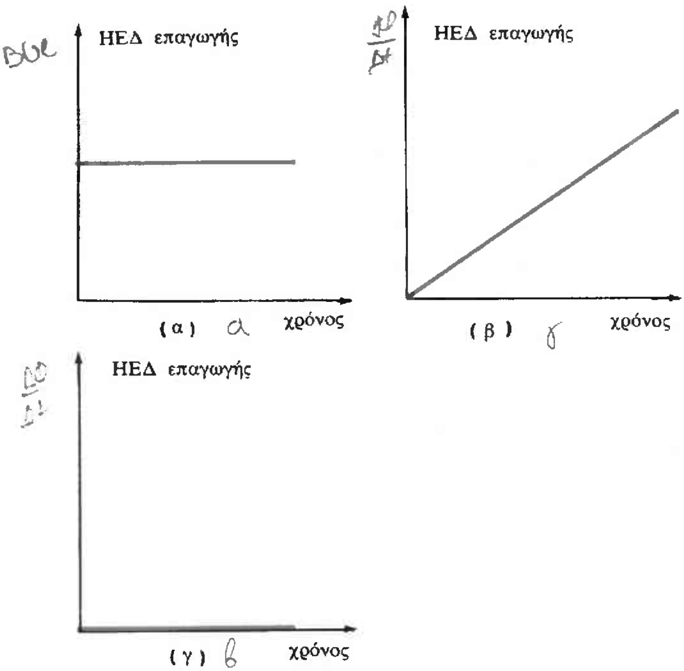
Με τη βοήθεια αυτής της πειραματικής διάταξης γίνονται τα εξής πειράματα:

α) Ο αγωγός Γ κινείται με σταθερή ταχύτητα ενώ ο Α είναι ακίνητος.

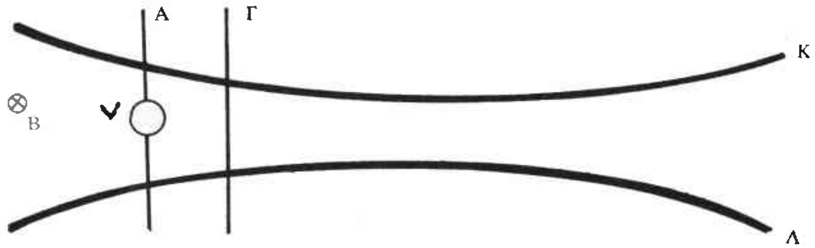
β) Οι αγωγοί Α, Γ κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα.

γ) Ο αγωγός Α είναι ακίνητος και ο Γ έχει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

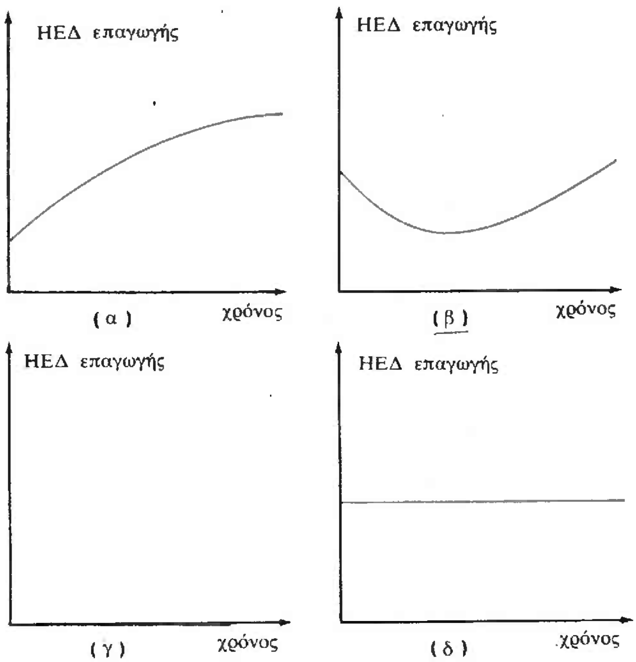
Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα που παριστάνουν την ΗΕΔ από επαγωγή (ένδειξη βολτομέτρου) σε συνάρτηση με το χρόνο αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις;



13. Οι ευθύγραμμοι αγωγοί Κ, Λ της προηγούμενης ερώτησης αντικαθίστανται από άλλους όπως φαίνεται στο σχήμα.

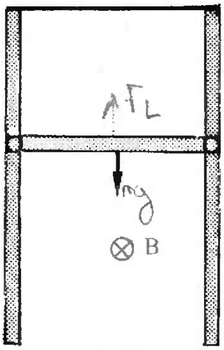


Εκτελείται πάλι το πείραμα α. Ποια από τις παρακάτω καμπύλες παριστάνει την ΗΕΔ από επαγωγή σε συνάρτηση με το χρόνο;



14. Ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους $l = 1m$ και μάζας $m = 100gr$ γλυστράει χωρίς τριβή σε δύο κατακόρυφους μεταλλικούς στύλους, οι οποίοι ενώνονται στο πάνω μέρος τους με σύρμα ωμικής αντίστασης $R = 1\Omega$. Η όλη διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο, μαγνητικής επαγωγής $B = 1$ Tesla, που είναι κάθετο στον αγωγό και στην ταχύτητά του. Στην αρχή η κίνηση του αγωγού είναι επιταχυνόμενη, ενώ στη συνέχεια ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η ωμική αντίσταση του αγωγού είναι 1Ω, ενώ οι κατακόρυφοι στύλοι είναι χωρίς αντίσταση.

α) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό.



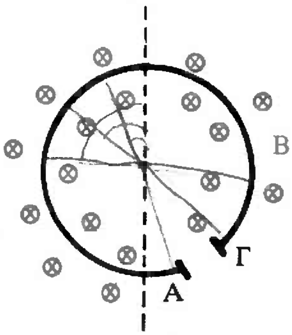
β) Να υπολογιστεί το μέτρο της σταθερής ταχύτητας πτώσης.

γ. Το κύκλωμα που σχηματίζεται από τον αγωγό που πέφτει, τους δυο κατακόρυφους στύλους και το σύρμα, που τους ενώνει, διαρρέεται από ρεύμα μετατρέποντας την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα. Από ποια μορφή ενέργειας προέρχεται η ηλεκτρική αυτή ενέργεια;

δ) Το έργο των δυνάμεων οι οποίες ασκούνται στον αγωγό που πέφτει εκφράζει τη μετατροπή ενέργειας. Δώστε περισσότερες εξηγήσεις.

ε) Στην αρχή του πειράματος ο αγωγός είχε δυναμική ενέργεια. Τι έχει γίνει η ενέργεια αυτή, όταν ο αγωγός πλησιάζει στο έδαφος; Δίνεται $g=10m/sec^2$.

(Απ. β) $\upsilon_{o\rho}=2m/sec$ γ) Από τη δυναμική που είχε στην αρχική του θέση).



15) Ένας αγωγός ΑΓ έχει σχήμα κύκλου ακτίνας 10cm και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B=0,2 Tesla κάθετο στο επίπεδο του αγωγού. Αν ο αγωγός στραφεί γύρω από μια διάμετρό του κατά 60°, 120° και 180° και κάθε περιστροφή διαρκεί χρόνο Δt=0,2 sec, πόση τάση από επαγωγή αναπτύσσεται στα άκρα του σε κάθε περίπτωση;

(Απ. $1{,}57\cdot10^{-2}$ Volt, $4{,}71\cdot10^{-2}$ Volt $6{,}28\cdot10^{-2}$ Volt)

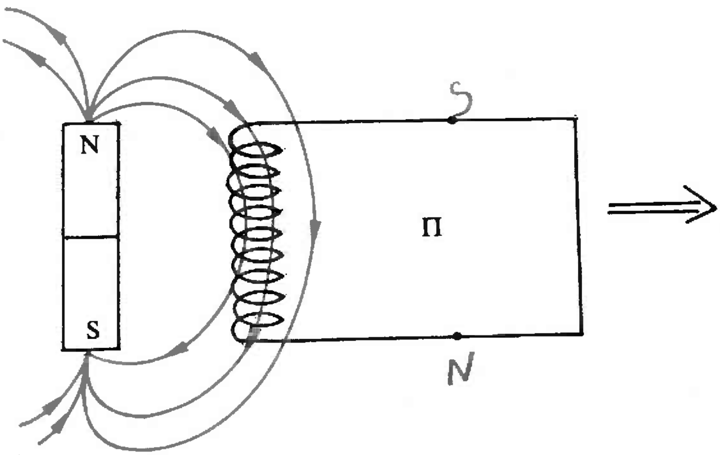
16. Ένα κλειστό κυκλικό πλαίσιο 200 σπειρών και μέσης διαμέτρου 0,5m που έχει αντίσταση 10Ω, είναι τοποθετημένο με το επίπεδό του σε ορθή γωνία προς ένα μαγνητικό πεδίο B=0,2 Tesla. Να υπολογιστεί η ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που διέρχεται από μια τομή του αγωγού του πλαισίου, όταν το πλαίσιο στραφεί κατά 90° γύρω από άξονα του επιπέδου του, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του πλαισίου.

(Απ. Q=0,78cb)

17. Το πηνίο που χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της μαγνητικής επαγωγής B (Παράγραφος 6.6) έχει 10 σπείρες εμβαδού $S=5cm^2$. Το πηνίο συνδέεται με βαλλιστικό γαλβανόμετρο και φέρεται γρήγορα μεταξύ των πόλων ηλεκτρομαγνήτη. Το βαλλιστικό γαλβανόμετρο μετράει φορτίο $Q=10\mu Cb$. Αν η ολική αντίσταση στο κύκλωμα του πηνίου είναι 4Ω, πόση η μαγνητική επαγωγή του πεδίου;

(Απ. $B=8\cdot 10^{-3}$ Tesla)

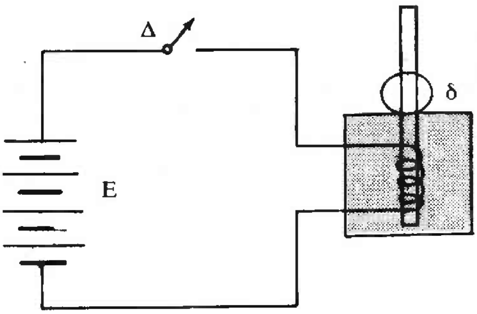
18. Το πηνίο Π κινείται προς τα δεξιά και απομακρύνεται από το ραβδόμορφο μαγνήτη. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στην εμφάνιση ΗΕΔ, από επαγωγή στο πηνίο είναι σωστή;



α) Η ΗΕΔ από επαγωγή θα έχει τέτοια φορά, ώστε να προκαλέσει ρεύμα που θα δημιουργήσει στο πάνω άκρο βόρειο πόλο και στο κάτω νότιο.

β) Η ΗΕΔ από επαγωγή θα έχει τέτοια φορά, ώστε να προκαλέσει ρεύμα που θα δημιουργήσει στο πάνω άκρο νότιο πόλο και στο κάτω βόρειο.

19. Μια πειραματική διάταξη αποτελείται από συστοιχία πηγών, ώστε να δημιουργείται μεγάλη ΗΕΔ και από πηνίο μεγάλου αριθμού σπειρών. Μέσα στο πηνίο είναι τοποθετημένος κατακόρυφα πυρήνας μαλακού σιδήρου. Ένα ελαφρό δαχτυλίδι από χαλκό είναι περασμένο στον πυρήνα και μπορεί να κινείται ελεύθερα κατά μήκος του. Αρχικά το δαχτυλίδι βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο ακουμπώντας πάνω στο πλαίσιο του πηνίου.

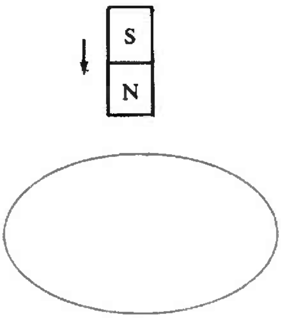


Όταν κλείσουμε το διακόπτη Δ, παρατηρούμε ότι το δαχτυλίδι αναπηδάει και κατόπιν πέφτει πάλι στην αρχική του θέση.

α) Εξηγήστε γιατί αναπηδάει το δαχτυλίδι.

β) Τι θα συμβεί, αν το δαχτυλίδι αντικατασταθεί από άλλο που είναι φτιαγμένο από το ίδιο υλικό, έχει το ίδιο βάρος, αλλά σε ένα σημείο του είναι κομμένο;

20. Ένας ραβδόμορφος μαγνήτης πέφτει κατακόρυφα και πρόκειται να περάσει μέσα από ένα μεταλλικό κλειστό αγωγό, όπως εικονίζεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα, πώς θα επηρεαστεί η επιτάχυνση του μαγνήτη από την ύπαρξη του κλειστού αγωγού;



α) Παραμένει σταθερή;

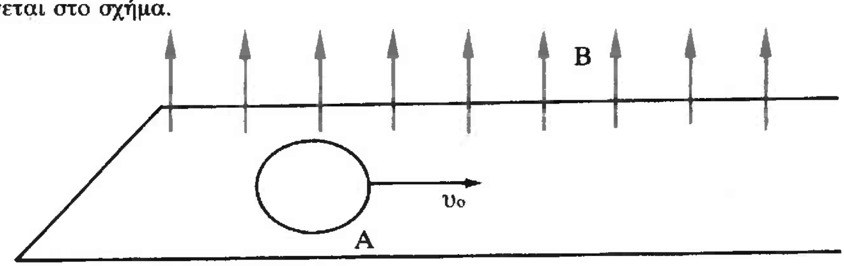
β) Αυξάνεται συνεχώς;

γ) Μειώνεται συνεχώς;

δ) Μειώνεται και κατόπιν αρχίζει πάλι να αυξάνεται, μέχρι να αποκτήσει σταθερή τιμή ίση με g;

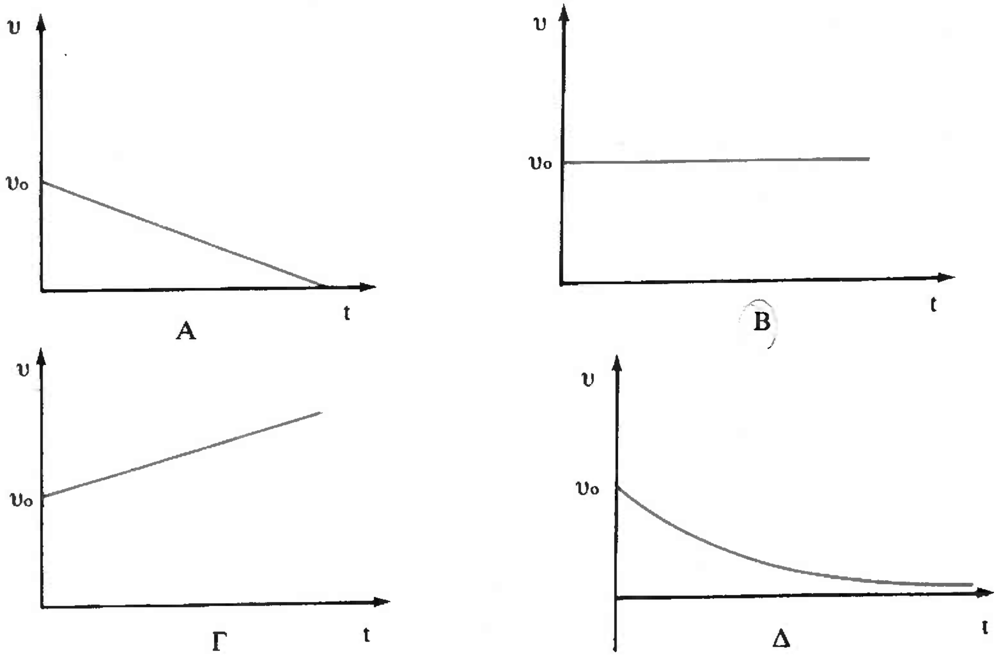
ε) Αυξάνεται και κατόπιν μειώνεται, μέχρι να αποκτήσει μια σταθερή τιμή;

21. Ένα μικρό μεταλλικό δαχτυλίδι ολισθαίνει πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο και είναι κάθετη στη μαγνητική επαγωγή Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και το δαχτυλίδι στη θέση Α έχει ταχύτητα υ_o.

Ποιό από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει τη μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο;



22. Σε ένα βήτατρο 100 MeV (που μπορεί δηλαδή να προσδώσει στα ηλεκτρόνια κινητική ενέργεια μέχρι 100MeV), η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς των ηλεκτρονίων είναι R=84cm. Το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο αποκτάει τη μέγιστη τιμή του B_{max}= 0,8 Tesla σε χρόνο Δt=4,2msec.

Ζητούνται:

α) Η τάση από επαγωγή.
β) Η ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια κατά μία περιστροφή.
γ) Ο αριθμός των περιστροφών που πρέπει να κάνουν τα ηλεκτρόνια, για να αποκτήσουν την μέγιστη ενέργεια.
δ) Η απόσταση που θα έχουν διανύσει τότε τα ηλεκτρόνια.
ε) Η συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο.

Δίνεται ότι 1ev=1,6·10^{-19} Joule και ότι ο δακτύλιος του βήτατρου βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.

(**Απ.** α) 421 Volt, β) 421eV, γ) 237530 περιστροφές, δ) 1253km ε) 60Hz.)

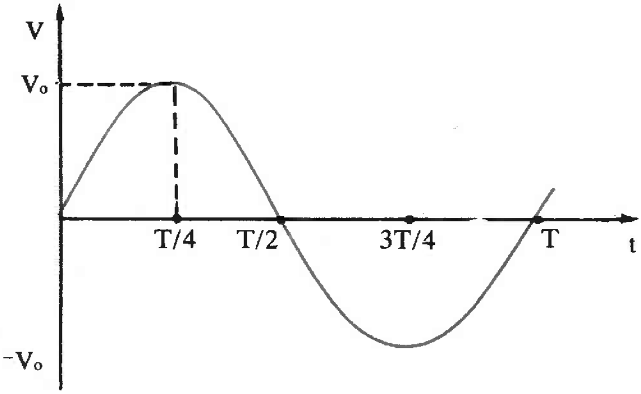
7
Εναλλασσόμενα ρεύματα

7.1. Παραγωγή εναλλασσόμενης τάσης

Η εναλλασσόμενή τάση περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση

$$\boxed{V = V_o \eta\mu\omega t} \tag{7.1}$$

όπου V είναι η τάση τη χρονική στιγμή t (στιγμιαία τάση), V_o το πλάτος της, ωt η φάση και ω η κυκλική συχνότητα. Η τάση αυτή που λέγεται και ημιτονοειδής τάση εικονίζεται γραφικά στο σχήμα 7.1.



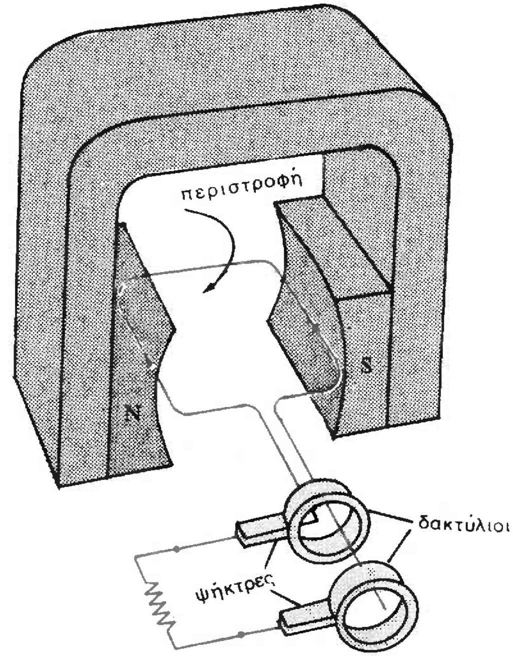
Σχ. 7.1. Γραφική παράσταση εναλλασσόμενης τάσης

Η παραγωγή της εναλλασσόμενης τάσης στηρίζεται στο φαινόμενο της επαγωγής και οι διατάξεις που την παράγουν λέγονται γεννήτριες εναλλασσόμενης τάσης.

Η αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εναλλασσόμενης τάσης εικονίζεται στο σχ. 7.2. Η γεννήτρια αποτελείται από έναν πεταλοειδή μαγνήτη, που δημιουργεί μεταξύ των πόλων του ομογενές μαγνητικό πεδίο, και από ένα μεταλλικό πλαίσιο, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέσα στο πεδίο του μαγνήτη. Τα άκρα του πλαισίου καταλήγουν σε δύο μεταλλικούς δακτύλιους, στους οποίους εφάπτονται δύο ράβδοι από άνθρακα που ονομάζονται ψήκτρες*.

---

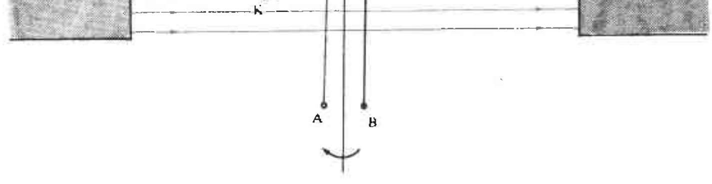
* Οι ψήκτρες λέγονται αλλιώς και καρβουνάκια.



Σχ. 7.2. Σχηματική παράσταση γεννήτριας εναλλασσόμενης τάσης.

Μέρος της μηχανικής ενέργειας, που δαπανάται για την περιστροφή του πλαισίου, μετατρέπεται λόγω του φαινομένου της επαγωγής σε ηλεκτρική, με αποτέλεσμα μεταξύ των ψηκτρών να εμφανίζεται εναλλασσόμενη τάση. Το κινητό μέρος των γεννητριών λέγεται ρότορας και το ακίνητο λέγεται στάτορας.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά τον τρόπο παραγωγής της εναλλασσόμενης τάσης από την περιστροφή του πλαισίου μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο. Στο σχ. 7.3. εικονίζεται ένα μεταλλικό πλαίσιο, που περιστρέφεται μέσα σε ομογενές



Σχ. 7.3. Περιστροφή του πλαισίου στο ομογενές μαγνητικό πεδίο.

μαγνητικό πεδίο με τον άξονα περιστροφής XX΄κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Καθώς το πλαίσιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, στα άκρα των πλευρών ΚΛ και ΜΝ αναπτύσσεται τάση από επαγωγή, γιατί αυτές είναι συνέχεια κάθετες στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Στα άκρα των ΝΚ και ΛΜ δεν αναπτύσσεται τάση από επαγωγή, επειδή αυτές στρέφονται σε επίπεδο παράλληλο στις δυναμικές γραμμές.

Η τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο θα υπολογιστεί ως εξής:
Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το πλαίσιο είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές και ότι μετά χρόνο t έχει στραφεί κατά γωνία $\varphi=\omega t$. Στη θέση αυτή η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ των ΜΝ και ΚΛ, που είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο του πλαισίου, σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου γωνίες φ και 180-φ αντίστοιχα.

Η τάση V_{MN} που αναπτύσσεται από επαγωγή στα άκρα της πλευράς ΜΝ θα είναι σύμφωνα με τον τύπο (6.6) της §6.2

$$V_{MN}=\upsilon B(MN)\eta\mu\varphi \qquad (7.2)$$

Αντίστοιχα η τάση $V_{K\Lambda}$ στα άκρα της πλευράς ΚΛ, είναι:

$$V_{K\Lambda}=\upsilon B(K\Lambda)\eta\mu(180-\varphi)$$

$$\text{ή} \quad V_{K\Lambda}=\upsilon B(K\Lambda)\eta\mu\varphi \qquad (7.3)$$

Η γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, των ΚΛ και ΜΝ έχει μέτρο:

$$\upsilon=\omega\frac{(\Lambda M)}{2}, \qquad (7.4)$$

γιατί η περιστροφή γίνεται περί τον άξονα XX΄και κάθε σημείο των ΚΛ, ΜΝ απέχει απ' αυτόν απόσταση $\frac{\Lambda M}{2}$.

Η τάση από επαγωγή στα άκρα Α και Β του πλαισίου είναι το άθροισμα των (7.2) και (7.3). Δηλαδή

$$V_{AB}=V_{K\Lambda}+V_{MN} \qquad (7.5)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.5) τις (7.2) και (7.3) και λαμβάνοντας υπόψη την (7.4), προκύπτει:

$$V_{AB}=\omega\frac{(\Lambda M)}{2}B(K\Lambda)\eta\mu\varphi+\omega\frac{(\Lambda M)}{2}B(MN)\eta\mu\varphi$$

$$\text{ή} \quad V_{AB}=\omega\frac{(\Lambda M)}{2}B(MN+K\Lambda)\eta\mu\varphi \qquad (7.6)$$

Επειδή ΚΛ=ΜΝ και $\varphi=\omega t$, η σχέση (7.6) γράφεται:

$$V_{AB}=\omega(\Lambda M)(MN)B\eta\mu\omega t \quad (7.7.)$$

Το γινόμενο (ΛΜ)(ΜΝ) είναι το εμβαδόν S του περιστρεφόμενου πλαισίου και η (7.7) γίνεται:

$$V_{AB}=\omega BS\eta\mu\omega t \quad (7.8)$$

Αν το πλαίσιο έχει Ν σπείρες, η τάση στα άκρα Α,Β θα είναι:

$$V_{AB}=N\omega BS\eta\mu\omega t \quad (7.9)$$

Αν τη σταθερή ποσότητα ΝωBS, που έχει διαστάσεις τάσης, την ονομάσουμε πλάτος V_o, δηλαδή γράψουμε

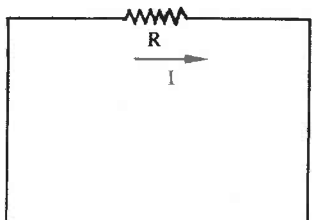
$$V_o=N\omega BS, \quad (7.10)$$

τότε η (7.9) ταυτίζεται με την (7.1).

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε, αν υπολογίσουμε τη μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο κατά την περιστροφή του στο μαγνητικό πεδίο. Η σχέση (7.9) μπορεί να προκύψει από το νόμο της επαγωγής, $E=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, και για το λόγο αυτό ισχύει για πλαίσιο οποιουδήποτε σχήματος.

7.2. Ένταση εναλλασσόμενου ρεύματος

Γνωρίζουμε ότι, αν στα άκρα μεταλλικού αγωγού αντίστασης R συνδέσουμε μια πηγή συνεχούς τάσης Ε σχ. 7.4, τότε στο εσωτερικό του σχηματίζεται ηλεκτρικό πεδίο, υπό την επίδραση του οποίου ηλεκτρόνια κινούνται κατά την ίδια φορά με αποτέλεσμα τη δημιουργία συνεχούς ρεύματος στο κύκλωμα. Κατά την κίνησή τους τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος και το αποτέλεσμα αυτών των συγκρούσεων είναι η θέρμανση του αγωγού σύμφωνα με το νόμο του Joule.

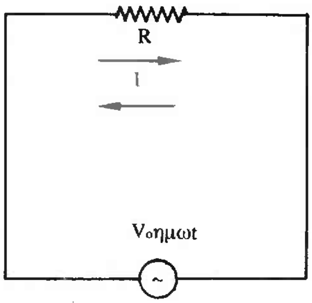


Σχ. 7.4.

Αν ο ίδιος αγωγός συνδεθεί με πηγή εναλλασσόμενης τάσης σχ. 7.5, τότε το ηλεκτρικό πεδίο μεταβάλλεται περιοδικά, με αποτέλεσμα να προκαλεί περιοδική μεταβολή στην ένταση του ρεύματος.

Η ένταση του ρεύματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από το νόμο του Ohm.

$$I=\frac{V}{R} \qquad (7.11)$$



Σχ. 7.5.

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τη στιγμιαία τιμή της τάσης $V=V_o ημωt$, προκύπτει ότι:

$$I=\frac{V_o ημωt}{R}=\frac{V_o}{R}ημωt \qquad (7.12)$$

Αν θέσουμε $I_o=\frac{V_o}{R}$, η σχέση (7.12) γράφεται

$$\boxed{I=I_o ημωt} \qquad (7.13)$$

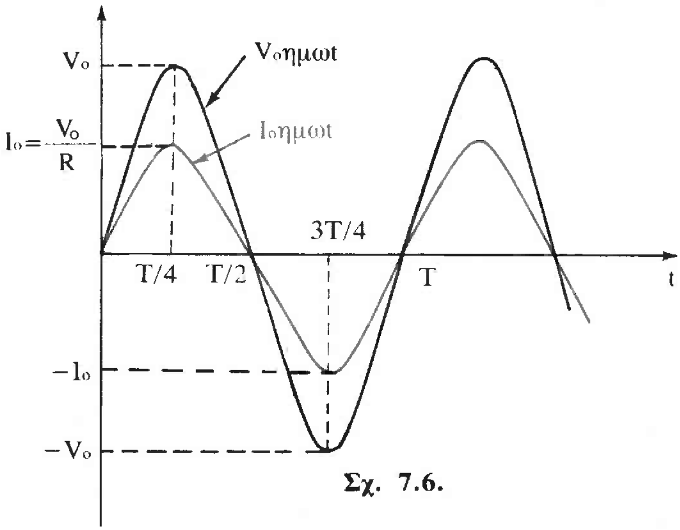
που αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Συγκρίνοντας τη σχέση (7.13) με τη σχέση (7.1) που περιγράφει την εναλλασσόμενη τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα, μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

α) Το ρεύμα και η τάση έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

β) Είναι μεγέθη συμφασικά, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα μέγιστη θετική, ή μέγιστη αρνητική τιμή.

Στα ίδια συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε από τα διαγράμματα του σχήματος 7.6, στο οποίο αποδίδονται γραφικά οι εξισώσεις (7.1) και (7.13).



Σχ. 7.6.

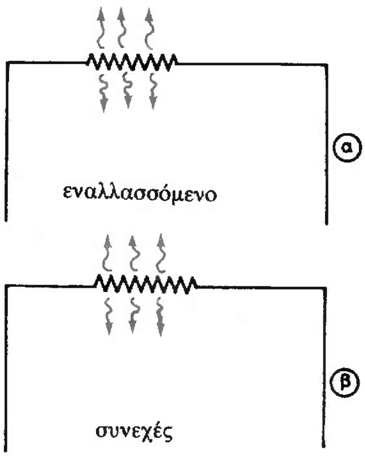
Όπως και στο συνεχές, έτσι και στο εναλλασσόμενο ρεύμα τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος με αποτέλεσμα τη θέρμανση του αγωγού.

7.3. Ενεργός ένταση, Ενεργός τάση

Η εξίσωση (7.13) της προηγούμενης παραγράφου δείχνει ότι η ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος μεταβάλλεται με το χρόνο. Επομένως η γνώση της στιγμιαίας τιμής της δεν έχει πρακτική σημασία. Γιαυτό, στηριζόμενοι στα θερμικά αποτελέσματα του εναλλασσόμενου ρεύματος, ορίζουμε μια καινούργια τιμή της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος, που δε μεταβάλλεται με το χρόνο, και την ονομάζουμε **ενεργό ένταση.**

Ενεργός ένταση $I_{εν}$ εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η ένταση του συνεχούς ρεύματος που προκαλεί το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα με το εναλλασσόμενο ρεύμα, όταν διαρρέει την ίδια αντίσταση κατά το ίδιο χρονικό διάστημα.

Ας προσδιορίσουμε καλύτερα τι εννοούμε λέγοντας «ενεργό ένταση».



Σχ. 7.7.

Υποθέτουμε ότι σε μια αντίσταση R σχ. 7.7α, διαβιβάζεται εναλλασσόμενο ρεύμα επί χρονικό διάστημα t και παράγεται θερμότητα Q. Αν στην ίδια αντίσταση R διαβιβαστεί συνεχές ρεύμα έντασης I σχ. 7.7β πάλι για το ίδιο χρονικό διάστημα t και ελευθερωθεί η ίδια ποσότητα θερμότητας Q, τότε η ένταση I του συνεχούς ρεύματος θα λέγεται ενεργός ένταση $I_{εν}$ του εναλλασσόμενου ρεύματος. Όπως θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο, η ένταση $I_{εν}$ συνδέεται με το πλάτος I_o του εναλλασσομένου ρεύματος με τη σχέση:

$$I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \qquad (7.14)$$

Για τους ίδιους λόγους που ορίσαμε την ενεργό ένταση ορίζουμε και την **ενεργό τάση** του εναλλασσόμενου ρεύματος κατά τρόπο ανάλογο. Έτσι ονομάζουμε **ενεργό τάση $V_{εν}$ του εναλλασσόμενου ρεύματος την τάση του συνεχούς ρεύματος που, όταν εφαρμοστεί στα άκρα της ίδιας ωμικής αντίστασης R, δημιουργεί συνεχές ρεύμα του οποίου η ένταση είναι ίση με την ενεργό ένταση**

του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η τάση $V_{εν}$ συνδέεται με το πλάτος V_o της εναλλασσόμενης τάσης με τη σχέση:

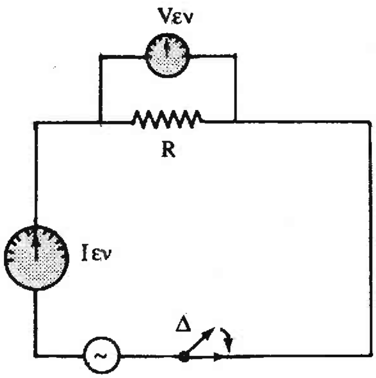
$$V_{εν}=\frac{V_o}{\sqrt{2}} \tag{7.15}$$

Στην πράξη, όταν αναφερόμαστε στην τάση ή στην ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος, εννοούμε την ενεργό τιμή αυτών των μεγεθών. Εξάλλου τα όργανα μετρήσεων που χρησιμοποιούνται στο εναλλασσόμενο ρεύμα (βολτόμετρα, αμπερόμετρα) μετράνε ενεργό τιμή.

Αν συνδέσουμε μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης με μια αντίσταση R, σχ. 7.8 και μετρήσουμε την ενεργό ένταση του ρεύματος $I_{εν}$ και την ενεργό τάση $V_{εν}$ στα άκρα της αντίστασης, διαπιστώνουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$R=\frac{V_{εν}}{I_{εν}} \tag{7.16}$$

Η σχέση (7.16) αποτελεί την έκφραση του νόμου του Ohm, για ωμική αντίσταση, στο εναλλασσόμενο ρεύμα.



Σχ. 7.8.

7.4. Σχέση μεταξύ ενεργού τιμής και πλάτους

Ας θεωρήσουμε μια ωμική αντίσταση R, στην οποία διαβιβάζεται εναλλασσόμενο ρεύμα, $I=I_o ημωt$. Στον πολύ μικρό χρόνο Δt πάνω στην αντίσταση αναπτύσσεται ποσό θερμότητας ΔQ που είναι ίσο με

$$ΔQ=αI^2RΔt \tag{7.17}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.17) τη στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος παίρνουμε:

$$ΔQ=αI_o^2\, ημ^2ωtRΔt$$

Επειδή $ημ^2ωt=\frac{1-συν2ωt}{2}$, έχουμε

$$\Delta Q = \alpha I_o^2 R \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega t}{2} \Delta t$$

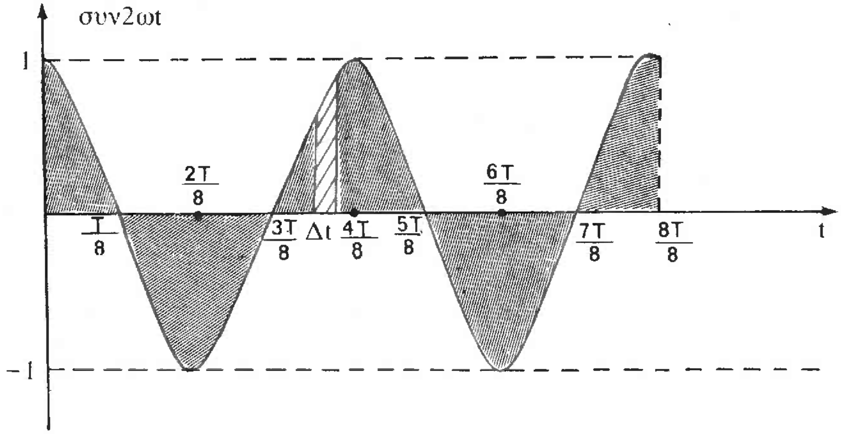
ή $$\Delta Q = \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \Delta t - \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \sigma\upsilon\nu 2\omega t \Delta t$$

Το ολικό ποσό της θερμότητας που θα ελευθερωθεί στην αντίσταση R, στη διάρκεια μιας περιόδου, θα είναι:

$$Q = \Sigma\Delta Q = \Sigma \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \Delta t - \Sigma \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \sigma\upsilon\nu 2\omega t \Delta t$$

ή $$Q = \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \Sigma\Delta t - \frac{\alpha I_o^2 R}{2} \Sigma\sigma\upsilon\nu 2\omega t \Delta t \qquad (7.18)$$

Το άθροισμα $\Sigma\Delta t$ στη σχέση (7.18) ισούται με την περίοδο T. Για να βρούμε το $\Sigma\sigma\upsilon\nu 2\omega t\Delta t$, αποδίδουμε γραφικά τη σχέση συν2ωt, σχ.7.9.



Σχ. 7.9. Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι συν2ωtΔt

Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση το άθροισμα $\Sigma\sigma\upsilon\nu 2\omega t\Delta t$ ισούται με το ολικό εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χρόνων και αλγεβρικά αθροιζόμενο ισούται με μηδέν. Στη σχέση(7.18)θέτουμε $\Sigma\sigma\upsilon\nu 2\omega t\Delta t = 0$ και $\Sigma\Delta t = T$, οπότε αυτή γράφεται:

$$Q = \frac{\alpha I_o^2 R}{2} T \qquad (7.18)$$

Εξάλλου, αν στον ίδιο χρόνο T διαβιβαστεί στην ίδια αντίσταση R συνεχές ρεύμα έντασης I_o, η ποσότητα της θερμότητας Q΄ που θα ελευθερωθεί σ' αυτή είναι:

$$Q' = \alpha I_o^2 RT \qquad (7.19)$$

Αν τα ποσά θερμότητας Q και Q΄ είναι ίσα, τότε η ένταση του συνεχούς ρεύματος I_σ είναι η ενεργός ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος $I_{\varepsilon\nu}$. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (7.18) και (7.19) έχουμε:

$$\frac{\alpha I_o^2 TR}{2} = \alpha I_\sigma^2 RT$$

$$\text{ή} \quad I_\sigma^2 = \frac{I_o^2}{2}$$

$$\text{ή} \quad I_\sigma = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$$

και επειδή $I_\sigma = I_{\varepsilon\nu}$, έχουμε

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \tag{7.20}$$

Η ενεργός τάση $V_{\varepsilon\nu}$, υπολογίζεται από το πλάτος V_o της εναλλασσόμενης τάσης ως εξής:

Σύμφωνα με το νόμο του Ohm για το εναλλασσόμενο ρεύμα ισχύει:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{R}$$

$$\text{ή} \quad \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{R}$$

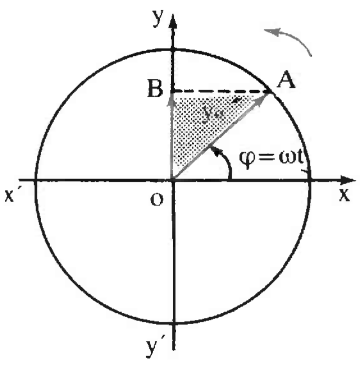
Επειδή $I_o = \frac{V_o}{R}$, αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \tag{7.21}$$

Από τις σχέσεις (7.20) και (7.21) μπορούμε να υπολογίζουμε το πλάτος της έντασης ή της τάσης του εναλλασσόμενου ρεύματος χρησιμοποιώντας τις ενδείξεις των οργάνων μέτρησης.

7.5. Παράσταση ημιτονοειδούς μεγέθους με περιστρεφόμενο διάνυσμα

Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ μέτρου y_o, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί την αρχή του Ο κατά τη θετική φορά, σχ. 7.10. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα xx΄, ενώ μετά από χρόνο t έχει διαγράψει γωνία $\varphi=\omega t$. Η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ πάνω στον άξονα yy΄ είναι:



Σχ. 7.10.

$$OB=y=y_o ημωt \quad (7.22)$$

Από τη σχέση (7.22) φαίνεται ότι η προβολή του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

Κάνοντας την αντίστροφη ακριβώς σκέψη, συμπεραίνουμε ότι ένα αρμονικά μεταβαλλόμενο μέγεθος, π.χ. μια ημιτονοειδής τάση, μπορεί να περιγραφεί με ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα. Πράγματι, ας θεωρήσουμε την εξίσωση της ημιτονοειδούς τάσης $V= V_o ημωt$. Αυτή συμφωνεί ακριβώς με την (7.22), αν το y_o είναι το πλάτος V_o της ημιτονοειδούς τάσης και V η προβολή στον άξονα yy΄.

1992

7.6. Εμπέδηση

Σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος που περιέχει μόνο ωμική αντίσταση, η δυσκολία που συναντούν τα ηλεκτρόνια στην κίνησή τους μέσα στους αγωγούς οφείλεται στις συγκρούσεις τους με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος. Τι συμβαίνει όμως στις περιπτώσεις που ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος περιλαμβάνει πυκνωτή ή πηνίο ή και τα δυο, δηλαδή περιέχει διατάξεις που αποθηκεύουν ενέργεια; Στις περιπτώσεις αυτές η δυσκολία στην κίνηση των ηλεκτρονίων οφείλεται σε άλλα αίτια. Ένα τέτοιο αίτιο είναι π.χ. η αυτεπαγωγή. Έτσι, στην περίπτωση που στο κύκλωμα υπάρχει πηνίο, λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου ηλεκτρεγερτική δύναμη που εμποδίζει τη μεταβολή του ρεύματος μέσα στο κύκλωμα. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και όταν το κύκλωμα περιέχει πυκνωτή. Τα φορτία που έχουν συγκεντρωθεί στους οπλισμούς αντιστέκονται στη συσσώρευση και άλλων φορτίων, δηλαδή στην αύξηση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Με άλλα λόγια, όταν σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος περιέχεται πηνίο ή πυκνωτής, τότε αυτό με τη συμπεριφορά του «φρενάρει» τη μεταβολή της έντασης του ρεύματος. Ακριβώς για να χαρακτηρίσουμε τις δυσκολίες που συναντούν τα ηλεκτρόνια σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με αντίσταση, πηνίο, πυκνωτή ή συνδυασμούς τους, ορίζουμε ένα καινούργιο φυσικό μέγεθος που λέγεται **εμπέδηση** (impedance)*.

* Στην Ελληνική βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και ο όρος «σύνθετη αντίσταση».

Ορίζουμε ως εμπέδηση Z ενός κυκλώματος εναλλασσόμενου ρεύματος το πηλίκο:

$$Z = \frac{V_o}{I_o} \quad (7.23)$$

όπου V_o το πλάτος της τάσης και I_o το πλάτος της έντασης. Αν αντί του πλάτους χρησιμοποιήσουμε την ενεργό τιμή της τάσης και της έντασης, η (7.23) γράφεται:

$$Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} \quad (7.24)$$

Η εξίσωση (7.24) είναι σε πλήρη αναλογία με το νόμο του Ohm. Αν η τάση μετριέται σε Volt και η ένταση σε Ampere, τότε η εμπέδηση Z μετριέται σε Ohm.

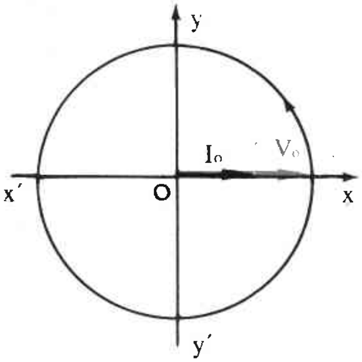
Μελέτη κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος

Ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος εκτός από ωμική αντίσταση είναι δυνατό να περιέχει πηνίο ή πυκνωτή ή και τα δυο. Γιαυτό στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε διεξοδικά τη συμπεριφορά κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος, στα οποία περιέχονται ένα, δύο, ή τρία από τα παραπάνω στοιχεία.

7.7. Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με ωμική αντίσταση.

Όπως είδαμε στην §7.3 αυτού του κεφαλαίου, η ωμική αντίσταση συμπεριφέρεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο στο συνεχές και στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Και στις δυο περιπτώσεις το ρεύμα δίνεται από το νόμο του Ohm. Έτσι, αν σε μια αντίσταση εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V = V_o ημωt$, αυτή διαρρέεται από ρεύμα $I = I_o ημωt$.

Μπορούμε να παραστήσουμε την τάση και την ένταση με τη βοήθεια περιστρεφομένων ανυσμάτων μέτρου V_o και I_o αντίστοιχα, σχ. 7.11. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το άνυσμα της τάσης V_o βρίσκεται πάνω στον άξονα xx΄, την ίδια χρονική στιγμή το άνυσμα I_o θα βρίσκεται πάνω στον ίδιο άξονα, δεδομένου ότι το ρεύμα και η τάση είναι συμφασικά μεγέθη. Για κάθε άλλη χρο-



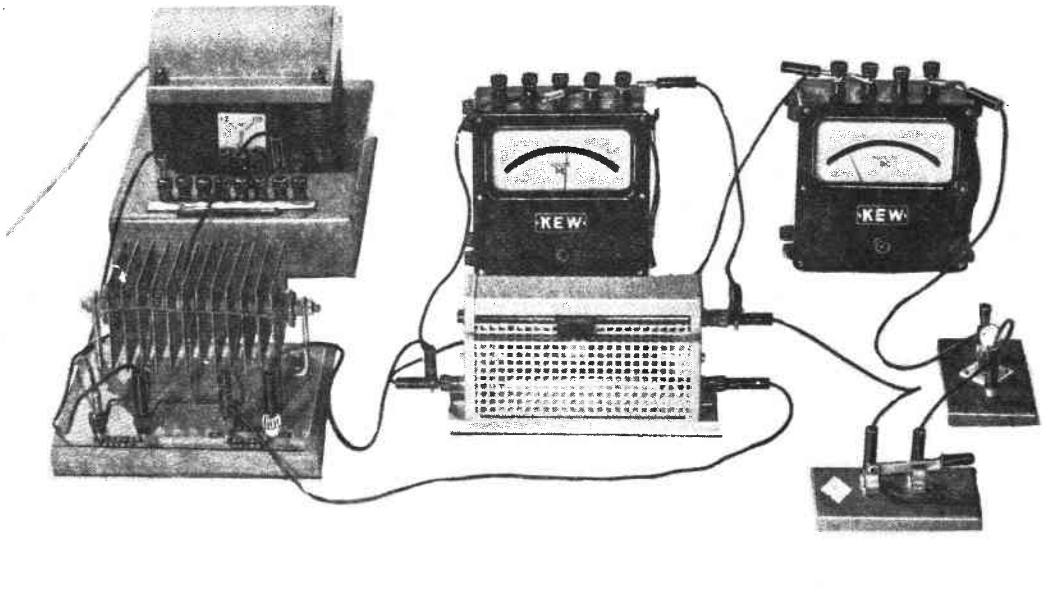
Σχ. 7.11. Διανυσματική παράσταση τάσης και έντασης σε ωμική αντίσταση.

νική στιγμή θα σχηματίζουν με τον ημιάξονα Οx την ίδια γωνία φ=ωt και η προβολή τους στον άξονα yy΄ θα έχει τιμές: $V=V_o ημωt$ και $I=I_o ημωt$.

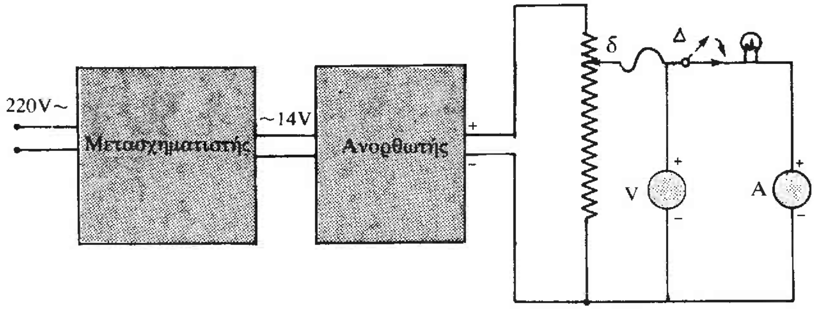
Η εμπέδηση ενός κυκλώματος που περιέχει μόνο ωμικές αντιστάσεις ισούται με το άθροισμά τους, επειδή απ' αυτές προέρχεται η δυσκολία στην κίνηση των ηλεκτρονίων. Το ίδιο προκύπτει και από τη σχέση $I_o = V_o/R$. Αν τη μετασχηματίσουμε σε $V_o/I_o = R$ και θυμηθούμε ότι η εμπέδηση ορίζεται ως $Z = V_o/I_o$ προκύπτει $Z = R$.

Μπορούμε να δείξουμε πειραματικά ότι η ωμική αντίσταση συμπεριφέρεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο στο συνεχές και στο εναλλασσόμενο ρεύμα, χρησιμοποιώντας ως αντίσταση R ένα μικρό ηλεκτρικό λαμπτήρα και κατάλληλες πειραματικές διατάξεις.

Η αντίσταση του λαμπτήρα στο συνεχές ρεύμα μετριέται, χωρίς μεγάλη ακρίβεια, με τη βοήθεια του κυκλώματος του σχ. 7.12.



Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.12.

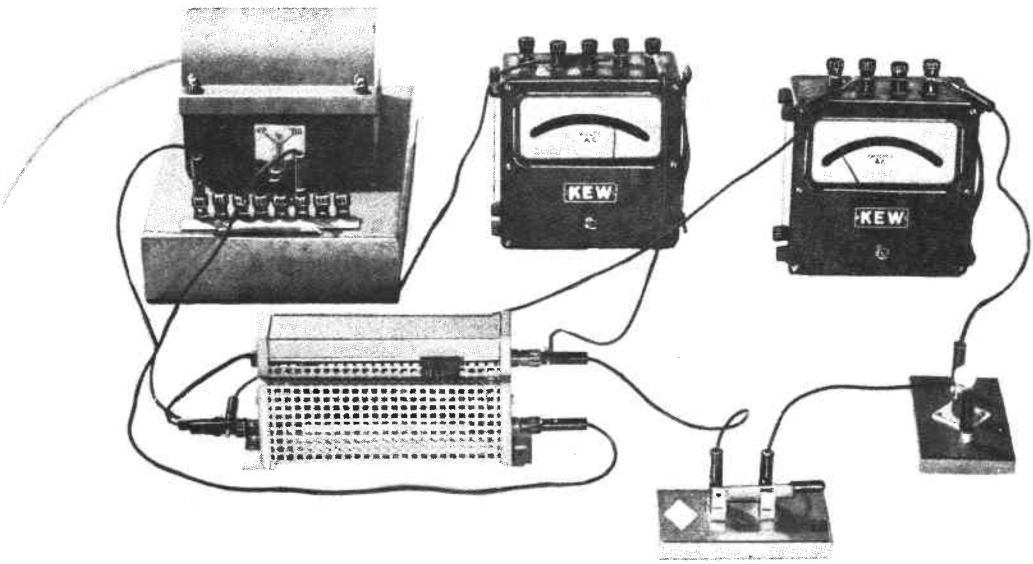


Σχ. 7.12.

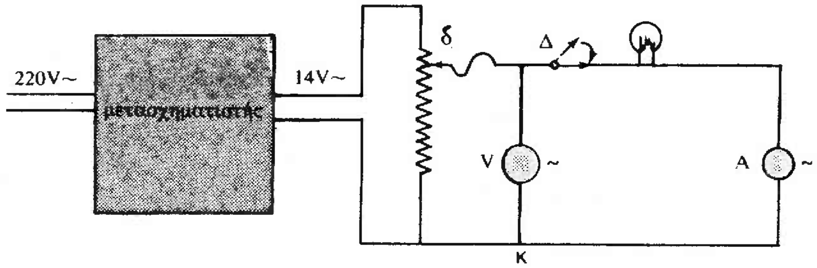
Αν η ένδειξη του βολτομέτρου είναι V και του αμπερομέτρου I, τότε η ωμική αντίσταση του λαμπτήρα είναι:

$$R = \frac{V}{I}$$

Η αντίσταση του λαμπτήρα στο εναλλασσόμενο ρεύμα θα υπολογιστεί με τη βοήθεια του κυκλώματος του σχ. 7.13.



Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.13.



Σχ. 7.13.

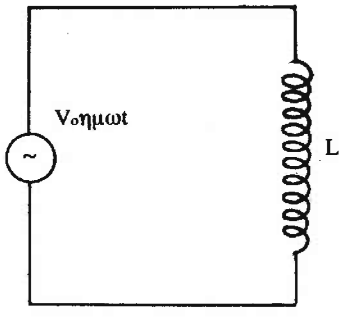
Από τις ενδείξεις του βολτομέτρου και του αμπερομέτρου βρίσκουμε:

$$Z=\frac{V_{εν}}{I_{εν}}$$

Το πείραμα δείχνει ότι η εμπέδηση Z ισούται με την ωμική αντίσταση, δηλαδή Z=R.

7.8. Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο

Στα άκρα ενός πηνίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V=V_oημωt$



Σχ. 7.14.

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του στο εναλλασσόμενο ρεύμα, θα θεωρήσουμε ότι η ωμική του αντίσταση είναι πολύ μικρή και το ποσό της ηλεκτρικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα είναι ασήμαντο. Ένα τέτοιο πηνίο ονομάζεται ιδανικό.

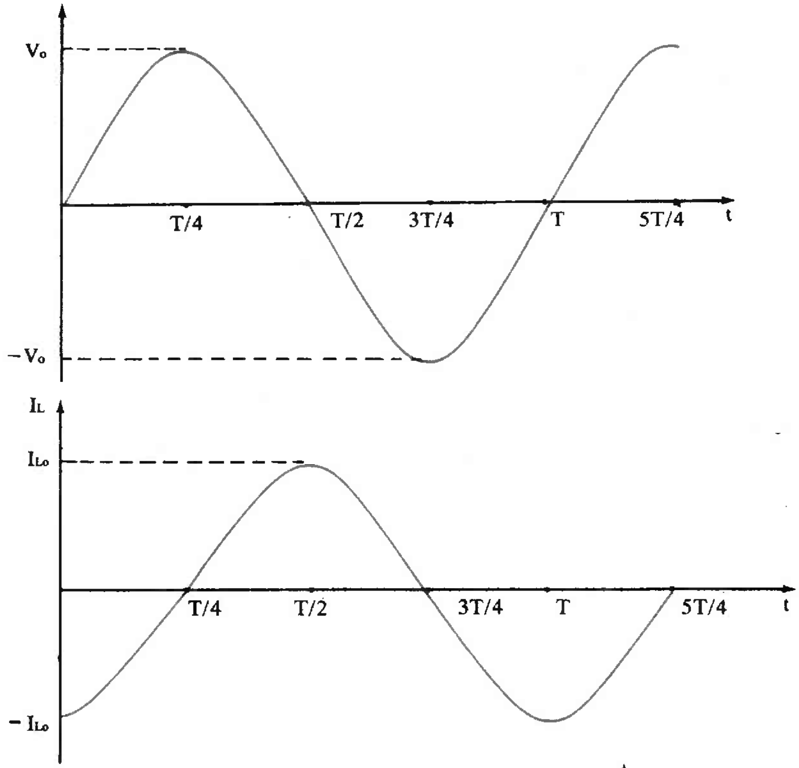
Το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα που, όπως μπορεί να αποδειχθεί, η έντασή του. I_L μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, έχει με την τάση την ίδια κυκλική συχνότητα ω και η φάση της υστερεί της φάσης της τάσης κατά π/2. Η σχέση που την περιγράφει είναι:

$$I_L=I_{Lo}ημ(ωt-\frac{π}{2}) \qquad (7.24)$$

Διαφορά φάσης π/2 μεταξύ της τάσης και της έντασης σημαίνει ότι, αν τη

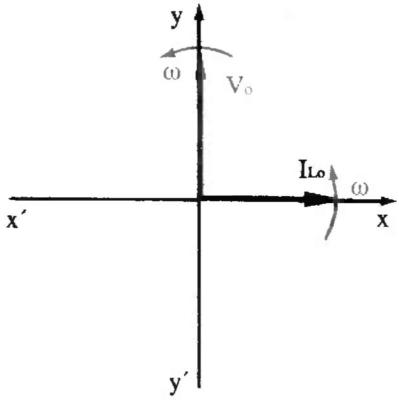
χρονική στιγμή t η τάση έχει τη μέγιστη τιμή της, για να πάρει και η ένταση την αντίστοιχη μέγιστη τιμή της πρέπει να περάσει χρόνος ίσος με T/4, δεδομένου ότι σε φάση 2π αντιστοιχεί χρόνος μιας περιόδου T.

Στο σχήμα 7.15 έχουν παρασταθεί γραφικά οι εξισώσεις της τάσης V και της έντασης I_L του ρεύματος στο πηνίο του σχήματος 7.14.



Σχ. 7.15

Η τάση και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο παριστάνονται με περιστρεφόμενα διανύσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.16.



Σχ. 7.16.

Η δυσκολία που προκαλεί η δράση της αυτεπαγωγής στην κίνηση των ηλεκτρονίων, και συνεπώς στη μεταβολή του ρεύματος, είναι ανάλογη προς τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος. Αυτό δικαιολογείται, αν σκεφτούμε ότι η συχνότητα εκφράζει τον

αριθμό των πλήρων εναλλαγών του ρεύματος στη μονάδα του χρόνου. Όταν η συχνότητα είναι μεγάλη, οι εναλλαγές είναι πολύ γρήγορες και συνεπώς η τάση από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται είναι επίσης μεγάλη. Αποδεικνύεται ότι η εμπέδηση ενός κυκλώματος που περιέχει ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L είναι

$$Z_L = \frac{V_o}{I_{Lo}} \quad ή \quad \boxed{Z_L = L\omega} \qquad (7.25)$$

Η Z_L λέγεται επίσης και **επαγωγική αντίσταση.** Από τη σχέση (7.25) προκύπτει ότι η ενεργός τιμή της έντασης που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$I_{εν} = \frac{I_{Lo}}{\sqrt{2}} = \frac{V_o}{\sqrt{2}L\omega} = \frac{V_{εν}}{L\omega} \qquad (7.26)$$

όπου $V_{εν}$ η ενεργός τιμή της τάσης στα άκρα του πηνίου. Από τη σχέση (7.26) προκύπτει ότι το ρεύμα $I_{εν}$ μειώνεται, όταν αυξάνει η συχνότητα του ρεύματος. Έτσι, όταν η συχνότητα γίνεται μεγάλη, η ένταση του ρεύματος γίνεται πρακτικά μηδέν. Το γεγονός αυτό βρίσκει εφαρμογή στα **αποπνικτικά** πηνία που χρησιμοποιούνται για την εξουδετέρωση ρευμάτων πολύ υψηλής συχνότητας, όπως π.χ. στους ραδιοφωνικούς πομπούς.

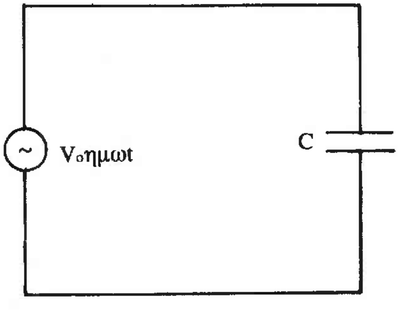
Όπως αναφέραμε, η ωμική αντίσταση του ιδανικού πηνίου είναι μηδέν. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ηλεκτρική ενέργεια που προσφέρεται σ' αυτό να μετασχηματίζεται σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο χώρο του πηνίου. Η μαγνητική επαγωγή αυτού του πεδίου είναι μεταβαλλόμενη περιοδικά, δηλαδή αλλάζει φορά σύμφωνα με την τιμή και τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

1993

7.9. Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή

Ο πυκνωτής στο σχήμα 7.17 έχει χωρητικότητα C και στους οπλισμούς του εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση

$$V = V_o ημωt \qquad (7.27)$$



Σχ. 7.17.

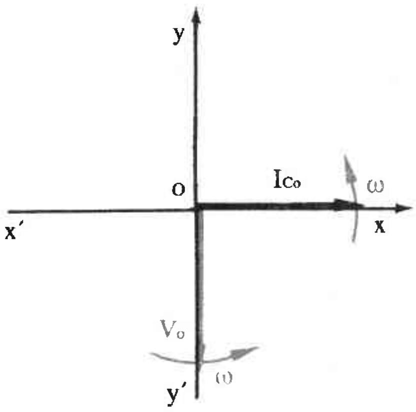
Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ένταση I_C του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου της ίδιας κυκλικής συχνότητας με τη συχνότητα της τάσης και η φάση της προηγείται της τάσης κατά π/2. Δηλαδή ισχύει:

$$I_C = I_{Co} ημ(\omega t + \pi/2) \qquad (7.28)$$

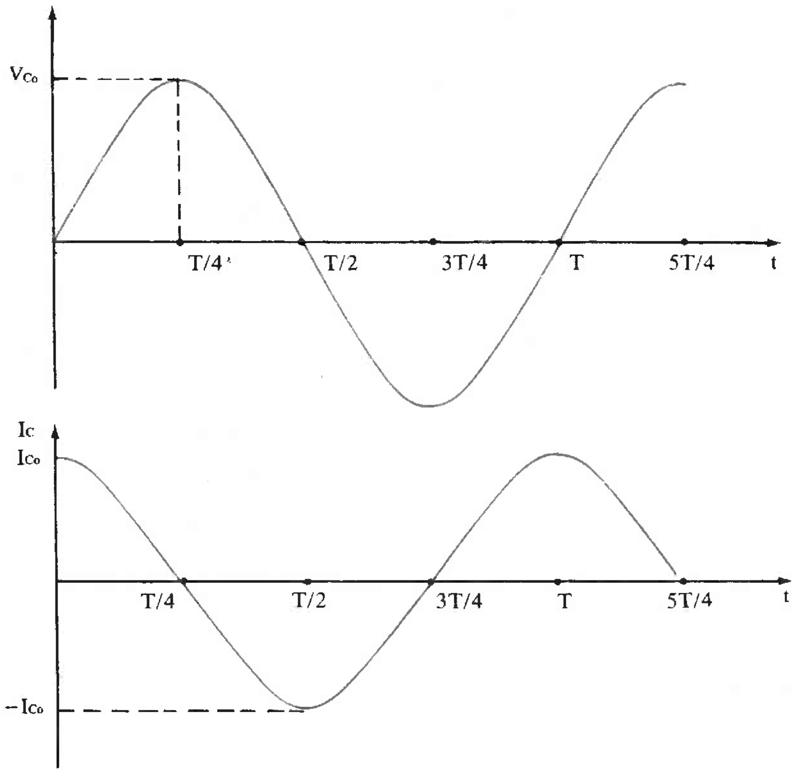
Η τάση στα άκρα του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι μεγέθη που μεταβάλλονται αρμονικά και μπορούν να παρασταθούν από περιστρεφόμενα διανύσματα, σχήμα 7.18.

Οι εξισώσεις (7.27) και (7.28) έχουν παρασταθεί γραφικά στο σχήμα 7.19.

Από τις καμπύλες του σχήματος μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ρεύμα προηγείται χρονικά της τάσης κατα T/4, π.χ. τη στιγμή t=0 το ρεύμα έχει την μεγίστη τιμή, ενώ η τάση είναι μηδέν.



Σχ. 7.18.



Σχ. 7.19.

Γνωρίζουμε ότι, για να φορτιστεί ένας πυκνωτής χωρητικότητας C σε τάση V, πρέπει να κινηθεί προς τους οπλισμούς του φορτίο Q=CV. Όταν στούς οπλι-

σμούς εφαρμόζεται εναλασσόμενη τάση, ο πυκνωτής θα φορτίζεται και θα εκφορτίζεται στη διάρκεια κάθε ημιπεριόδου. Έτσι, αναφερόμενοι στο σχήμα 7.19, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι από μηδέν ως T/4 ο πυκνωτής φορτίζεται, ενώ από T/4 ως T/2 εκφορτίζεται. Στη συνέχεια (T/2, 3T/4) ο πυκνωτής φορτίζεται αντίθετα και εκφορτίζεται (3T/4, T). Όταν η συχνότητα του ρεύματος είναι μεγάλη, τα φορτία που κινούνται προς τους οπλισμούς ή απομακρύνονται απ' αυτούς κινούνται με μεγάλη ταχύτητα και συνεπώς η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι μεγάλη.

Επειδή τα φορτία που θα κινηθούν για να φορτίσουν τον πυκνωτή, ή θα απομακρυνθούν απ' αυτόν κατά την εκφόρτιση, είναι ανάλογα προς τη χωρητικότητα C, το ρεύμα που θα διαρρέει το κύκλωμα θα είναι επίσης ανάλογο προς τη χωρητικότητα C.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του πυκνωτή είναι:

$$\boxed{I_{εν} = V_{εν} \omega C} \qquad (7.29)$$

όπου $V_{εν}$ η ενεργός τιμή της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πυκνωτή, ω η κυκλική συχνότητα του ρεύματος και C η χωρητικότητα του πυκνωτή. Από τη σχέση (7.29) προκύπτει ότι η εμπέδηση του πυκνωτή είναι:

$$Zc = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{V_o}{Ic_o} = \frac{1}{\omega C}$$

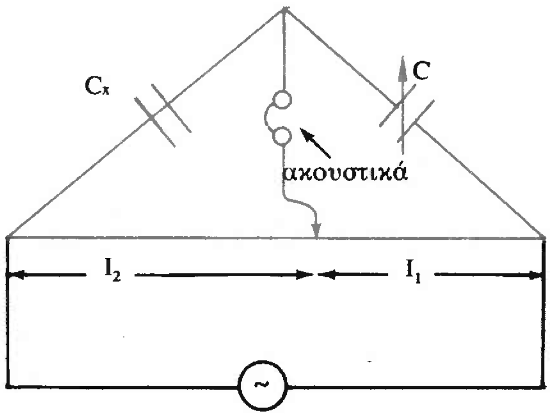
$$\text{ή} \quad \boxed{Zc = \frac{1}{\omega C}} \qquad (7.30)$$

Από τη σχέση (7.30) φαίνεται ότι η εμπέδηση του πυκνωτή είναι αντίστροφα ανάλογη προς τη συχνότητα. Έτσι τα ρεύματα υψηλής συχνότητας διαρρέουν εύκολα το κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει πυκνωτή, ενώ τα ρεύματα χαμηλής συχνότητας συναντούν μεγάλη αντίσταση. Ειδικά για το συνεχές ρεύμα, για το οποίο ω=0, η εμπέδηση του πυκνωτή γίνεται άπειρη και η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται. Η Zc ονομάζεται επίσης και **χωρητική αντίσταση.**

1996

7.10. Μέτρηση χωρητικότητας με τη χρήση της γέφυρας Wheatstone

Η άγνωστη χωρητικότητα ενός πυκνωτή μπορεί να μετρηθεί με τη διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα 7.20. Ο πυκνωτής C είναι μεταβλητός και κατασκευασμένος κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να γνωρίζουμε τη χωρητικότητά του.



Σχ. 7.20.

Για μια τυχαία θέση του δρομέα δ, από τα ακουστικά ακούγεται ένας ήχος. Όταν μετακινούμε το δρομέα δ, η ένταση του ήχου μεταβάλλεται και για ορισμένη θέση μηδενίζεται. Τότε από τα ακουστικά δε διέρχεται ρεύμα και η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία. Σε αναλογία με τη σχέση (5.19) θα ισχύει:

$$\frac{Z_x}{Z} = \frac{l_2}{l_1} \qquad (7.31)$$

όπου Z_x και Z οι χωρητικές αντιστάσεις των πυκνωτών C_x και C αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας στη σχέση

$Z_x = \dfrac{1}{C_x\omega}$ και $Z = \dfrac{1}{C\omega}$ έχουμε

$$\frac{C}{C_x} = \frac{l_2}{l_1}$$

ή

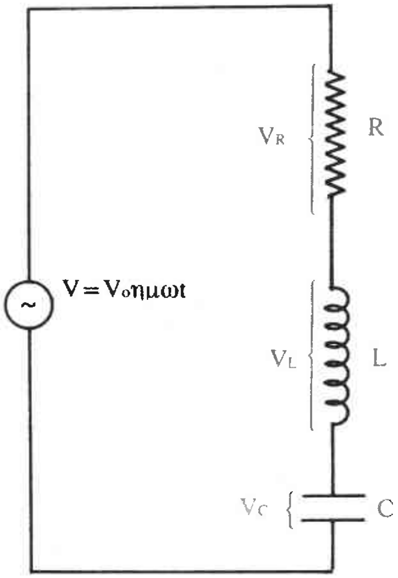
$$\boxed{C_x = C\frac{l_1}{l_2}} \qquad (7.32)$$

Από τη σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε την άγνωστη χωρητικότητα C_x σε συνάρτηση με τη γνωστή χωρητικότητα C και τα μήκη l_1, l_2 τα οποία μπορεί να μετρηθούν εύκολα.

1990-1992

7.11. Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με ωμική, επαγωγική και χωρητική αντίσταση σε σειρά

Έστω ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει ωμική αντίσταση R, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C, συνδεμένα σε σειρά, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.21. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται η εναλλασσόμενη τάση



Σχ. 7.21.

$$V = V_o \eta\mu\omega t$$

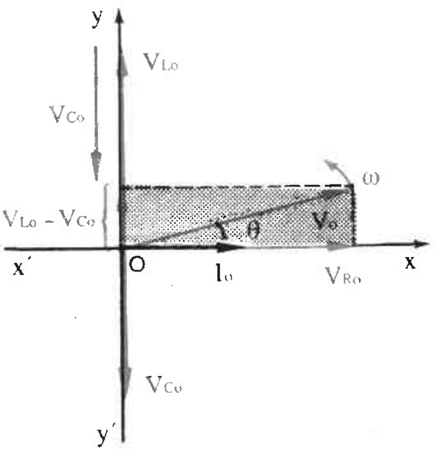
Το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, του οποίου η ένταση I αποδεικνύεται, ότι δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{I = I_o \eta\mu(\omega t - \theta)} \qquad (7.33)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, έχει την ίδια κυκλική συχνότητα με την τάση και παρουσιάζει διαφορά φάσης θ σε σχέση με την τάση.

Η εμπέδηση Z του κυκλώματος υπολογίζεται ως εξής: Επειδή η αντίσταση, το πηνίο και ο πυκνωτής είναι συνδεμένα σε σειρά, θα διαρρέονται κάθε χρονική στιγμή από το ίδιο ρεύμα που δημιουργεί στα άκρα τους τάσεις V_R, V_L και V_C αντίστοιχα.

Η τάση V_R θα είναι σε φάση με την ένταση I του ρεύματος, η τάση V_L θα προηγείται κατά π/2 ενώ η V_C θα υστερεί κατά π/2. Το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων εικονίζεται στο σχήμα 7.22. Σε κάποια χρονική στιγμή το άνυσμα $\vec{I_o}$ του πλάτους της έντασης θα συμπίπτει με τον ημιάξονα Ox, ενώ την ίδια χρονική στιγμή το άνυσμα $\vec{V_{Ro}}$ θα βρίσκεται στον ίδιο ημιάξονα. Το



Σχ. 7.22. Ανυσματικό διάγραμμα τάσεων

ανυσμα $\vec{V}_{Lo}$ της τάσης στο πηνίο προηγείται κατά π/2 και συμπίπτει με τον ημιάξονα Oy, ενώ το άνυσμα της τάσης στον πυκνωτή $\vec{V}_{Co}$ υστερεί κατα π/2 και συμπίπτει με τον ημιάξονα Oy΄. Η συνισταμένη των τριών ανυσμάτων $\vec{V}_{Ro}$, $\vec{V}_{Lo}$, $\vec{V}_{Co}$ ισούται με το άνυσμα $\vec{V}_o$ που αντιστοιχεί στην εφαρμοζόμενη ημιτονοειδή τάση. Από το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων, σχήμα 7.22, προκύπτει ότι:

$$V_o = \sqrt{V_{Ro}^2 + (V_{Lo} - V_{Co})^2} \qquad (7.34)$$

Επειδή $V_{Ro} = I_o R$, $V_{Lo} = I_o \omega L$, $V_{Co} = I_o \frac{1}{\omega C}$, η σχέση (7.34) γράφεται

$$V_o = I_o \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

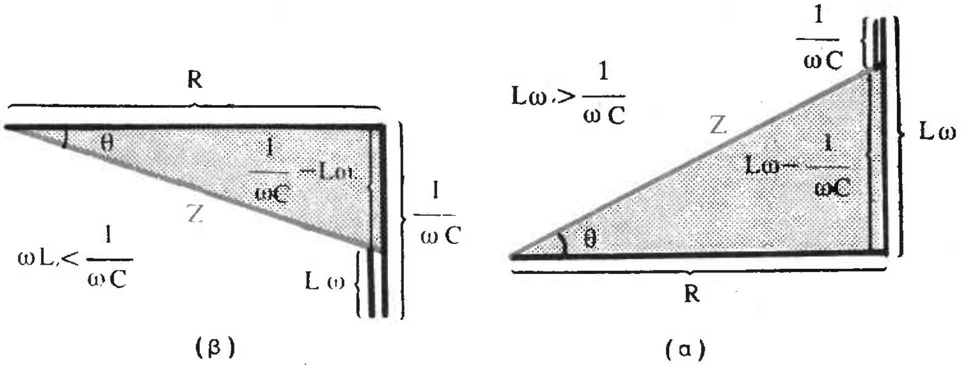
ή

$$\frac{V_o}{I_o} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (7.35)$$

Η εμπέδηση Z του κυκλώματος σύμφωνα με τον ορισμό είναι $Z = \frac{V_o}{I_o}$, οπότε από τη σχέση (7.35) προκύπτει ότι η εμπέδηση του κυκλώματος που μελετάμε είναι:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad (7.36).$$

Από την εξίσωση (7.36) προκύπτει ότι η εμπέδηση του κυκλώματος μπορεί να θεωρηθεί σαν το μέτρο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι η ωμική αντίσταση R και η άλλη η διαφορά $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ σχ. 7.23.



Σχ. 7.23.

Η διαφορά φάσης μεταξύ της εφαρμοζόμενης ημιτονοειδούς τάσης και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα υπολογίζεται από τα τρίγωνα στο σχήμα 7.23.

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (7.37)$$

Μπορούμε να διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) όταν $L\omega > \frac{1}{\omega C}$ η γωνία θ είναι θετική και το ρεύμα υστερεί ως προς την τάση κατά θ, δηλαδή $I = I_o\eta\mu(\omega t - \theta)$ και

β) όταν $L\omega < \frac{1}{\omega C}$, οπότε η θ είναι αρνητική και το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά θ, δηλαδή $I = I_o\eta\mu(\omega t + \theta)$.

Παρατήρηση: Στο συνεχές ρεύμα η τάση που εφαρμόζεται κατανέμεται αναλογικά στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος. Έτσι προσθέτοντας όλες τις επιμέρους τάσεις βρίσκουμε τη συνολική τάση. Στο εναλλασσόμενο ρεύμα μπορούμε να προσθέσουμε αριθμητικά μόνο τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων. Τα πλάτη και οι ενεργές τιμές των τάσεων προστίθενται σαν διανύσματα και λαμβάνεται υπόψη η διαφορά φάσης.

Παράδειγμα

Ένα κύκλωμα αποτελείται από πηνίο αυτεπαγωγής L=0,1H, αμελητέας εσωτερικής αντίστασης, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C=10mF, μια αντίσταση R=10Ω που όλα είναι συνδεμένα σε σειρά με μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης V=141ημ314t Volt.

1. Υπολογίστε:

α) Την ενεργό τιμή της τάσης της πηγής και τη συχνότητά της.

β) Την εμπέδηση του κυκλώματος

γ) Την ενεργό τιμή και το πλάτος της έντασης

δ) Τη διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης και έντασης

ε) Την ενεργό τιμή της τάσης στην αντίσταση, στο πηνίο και στον πυκνωτή

στ) Τη διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης της πηγής και της τάσης στην αντίσταση, τον πυκνωτή και το πηνίο.

2. Γράψτε τις εξισώσεις της τάσης στην αντίσταση, στο πηνίο και τον πυκνωτή.

α) $V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{141}{1,41}$ Volt=100 Volt

$2\pi\nu = 314 \Rightarrow \nu = 50Hz$

β) Με αντικατάσταση στη σχέση 7.36 προκύπτει

$$Z = \sqrt{10^2 + (314\cdot 0,1 - \frac{1}{10\cdot 10^{-3}314})^2}\,\Omega = 32,57\Omega$$

γ) $I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{100}{32,57}A = 3,07A$

$I_o = I_{\varepsilon\nu}\sqrt{2} = 3,07\cdot 1,41A = 4,33A$

δ) Εξάλλου με αντικατάσταση στη σχέση (7.37) προκύπτει

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{0,1\cdot 314 - \frac{1}{10\cdot 10^{-3}314}}{10} = 3,108$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκεται ότι η γωνία θ είναι περίπου 72°. Συνεπώς η τάση της πηγής προηγείται της έντασης κατά 72°.

ε) Η ενεργός τιμή της τάσης στην αντίσταση είναι $V_{R\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu}R$

στον πυκνωτή $V_{C\varepsilon\nu}=I_{\varepsilon\nu}\frac{1}{\omega C}$

και στο πηνίο $V_{L\varepsilon\nu}=I_{\varepsilon\nu}L\omega$.

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$V_{R\varepsilon\nu}=3{,}07\cdot 10\,\text{Volt}=30{,}7\ \text{Volt}$

$$V_{C\varepsilon\nu}=3{,}07\frac{1}{10\cdot 10^{-3}314}\ \text{Volt}=0{,}97\text{Volt}$$

$V_{L\varepsilon\nu}=3{,}07\cdot 0{,}1\cdot 314\ \text{Volt}=\ 96{,}4\ \text{Volt}$.

στ) Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία θ στο σχήμα 7.22 είναι 72°, προκύπτει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης στην πηγή και τάσης στην αντίσταση είναι 72°. Επίσης η τάση στο πηνίο προηγείται της τάσης της πηγής κατά 18°, ενώ η τάση στον πυκνωτή υστερεί κατά 162°.

2) Τα πλάτη των τάσεων στην αντίσταση, το πηνίο και τον πυκνωτή είναι αντίστοιχα

$V_{Ro}=V_{R\varepsilon\nu}\sqrt{2}=30{,}7\cdot 1{,}41\text{Volt}\ =\ 43{,}3\text{Volt}$

$V_{Lo}=V_{L\varepsilon\nu}\sqrt{2}=96{,}4\cdot 1{,}41\text{Volt}=136\text{Volt}$

$V_{Co}=V_{C\varepsilon\nu}\sqrt{2}=0{,}97\cdot 1{,}41\text{Volt}=1{,}36\text{Volt}$.

Επειδή η φάση μετριέται σε rad, πρέπει οι διαφορές φάσεις να μετατραπούν και αυτές σε rad. Δεδομένου ότι 2πrad=360°, βρίσκουμε ότι:

18°=0,314rad

72°=1,256rad

162°=2,826rad

Οι εξισώσεις των τάσεων είναι:

$V_R=43{,}3\eta\mu\ (314t-1{,}256)\ \text{Volt}$

$V_L=136\eta\mu(314t+0{,}314)\ \text{Volt}$

$V_C=1{,}36\eta\mu\ (314t-2{,}826)\text{Volt}$.

1987

7.12. Συντονισμός σε κύκλωμα R L C σε σειρά

Από τον τύπο (7.35) προκύπτει ότι το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του σχ. 7.21 είναι

$$I_o=\frac{V_o}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{V_o}{Z} \qquad (7.38)$$

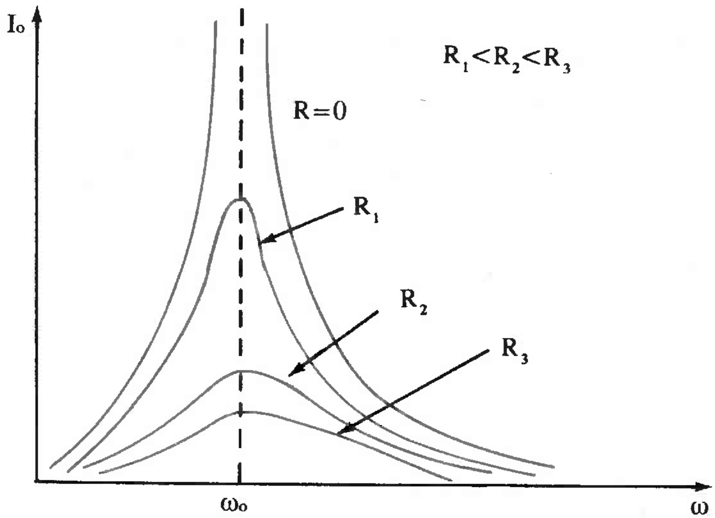
Από τη σχέση (7.38) φαίνεται ότι το πλάτος της έντασης είναι ανάλογο προς το πλάτος της εφαρμοζόμενης τάσης και εξαρτάται από την κυκλική της συχνότητα. Έτσι, αν διατηρήσουμε τα άλλα μεγέθη της σχέσης (7.38) σταθερά και μεταβάλουμε μόνο το ω, τότε για μια ορισμένη τιμή του, έστω ω_o, θα ισχύει

$$\boxed{\omega_o L=\frac{1}{\omega_o C}} \qquad (7.39)$$

Τότε, όπως προκύπτει από τη σχέση (7.38), το πλάτος του ρεύματος γίνεται μέγιστο και ίσο με $I_o = \frac{V_o}{R}$, (7.40)

Επίσης η εμπέδηση του κυκλώματος γίνεται ίση με την ωμική αντίσταση R και η διαφορά φάσης θ, όπως φαίνεται από τη σχέση, (7.37) γίνεται ίση με μηδέν. Όταν σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά ισχύει η σχέση (7.39), τότε η εμπέδηση ισούται με την ωμική αντίσταση, το πλάτος της έντασης του ρεύματος γίνεται μέγιστο και η τάση είναι συμφασική με το ρεύμα. Η κατάσταση αυτή του κυκλώματος ονομάζεται **συντονισμός**, διότι το αίτιο (τάση) και το αποτέλεσμα (ρεύμα), συμμεταβάλλονται. Επιπλέον το αποτέλεσμα (ρεύμα) έχει μεγιστοποιηθεί.

Στην ιδανική περίπτωση που η ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι μηδέν, όπως προκύπτει από τη σχέση 7.38, η ένταση του ρεύματος γίνεται άπειρη κατά το συντονισμό.



Σχ. 7.24. Η αύξηση του πλάτους της έντασης κατά το συντονισμό εξαρτάται από την αντίσταση R

Επειδή δεν υπάρχει ιδανικό πηνίο και επιπλέον οι αγωγοί σύνδεσης έχουν πάντοτε έστω και μικρή ωμική αντίσταση, η ένταση του ρεύματος δεν απειρίζεται, αλλά παίρνει μέγιστη τιμή κατά το συντονισμό.

Η τιμή της κυκλικής συχνότητας, για την οποία μεγιστοποιείται το πλάτος I_o, ονομάζεται κυκλική ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος, και, όπως προκύπτει από τη σχέση (7.39), ισούται με:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (7.41)$$

Η συχνότητα και η περίοδος που αντιστοιχούν στην ω_o ονομάζονται αντίστοιχα ιδιοσυχνότητα και ιδιοπερίοδος του κυκλώματος RLC σε σειρά και είναι:

$$\boxed{\nu_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \tag{7.42}$$

και

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{LC}} \tag{7.43}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της σχέσης (7.39) με το πλάτος I_o της έντασης του ρεύματος κατά το συντονισμό, έχουμε:

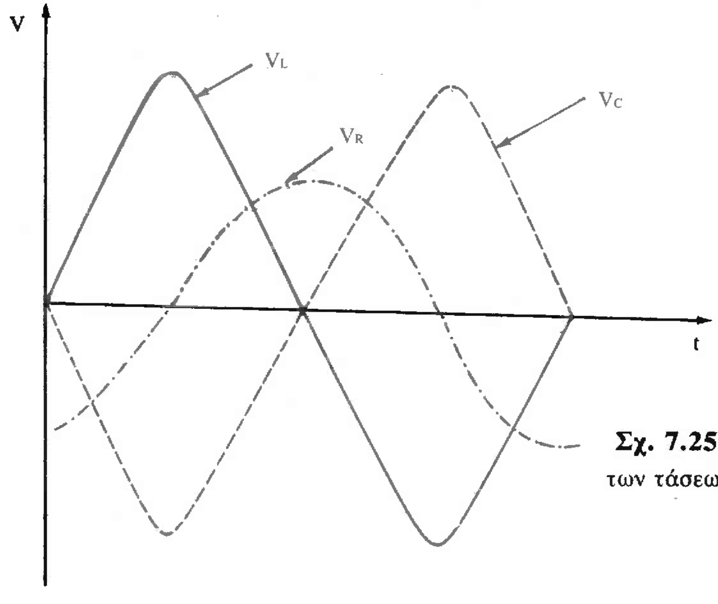
$$I_o\omega_o L = I_o \frac{1}{\omega_o C} \tag{7.44}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της σχέσης δίνει το πλάτος της τάσης στα άκρα του πηνίου και το δεύτερο το πλάτος της τάσης στα άκρα του πυκνωτή.

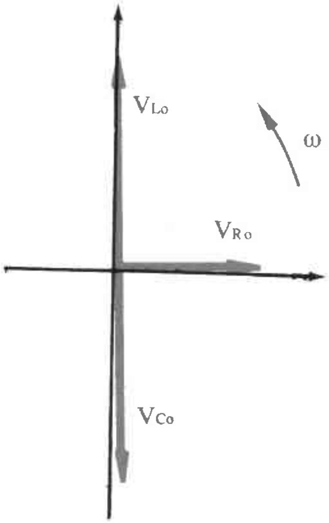
Δηλαδή κατά το συντονισμό ισχύει:

$$V_{Co} = V_{Lo} \tag{7.45}$$

Επειδή, όπως είδαμε, η τάση στο πηνίο προηγείται της τάσης στον πυκνωτή κατά π rad, κατά το συντονισμό, η συνισταμένη των V_{Lo} και V_{Co} στο ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων θα είναι μηδέν, σχ. 7.26. Επίσης οι στιγμιαίες τάσεις V_L και V_C θα είναι αντίθετες (σχ. 7.25).



Σχ. 7.25. Γραφική παράσταση των τάσεων κατά το συντονισμό.



Σχ. 7.26. Ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων κατά το συντονισμό

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 7.25 οι τάσεις V_L και V_C κατά το συντονισμό μπορούν να πάρουν τιμή πολύ μεγαλύτερη από την τάση V_R. Επειδή όμως $V_L = -V_C$ το άθροισμα των τάσεων κατά μήκος του κυκλώματος, σχ. 7.21, θα είναι $V = V_R$, δηλαδή η τάση της πηγής θα ισούται με την τάση στην αντίσταση R.

Παράδειγμα

Σε ένα κύκλωμα R L C δίνεται ότι $R = 1\Omega$, $L = 0{,}2mH$ και ότι ο πυκνωτής C είναι μεταβλητός με ελάχιστη τιμή C_1 και μεγίστη C_2. Η πηγή παρέχει τάση σταθερού πλάτους 10mV και η συχνότητά της μπορεί να μεταβάλλεται. Αν η ελάχιστη συχνότητα συντονισμού είναι $\nu_1 = 0{,}5KHz$ και η μέγιστη $\nu_2 = 1{,}5KHz$, να υπολογιστούν η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της χωρητικότητας του μεταβλητού πυκνωτή

Λύση

Αν λύσουμε τη σχέση (7.42) ως προς C παίρνουμε: $C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2L}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι όταν το ν είναι μέγιστο το C γίνεται ελάχιστο και αντίστροφα.

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα έχουμε:

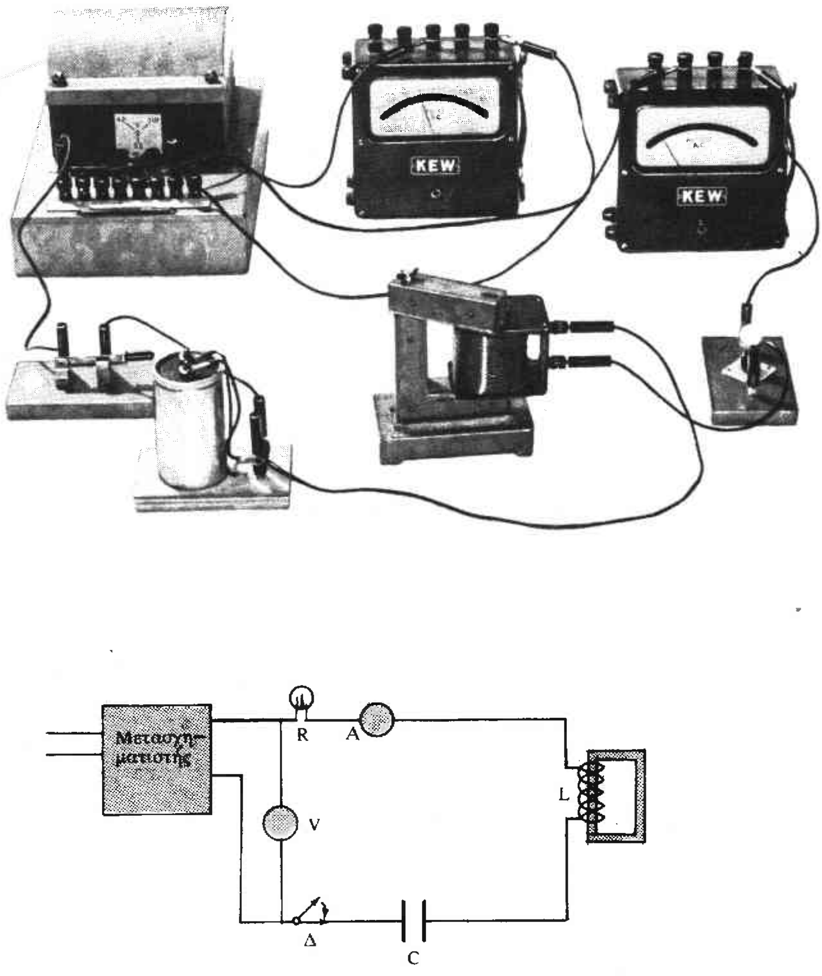
$$C_{ελ.} = \frac{1}{4\pi^2(1{,}5\cdot10^3)^2 0{,}2\cdot10^{-3}}\,F = 5{,}63\cdot10^{-5}F$$

και

$$C_{μεγ.} = \frac{1}{4\pi^2(0{,}5\cdot10^3)^2 0{,}2\cdot10^{-3}}\,F = 5{,}07\cdot10^{-4}F$$

7.13. Πειραματική επίδειξη του συντονισμού

Η επίδειξη του φαινομένου του συντονισμού σε κύκλωμα RLC σε σειρά γίνεται και με τη διάταξη του σχήματος 7.27.



Σχ. 7.27.

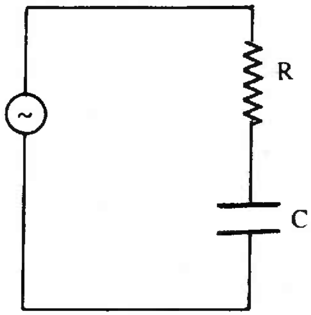
Στρέφοντας σιγά σιγά το βραχύ πυρήνα, ώστε η επαφή του με τον πυρήνα, σχήματος αντεστραμμένου Π, να ελαττώνεται, επιτυγχάνουμε μείωση της αυτεπαγωγής του πηνίου, με αποτέλεσμα να μικραίνει ο παράγοντας ωL. Όταν ο βραχύς πυρήνας έχει πάρει μια ορισμένη θέση, ο λαμπτήρας θα φωτοβολεί πολύ εντονότερα σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη θέση. Σε αυτή τη θέση ο συντελε-

στής αυτεπαγωγής L έχει πάρει τιμή για την οποία ισχύει η συνθήκη του συντονισμού:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

7.14. Μελέτη κυκλώματος RC σε σειρά

Στην περίπτωση που το κύκλωμα του εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από ωμική αντίσταση R και πυκνωτή C, η εμπέδηση υπολογίζεται από τη σχέση (7.36), αν θέσουμε L=0, και είναι:

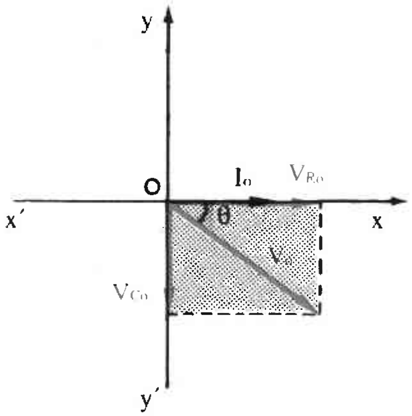


Σχ. 7.28.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (7.46)$$

Η διαφορά φάσης θ μεταξύ τάσης και έντασης βρίσκεται από τη σχέση (7.37), αν θέσουμε L=0, δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (7.47)$$



Σχ. 7.29.

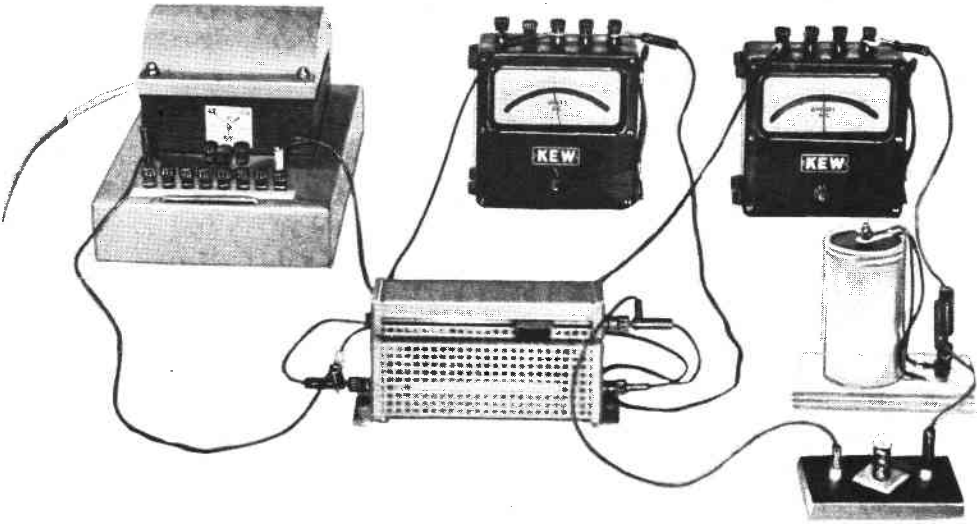
Επειδή η γωνία θ είναι αρνητική, το άνυσμα της έντασης του ρεύματος στο διάγραμμα των τάσεων θα προηγείται του ανύσματος της εφαρμοζόμενης τάσης V_0, κατά θ. Έτσι, αν κάποια χρονική στιγμή το άνυσμα I_0 συμπίπτει με τον ημιάξονα Ox, το άνυσμα V_{R0} θα βρίσκεται στον ίδιο άξονα και το άνυσμα V_{C0} θα βρίσκεται στον ημιάξονα Oy΄.

Με τη βοήθεια αμπερόμετρου και βολτόμετρου μπορούμε να υπολογίσουμε την εμπέδηση Z του κυκλώματος και την ωμική του αντίσταση. Επίσης

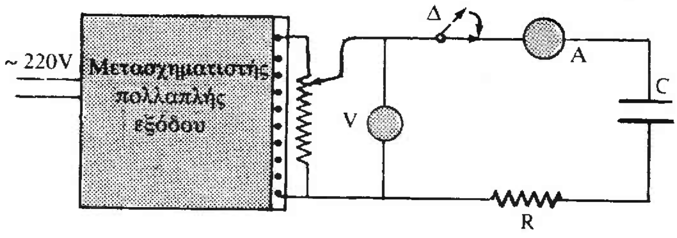
από τη σχέση (7.46) μπορούμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα C του πυκνωτή.

α. Μέτρηση της εμπέδησης

Για να μετρήσουμε τὴν εμπέδηση Z, πραγματοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.30.



Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.30.



Σχ. 7.30.

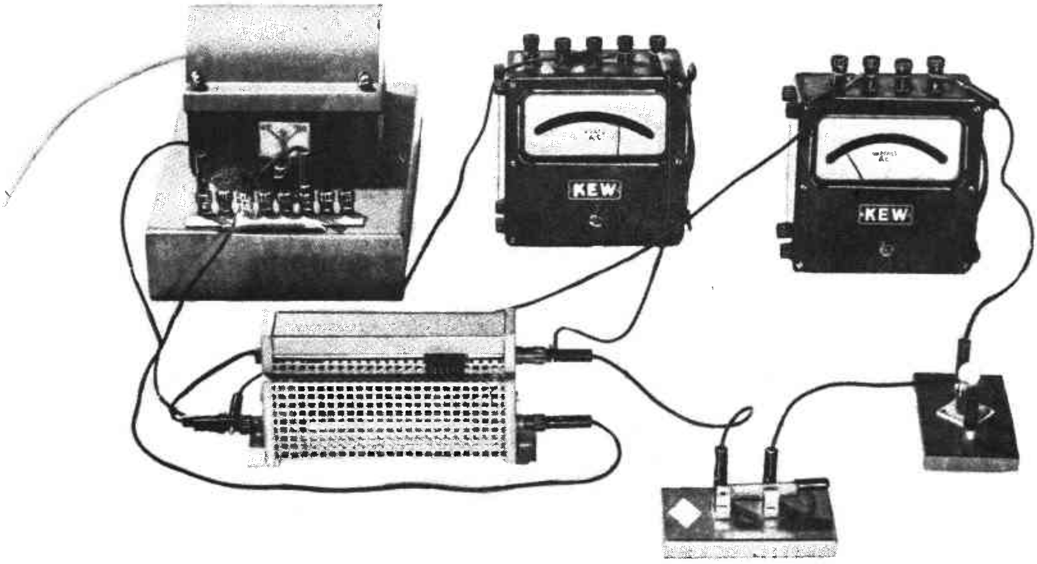
Από τις ενδείξεις του βολτόμετρου και του αμπερόμετρου μπορούμε να υπολογίσουμε την εμπέδηση Z από τη σχέση

$$Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}}$$

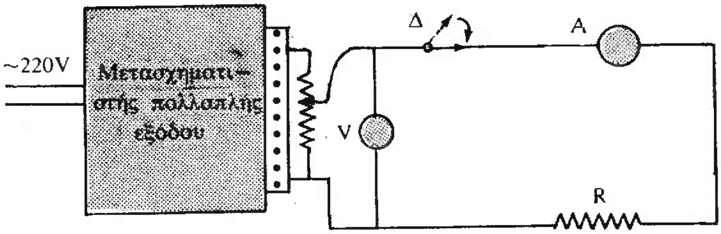
γιατί τα όργανα εναλλασσόμενου ρεύματος μας παρέχουν τις ενεργές τιμές της τάσης ή της έντασης.

β. Υπολογισμός της ωμικής αντίστασης R

Η ωμική αντίσταση του λαμπτήρα υπολογίζεται από τις ενδείξεις του βολτόμετρου και του αμπερόμετρου στο κύκλωμα του σχήματος 7.31



Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.31.



Σχ. 7.31.

γ. Υπολογισμός της χωρητικότητας C.

Η σχέση (7.46) δίνει ότι η χωρητικότητα C ισούται με

$$\boxed{C=\frac{1}{\omega\sqrt{Z^2-R^2}}} \qquad (7.48)$$

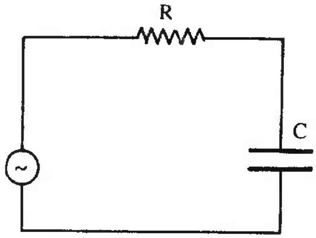
όπου ω η κυκλική συχνότητα της εφαρμοζόμενης εναλλασσόμενης τάσης. Έχοντας υπολογίσει πειραματικά τις τιμές των Z και R, μπορούμε να υπολογίσουμε από τη σχέση (7.48) τη χωρητικότητα C.

Παράδειγμα

Η τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι $V=V_o\eta\mu\omega t$.

α) Υπολογίστε σε συνάρτηση με τα R και C τη συχνότητα, για την οποία η τάση στα άκρα του πυκνωτή καθυστερεί σχετικά με την τάση της πηγής κατά 45°

β) Υπολογίστε το πλάτος της τάσης στα άκρα του πυκνωτή για τη συχνότητα της ερώτησης α.



Λύση

α) Από το διάγραμμα των τάσεων προκύπτει ότι, όταν η τάση στον πυκνωτή καθυστερεί κατά 45° από την τάση της πηγής, τότε

$V_{Co}=V_{Ro}$ ή $I_o\frac{1}{\omega C}=I_oR \Rightarrow \omega=\frac{1}{RC}$

β) Το πλάτος I_o είναι ίσο με $\frac{V_o}{Z}$

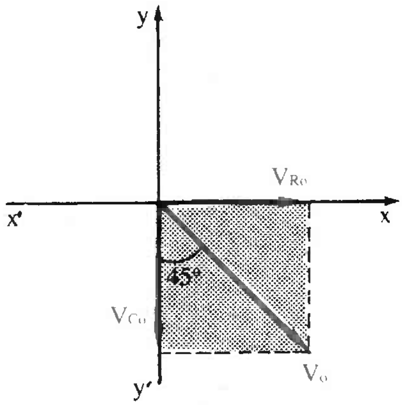
$I_o=\frac{V_o}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C})^2}}$ που για $\omega=\frac{1}{RC}$ δίνει

$I_o=\frac{V_o}{R\sqrt{2}}$.

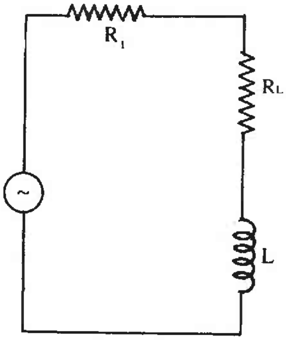
Το πλάτος της τάσης στα άκρα του πυκνωτή θα είναι:

$V_{Co}=I_o\frac{1}{\omega C}=\frac{V_o}{R\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{1}{RC}C}=\frac{V_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$V_{Co}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}$.



7.15. Μελέτη κυκλώματος RL σε σειρά

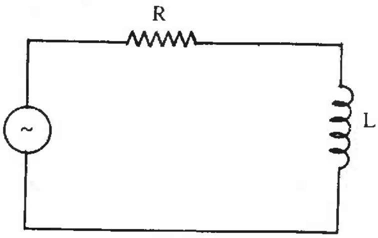


Σχ. 7.32.

Έστω ένα κύκλωμα που αποτελείται από πηνίο αυτεπαγωγής L με ωμική αντίσταση R_L και από αντίσταση R_1, σχήμα 7.32.

Η συνολική ωμική αντίσταση R του κυκλώματος ισούται με το άθροισμα της R_1 και της R_L, δηλαδή $R = R_1 + R_L$.

Μπορούμε συνεπώς να υπολογίσουμε την εμπέδηση Z του κυκλώματος θεωρώντας ότι αυτό αποτελείται από αντίσταση R και αυτεπαγωγή L, σχήμα 7.33.

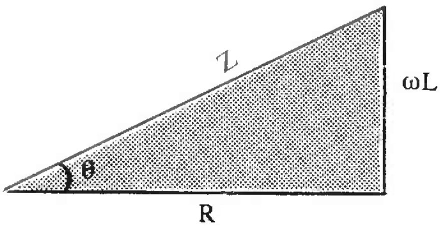


Σχ. 7.33.

Η εμπέδηση Z θα υπολογιστεί ως υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου που έχει πλευρές R και ωL. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος 7.23 θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει χωρητική αντίσταση, τότε αυτό παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 7.34.

Από το τρίγωνο υπολογίζουμε ότι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{7.49}$$



Σχ. 7.34.

Επίσης από το τρίγωνο του σχήματος 7.34 μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης θ μεταξύ της τάσης και της έντασης.

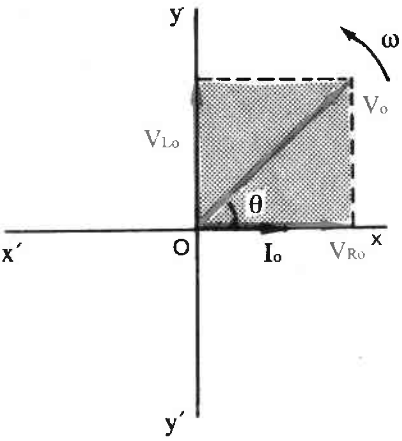
Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega L}{R} \tag{7.50}$$

Το διάγραμμα των τάσεων φαίνεται στο σχήμα 7.35. Από αυτό βλέπουμε ότι η τάση στο κύκλωμα προηγείται του ρεύματος κατά γωνία θ.

Αν μετρήσουμε πειραματικά την εμπέδηση Z και την ωμική αντίσταση R του

κυκλώματος, τότε μπορούμε από τη σχέση (7.49) να υπολογίσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής L.



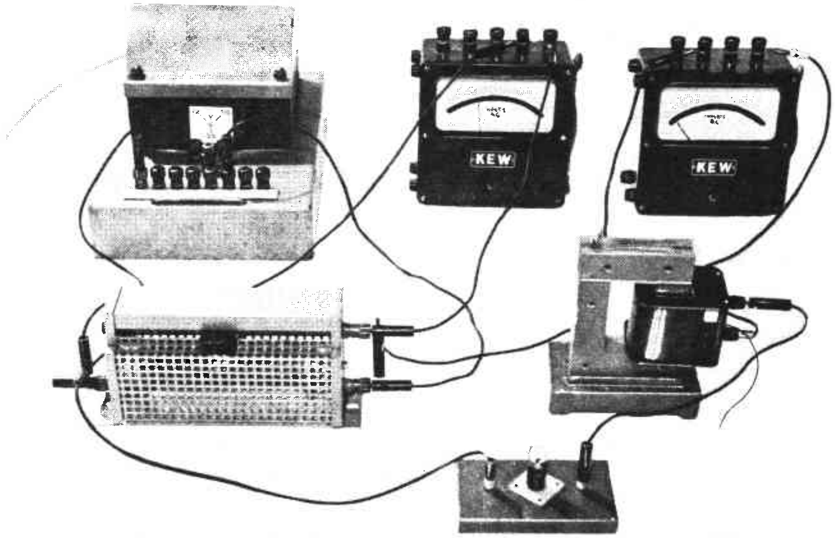
Σχ. 7.35.

α. Μέτρηση της εμπέδησης

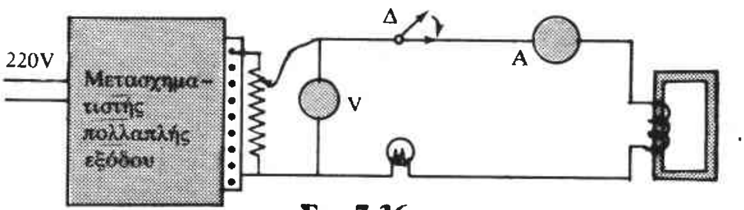
Για το σκοπό αυτό πραγματοποιούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.36.

Από τις ενδείξεις του βολτόμετρου και του αμπερόμετρου εναλλασσόμενου ρεύματος υπολογίζεται η εμπέδηση Z.

$$Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}}$$



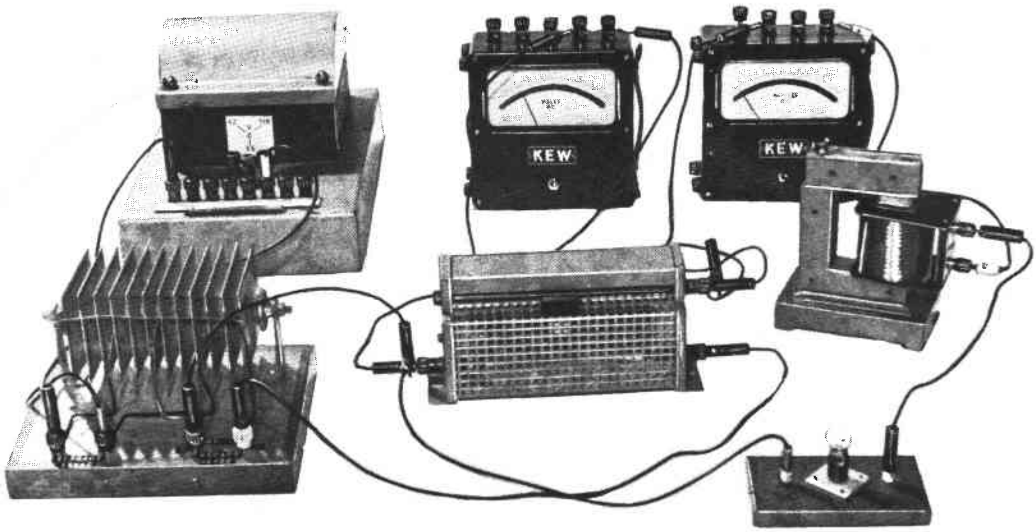
Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.36.



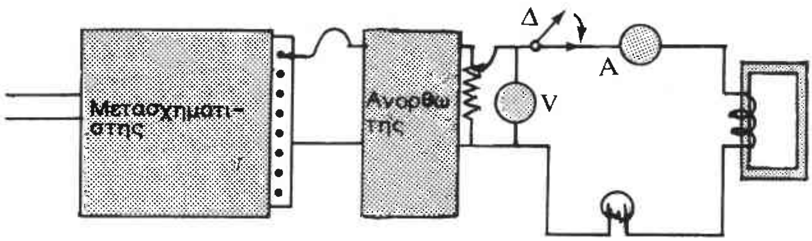
Σχ. 7.36.

β. Μέτρηση ωμικής αντίστασης

Η μέτρηση αυτή γίνεται με τη βοήθεια του κυκλώματος του σχήματος 7.37. Από τις ενδείξεις των οργάνων υπολογίζουμε την ωμική αντίσταση R ως λόγο της τάσης V προς την ένταση I.



Πειραματική διάταξη του κυκλώματος του σχήματος 7.37.



Σχ. 7.37.

γ. Υπολογισμός της αυτεπαγωγής

Λύνοντας τη σχέση (7.49) ως προς L, βρίσκουμε

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} \qquad (7.51)$$

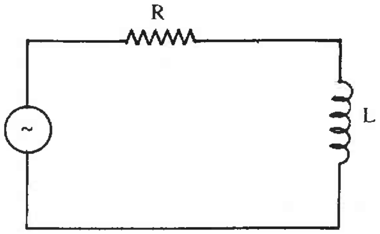
όπου ω η κυκλική συχνότητα της εφαρμοζόμενης τάσης. Αν στη σχέση (7.51) αντικαταστήσουμε τις τιμές των Z και R, όπως υπολογίστηκαν πειραματικά, υπολογίζουμε την αυτεπαγωγή L, του πηνίου.

Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι $R=20\Omega$ και $L=0{,}2H$. Η ενεργός τάση της πηγής είναι 100 Volt και η συχνότητά της 100Hz.

α) Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης στο κύκλωμα.

β) Να υπολογιστέι η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης στην πηγή και της τάσης στα άκρα του πηνίου.



Λύση

α) Η ενεργός τιμή της έντασης θα υπολογιστεί από τη σχέση

$$I_{εν}=\frac{V_{εν}}{Z}$$

Στην προκειμένη περίπτωση $Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$.

Συνεπώς $I_{εν}=\dfrac{V_{εν}}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$.

Με αντικατάσταση των δεδομένων προκύπτει:

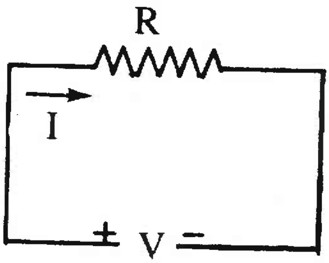
$$I_{εν}=\frac{100}{\sqrt{20^2+(0{,}2\cdot 2\pi\cdot 100)^2}}A=0{,}78A$$

β) Η γωνία θ υπολογίζεται από τη σχέση (7.50) και είναι:

$$εφθ=\frac{L\omega}{R}=\frac{0{,}2\cdot 2\pi\cdot 100}{20}=6{,}28$$

Με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων βρίσκεται $\theta \simeq 81^o$. Από το διάγραμμα των τάσεων, σχ. 7.35, προκύπτει ότι η τάση στο πηνίο προηγείται της τάσης της πηγής κατά 9°.

7.16. Ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος



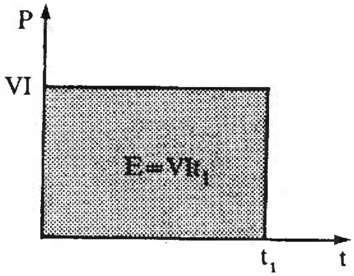
α. Σε ωμική αντίσταση

Είναι γνωστό ότι η ισχύς P του συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος που τροφοδοτεί μια αντίσταση R είναι:

$$P = VI \qquad ή \qquad P = I^2R$$

όπου V είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης και I η ένταση του ρεύματος που τη διαρρέει.

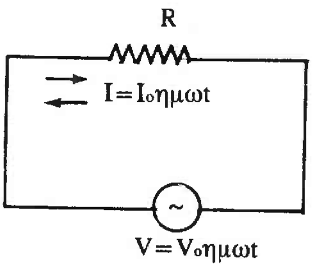
Η ηλεκτρική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα σε χρονικό διάστημα t_1 ισούται με $E = VIt_1$. Όπως φαίνεται από το σχήμα 7.38, η ενέργεια που καταναλώνεται μπορεί να υπολογιστεί από τη γραφική παράσταση της ισχύος σε συνάρτηση με το χρόνο.



Στην περίπτωση που η αντίσταση R συνδεθεί στο εναλλασσόμενο ρεύμα, η ισχύς που καταναλώνεται είναι:

$$P = VI$$

ή
$$\boxed{P = V_o I_o ημ^2 ωt} \qquad (7.52)$$



Σχ. 7.38.

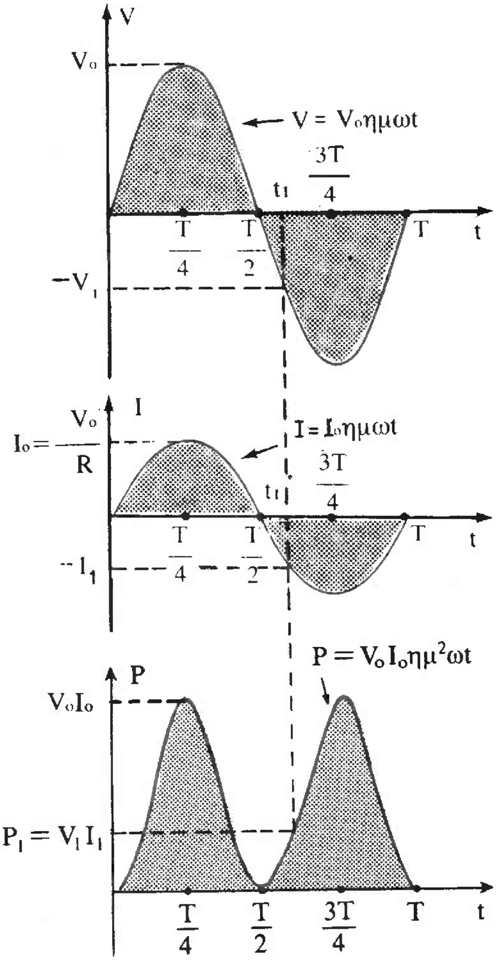
Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι συνάρτηση του χρόνου και έχει συγκεκριμένη τιμή σε δεδομένη χρονική στιγμή. Για το λόγο αυτό λέμε ότι η σχέση (7.52) παρέχει τη **στιγμιαία ισχύ** του εναλλασσόμενου ρεύματος, που δεν έχει όμως πρακτική σημασία. Για να υπολογίσουμε τη στιγμιαία ισχύ, παραδείγματος χάρη τη στιγμή t_1, σχ. 7.39, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την τάση $-V_1$ με την τιμή $-I_1$ της έντασης του ρεύ-

ματος. Έτσι προκύπτει ότι τη στιγμή t_1 η ισχύς είναι $P_1 = V_1 I_1$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.39, η ισχύς του εναλλασσόμενου ρεύματος που καταναλώνεται στην αντίσταση R είναι πάντα θετική. Η ενέργεια που καταναλώνεται σε χρονικό διάστημα έστω μιας περιόδου ισούται με το εμβαδό των γραμμοσκιασμένων επιφανειών στο σχήμα 7.39.

β) Σε χωρητική αντίσταση

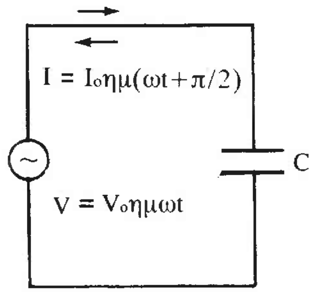
Στην παράγραφο 7.9. είδαμε ότι, όταν στα άκρα ενός πυκνωτή εφαρμοστεί τάση $V = V_0 ημωt$, τότε η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει είναι $I = I_0 ημ(ωt + \frac{π}{2})$.

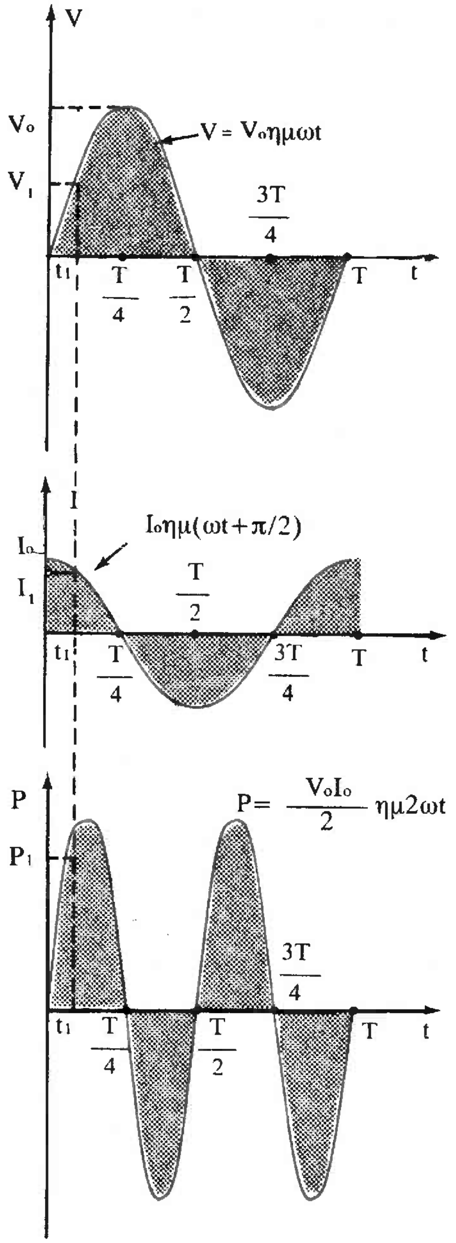
Για να υπολογίσουμε την ισχύ του εναλλασσόμενου ρεύματος στον πυκνωτή C, εργαζόμαστε ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση. Παριστάνουμε γραφικά τις εξισώσεις που περιγράφουν την τάση και την ένταση του εναλλασσόμενου ρεύματος και υπολογίζουμε για κάθε χρονική στιγμή το γινόμενο της τάσης επί την ένταση που είναι η στιγμιαία ισχύς, σχ. 7.40. Από το σχήμα προκύπτει ότι η στιγμιαία ισχύς είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου και έχει κυκλική συχνότητα διπλάσια απ' αυτή της εφαρμοζόμενης τάσης.



Σχ. 7.39.

Ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε ωμική αντίσταση





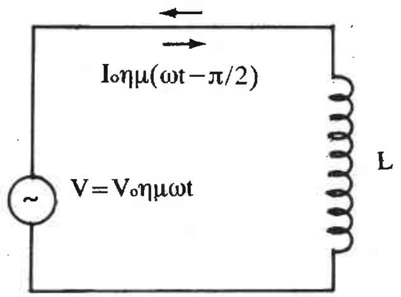
Σχ. 7.40. Ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε χωρητική αντίσταση

Τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τμημάτων στο σχ. 7.40 είναι αριθμητικά ίσα με την ενέργεια που απορρόφησε ο πυκνωτής στη διάρκεια μιας περιόδου.

Όπως προκύπτει από το σχήμα 7.40, αν το ολικό εμβαδόν υπολογιστεί για χρόνο μιας περιόδου, θα βρεθεί ίσο με μηδέν, ή αντίστοιχα η ενέργεια που απορροφάει ο πυκνωτής από την πηγή στη διάρκεια μιας περιόδου είναι μηδέν. Πράγματι, κατά το χρονικό διάστημα (0, T/4) ο πυκνωτής φορτίζεται και απορροφάει ενέργεια από την πηγή προκειμένου να συγκρατηθούν τα φορτία στους οπλισμούς του, γιατί αυτά απωθούνται μεταξύ τους. Στη συνέχεια, κατά το χρονικό διάστημα (T/4, T/2) ο πυκνωτής εκφορτίζεται, αποδίδοντας στην πηγή ενέργεια ίση με αυτή που είχε απορροφήσει. Κατά την αντίθετη φόρτιση (T/2, 3T/4) και εκφόρτιση (3T/4, T) του πυκνωτή επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια διαδικασία και στο τέλος της περιόδου η ενέργεια που απορρόφησε ο πυκνωτής είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος ο πυκνωτής δεν καταναλώνει ενέργεια αλλά τη μετατρέπει περιοδικά σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του.

γ) Σε επαγωγική αντίσταση

Όπως ο πυκνωτής έτσι και το ιδανικό πηνίο δεν καταναλώνει ηλεκτρική ενέργεια, όταν συνδεθεί σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος. Η μελέτη της μεταβολής της ισχύος με το χρόνο μπορεί να γίνει όπως ακριβώς έγινε και στον πυκνωτή. Από το σχήμα 7.41 προκύπτει ότι η ηλεκτρική ενέργεια που

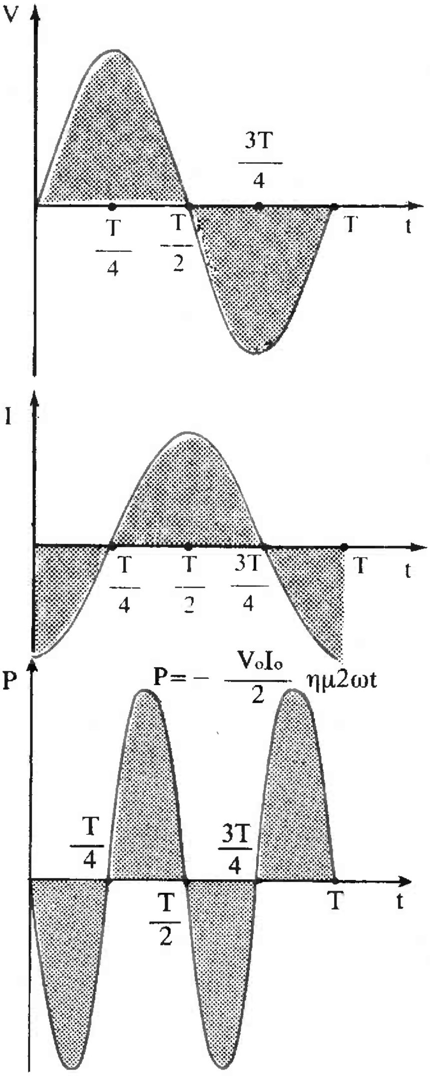


προσφέρεται από την πηγή στο πηνίο επιστρέφεται πάλι σ' αυτή. Έτσι στη διάρκεια μιας περιόδου η ενέργεια που καταναλώνεται στο πηνίο είναι μηδέν. Όταν λοιπόν ένα ιδανικό πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, δεν καταναλώνει ενέργεια, αλλά περιοδικά τη μετατρέπει σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου. Στα πραγματικά πηνία οι απώλειες ενέργειας οφείλονται στην ωμική αντίσταση του σύρματος από το οποίο κατασκευάζονται οι σπείρες τους.

1989 - 1995

7.17. Μέση ισχύς

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η στιγμιαία ισχύς δεν έχει πρακτική σημασία. Γι' αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται η **μέση ισχύς**, η οποία είναι ανεξάρτητη από το χρόνο.



Σχ. 7.41.
Ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος σε επαγωγική αντίσταση

Ονομάζουμε μέση ισχύ $\overline{P}$ του εναλλασσόμενου ρεύματος το πηλίκο του έργου W που παράγει το ρεύμα, μεταφέροντας ενέργεια από την πηγή στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος στη διάρκεια μιας περιόδου, δια της περιόδου T.

Δηλαδή
$$\overline{P}=\frac{W}{T} \qquad (7.53)$$

Η μέση ισχύς, όπως θα δούμε, δίνεται από τον τύπο:

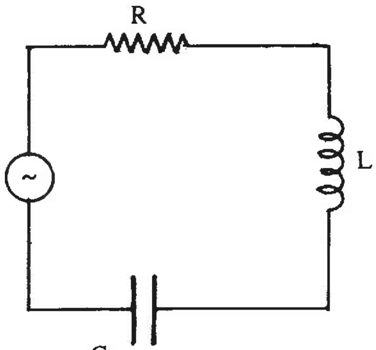
$$\boxed{\overline{P}=V_{εν}I_{εν}συνθ} \qquad (7.54)$$

όπου $V_{εν}$ και $I_{εν}$ η ενεργός τάση και ένταση του ρεύματος και θ η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης και της έντασης. Το συνθ λέγεται συντελεστής ισχύος και παίρνει τιμές από 0 έως +1.

Απόδειξη της σχέσης $\overline{P} = V_{εν}I_{εν}συνθ$:

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος 7.42. Σε ένα τέτοιο κύκλωμα η ηλεκτρική ενέργεια καταναλώνεται μόνο στην ωμική αντίσταση. Έτσι από τον ορισμό της ενεργού τιμής του εναλλασσόμενου ρεύματος η ενέργεια που γίνεται θερμότητα στη διάρκεια μιας περιόδου είναι:

$$E = I_{εν}^2 RT \Rightarrow E = V_{R_{εν}} I_{εν} T$$



Σχ. 7.42.

Η μέση ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα του σχήματος 7.42, σύμφωνα με τον ορισμό της είναι:

$$\overline{P} = \frac{W}{T} = \frac{E}{T} = \frac{V_{R_{εν}} I_{εν} T}{T} \Rightarrow \overline{P} = V_{R_{εν}} I_{εν} \qquad (7.55)$$

όπου $V_{R_{εν}}$ η ενεργός τιμή της τάσης στα άκρα της αντίστασης R. Από το σχήμα 7.22 της παραγράφου 7.11, στο οποίο απεικονίζεται το διάγραμμα των τάσεων, προκύπτει ότι:

$$V_{Ro} = V_o συνθ \qquad (7.56)$$

όπου V_o το πλάτος της εφαρμοζόμενης τάσης. Διαιρώντας και τα δυο μέλη της σχέσης (7.56) δια $\sqrt{2}$ έχουμε:

$$\frac{V_{Ro}}{\sqrt{2}} = \frac{V_o συνθ}{\sqrt{2}}$$

$$ή \qquad V_{Rεν} = V_{εν} συνθ \qquad (7.57)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.55) την τιμή της $V_{Rεν}$ από τη (7.57) έχουμε:

$$\overline{P} = V_{εν} I_{εν} συνθ \qquad (7.58)$$

Από τη σχέση αυτή είναι προφανές ότι η μέση ισχύς $\overline{P}$ γίνεται μέγιστη όταν το $I_{εν}$ και το συνθ γίνονται μέγιστα, πράγμα που συμβαίνει κατά το συντονισμό. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (7.54) γράφεται:

$$\overline{P} = V_{εν} I_{εν} \qquad (7.59)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος σε κυκλώματα που περιλαμβάνουν μόνο ωμική αντίσταση ή σε κυκλώματα που βρίσκονται σε συντονισμό.

Στην περίπτωση που το κύκλωμα περιλαμβάνει μόνο πυκνωτή ή μόνο πηνίο, ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος είναι μηδέν, δηλαδή ένα τέτοιο κύκλωμα δεν πρέπει να παρουσιάζει απώλειες ενέργειας. Στην πράξη όμως υπάρχουν πάντοτε απώλειες που οφείλονται στα εξής κυρίως αίτια: Όταν το κύκλωμα περιλαμβάνει μόνο πυκνωτή, οι απώλειες οφείλονται στην έστω και μικρή αντίσταση των αγωγών που συνδέουν την πηγή με τους οπλισμούς και στην ενέργεια που ξοδεύεται στο διηλεκτρικό του πυκνωτή. Όταν το κύκλωμα περιέχει μόνο πηνίο, οι απώλειες οφείλονται στην έστω και μικρή ωμική αντίσταση του πηνίου, στη μαγνητική ροή που χάνεται στο χώρο, στις απώλειες του πυρήνα κτλ.

Παράδειγμα

Ένας λαμπτήρας ωμικής αντίστασης $R_\lambda = 440\Omega$ συνδέεται σε σειρά με πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 0,25H$ και ωμικής αντίστασης 12Ω, και με πυκνωτή χωρητικότητας $C = 100\mu F$. Το κύκλωμα συνδέεται με πηγή 220Volt, 50Hz. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς που δαπανάται στο κύκλωμα και η ισχύς που δαπανά ο λαμπτήρας.

Λύση

Σύμφωνα με τη σχέση (7.58) η μέση ισχύς $\overline{P}$ είναι: $\overline{P} = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\theta$.

Επειδή από το σχήμα 7.23 προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{R}{Z}$, η μέση ισχύς γράφεται:

$$\overline{P} = V_{\varepsilon\nu} \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} \frac{R}{Z} \Rightarrow \overline{P} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{Z^2} R, \quad (\alpha)$$

όπου R η ωμική αντίσταση του κυκλώματος που ισούται με $(440+12)\Omega = 452\Omega$. Το Z υπολογίζεται από τη σχέση $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}$ με αντικατάσταση και είναι:

$$Z = \sqrt{(440+12)^2 + (0,25 \cdot 314 - \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} 314})^2}\,\Omega$$

$$\text{ή} \qquad Z = 457,72\Omega$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (α) έχουμε:

$$\overline{P} = \frac{220^2}{457,72^2}(440+12)\text{Watt} = 104,42\text{Watt}$$

Η ισχύς που δαπανάται στην αντίσταση του λαμπτήρα είναι $P_\lambda = I_{\varepsilon\nu}^2 R_\lambda$ ή

$$\text{ή } P_\lambda = \left(\frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z}\right)^2 R_\lambda$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$P_\lambda = \left(\frac{220}{457,72} \right)^2 440 \text{ Watt} = 101,64 \text{ Watt}$$

Η διαφορά $\overline{P} - P_\lambda = 2,78$ Watt είναι η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση του πηνίου.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

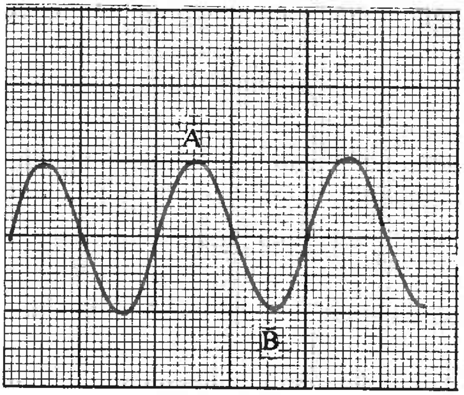
1. Ένα πλαίσιο διαστάσεων 5cm × 6cm που αποτελείται από 200 σπείρες περιστρέφεται με συχνότητα 60Hz σ' ένα μαγνητικό πεδίο 0,5Tesla. Ο άξονας περιστροφής του πλαισίου είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου.

α) Να υπολογιστεί το πλάτος της παραγόμενης εναλλασσόμενης τάσης.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης.

(**Απ.** α) V_o=113Volt, β) V=113ημ120πt)

2. Στα άκρα μιας αντίστασης R = 10Ω εφαρμόζεται η εναλλασσόμενη τάση του σχήματος. Η κατακόρυφη απόσταση των σημείων Α και Β είναι 2cm και γνωρίζουμε ότι, αν δύο σημεία της καμπύλης απέχουν κατακόρυφα μεταξύ τους κατά 1cm, αντιστοιχούν σε διαφορά δυναμικού 1Volt.



Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της παραπάνω εναλλασσόμενης τάσης.

β) Το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση R.

γ) Αν γίνεται η ένταση του ρεύματος μέγιστη, όταν η τάση πάρει τη μέγιστη τιμή της.

δ) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της ισχύος που καταναλώνεται στο κύκλωμα.

(**Απ.** α) 1Volt β) 0,1A γ) ναι δ) Pmax = 0,1Watt, Pmin = 0)

3. Η στιγμιαία ένταση ενός εναλλασσόμενου ρεύματος είναι 1,4A, όταν η φάση του είναι 45°.

α) Πόση είναι η ενεργός ένταση του ρεύματος;

β) Αν το ρεύμα αυτό διαρρέει αντίσταση R = 20Ω, πόση είναι η ενεργός τάση στα άκρα της;

(**Απ.** α) 1,4A β) 28Volt)

4. Μια συνεχής τάση 10Volt παράγει σε μια αντίσταση θερμότητα με σταθερό ρυθμό. Πόσο είναι το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης που θα παράγει τη μισή θερμότητα στην ίδια αντίσταση και στον ίδιο χρόνο;

(**Απ.** 10Volt)

5. Ένας ηλεκτρικός λαμπτήρας 8Watt φωτοβολεί κανονικά, όταν συνδεθεί με πηγή συνεχούς τάσης 12Volt. Ο ίδιος λαμπτήρας φωτοβολεί ακριβώς το ίδιο, αν συνδεθεί με πηγή εναλλασσόμενης τάσης μέσω αντίστασης 100Ω.

Να υπολογίσετε το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

(**Απ.** 109,98Volt)

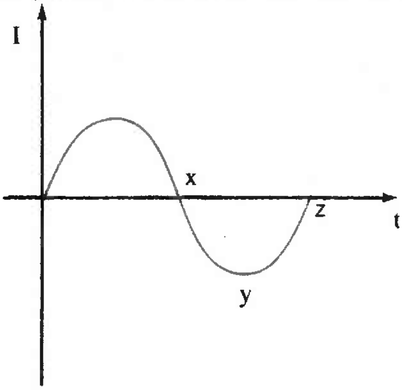
6. Ένα ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα διαρρέει αντίσταση R = 62,5Ω, οπότε παράγεται θερμότητα με ρυθμό 3600cal/min, ζητούνται:

α) Η μέγιστη ένταση του ρεύματος.

β) Η συχνότητα του ρεύματος, αν για t=0 η ένταση είναι μηδέν και για t= 5msec η ένταση γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά.

(Απ. α) I_o=2,82A β) ν=50Hz)

7. Σε ένα ιδανικό πηνίο η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως δείχνει η γραφική παράσταση του σχήματος.
Ποια ή ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές:



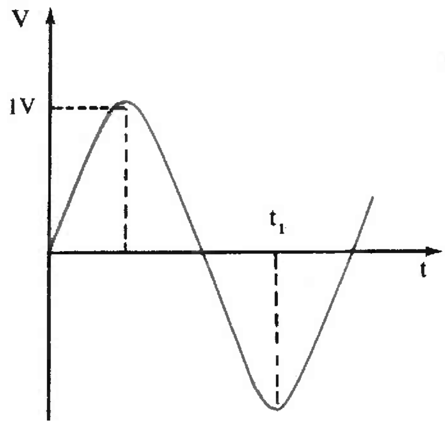
α) Η τάση είναι ελάχιστη, όταν η ένταση έχει την τιμή y.

β) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι μηδέν, όταν η ένταση έχει την τιμή z.

γ) Η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του πηνίου είναι μέγιστη, όταν η ένταση έχει τιμή x.

8. Στους οπλισμούς ενός πυκνωτή χωρητικότητας C = 150μF εφαρμόζεται η εναλλασσόμενη τάση, την οποία παριστάνει η καμπύλη του σχήματος.

α) Πόσο είναι το φορτίο στον πυκνωτή, όταν V = +1Volt, −1Volt, 0Volt; Να παρασταθεί γραφικά το φορτίο σε συνάρτηση με το χρόνο. Πόσο είναι το φορτίο τη χρονική στιγμή t_1;



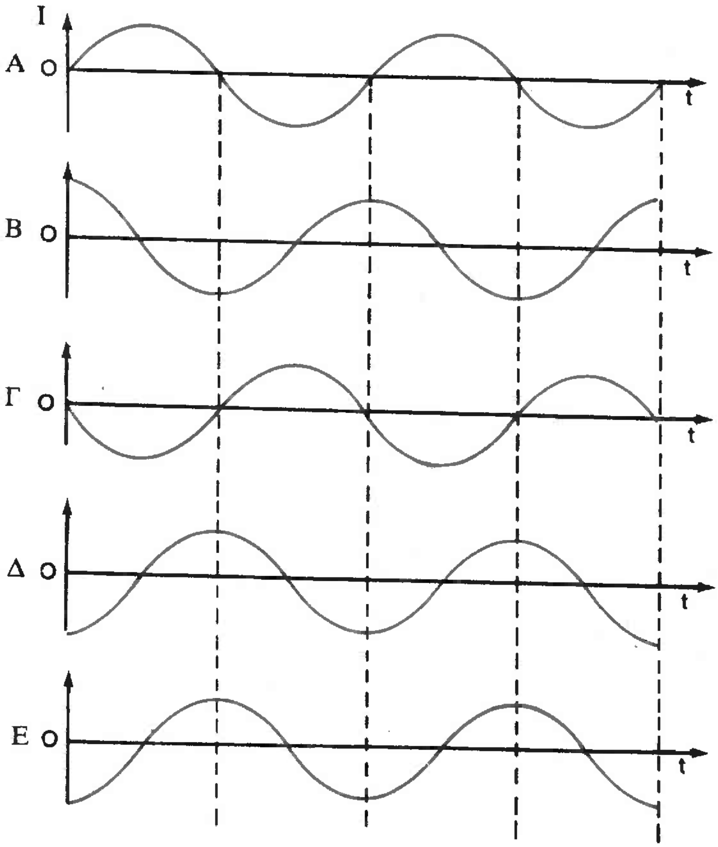
β) Πότε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα που περιέχει τον πυκνωτή γίνεται μέγιστο και πότε ελάχιστο; Να παρασταθεί γραφικά η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. Πόση είναι η ένταση τη στιγμή t_1;

(Απ. α) 150μCb, −150μCb, 0Cb,β) μηδέν)

9. Ένας πυκνωτής διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο, όπως φαίνεται στην καμπύλη Α.

α) Ποια καμπύλη αντιστοιχεί στη μεταβολή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο;

β) Ποια από τις υπόλοιπες καμπύλες αντιστοιχεί στη μεταβολή του φορτίου στον πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο;



10. Στους οπλισμούς πυκνωτή χωρητικότητας C = 10μF εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση πλάτους V_o = 10Volt.

α) Πόση είναι η τάση στον πυκνωτή, όταν το φορτίο του έχει πάρει τη μέγιστη τιμή του; Πόση είναι η μέγιστη τιμή του φορτίου;

β) Πόσο είναι το ρεύμα στο κύκλωμα που περιέχει τον πυκνωτή, όταν το φορτίο είναι μέγιστο;

γ) Πόση είναι η ισχύς του ρεύματος, όταν η τάση είναι μέγιστη;

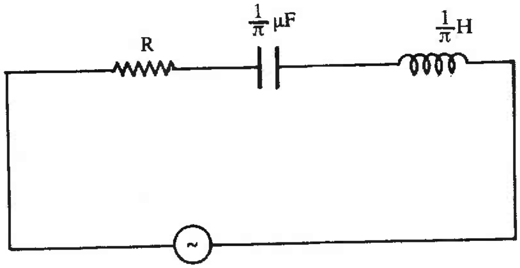
δ) Όταν η τάση στα άκρα του πυκνωτή αυξάνεται, η ενέργεια που αποθηκεύεται αυξάνεται ή ελαττώνεται;

ε) Πόση είναι η μέγιστη τιμή της ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυκνωτή και σε ποιες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου αντιστοιχεί;

11. Όταν η εναλλασσόμενη τάση στους οπλισμούς ενός πυκνωτή είναι μηδέν, ο πυκνωτής δεν έχει ούτε φορτίο ούτε ενέργεια. Οταν η τάση πάρει τη μέγιστη τιμή της τότε ο πυκνωτής έχει ενέργεια $E = 1/2CV^2$. Αν τότε διακόψουμε ξαφνικά το κύκλωμα είναι δυνατό η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή να χρησιμοποιηθεί;

12. Στο κύκλωμα του σχήματος η εναλλασσόμενη τάση έχει σταθερό πλάτος, αλλά η συχνότητα μεταβάλλεται. Η τάση στην αντίσταση θα είναι μέγιστη, όταν η συχνότητα σε Hz είναι: α) 0 β) 100 γ) 250 δ) 500 ε) 10^6.

(**Απ.** δ)



13. Σ' ένα κύκλωμα RLC σε σειρά δίνονται: L = 230mH, R = 160Ω, C = 15μF, η ενεργός τάση της πηγής $V_{εν}$ = 30Volt και η συχνότητα της ν = 60Hz.
Ζητούνται:
α) η ενεργός ένταση του ρεύματος.
β) η διαφορά φάσης μεταξύ έντασης και τάσης.
γ) το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων.

(**Απ.** α) $I_{εν}$ = 0,16A β) $\varphi \simeq 30°$)

14. Ένα κύκλωμα αποτελείται από πηνίο, που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 1H και ασήμαντη ωμική αντίσταση, πυκνωτή χωρητικότητας C = 4μF και ωμική αντίσταση R = 10Ω. Το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα του οποίου η στιγμιαία τιμή της έντασης δίνεται από την εξίσωση I = 2ημ500t.
α) Πόση είναι η ενεργός ένταση και η συχνότητα του ρεύματος;
β) Πόση θερμότητα ελευθερώνεται στην αντίσταση R σε χρόνο t = 60sec;
γ) Πόση είναι η ενεργός τάση στα άκρα της ωμικής αντίστασης R, καθώς και στα άκρα του πηνίου και στους οπλισμούς του πυκνωτή;
δ) Πόση είναι η ενεργός τάση στα άκρα του κυκλώματος;

(**Απ.** α) $\sqrt{2}$A 250/πHz β) 1200Joule γ) $10\sqrt{2}$Volt, $500\sqrt{2}$Volt, $500\sqrt{2}$Volt δ) $10\sqrt{2}$Volt)

15. Ένα πηνίο που έχει ωμική αντίσταση R και συντελεστή αυτεπαγωγής L = 0,25H, συνδέεται στη σειρά με μεταβλητό πυκνωτή. Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζουμε εναλλασσόμενη τάση συχνότητας ν = 100Hz και ενεργού τιμής $V_{εν}$ = 200Volt. Με τη βο-

ήθεια ενός αμπερόμετρου αμελητέας εσωτερικής αντίστασης διαπιστώνουμε ότι, αν μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή, υπάρχει μια τιμή C_x, για την οποία το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή $I_{εν} = 10A$.

α) Πόση είναι η C_x;

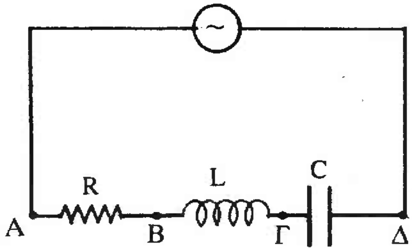
β) Πόση είναι η ωμική αντίσταση του πηνίου;

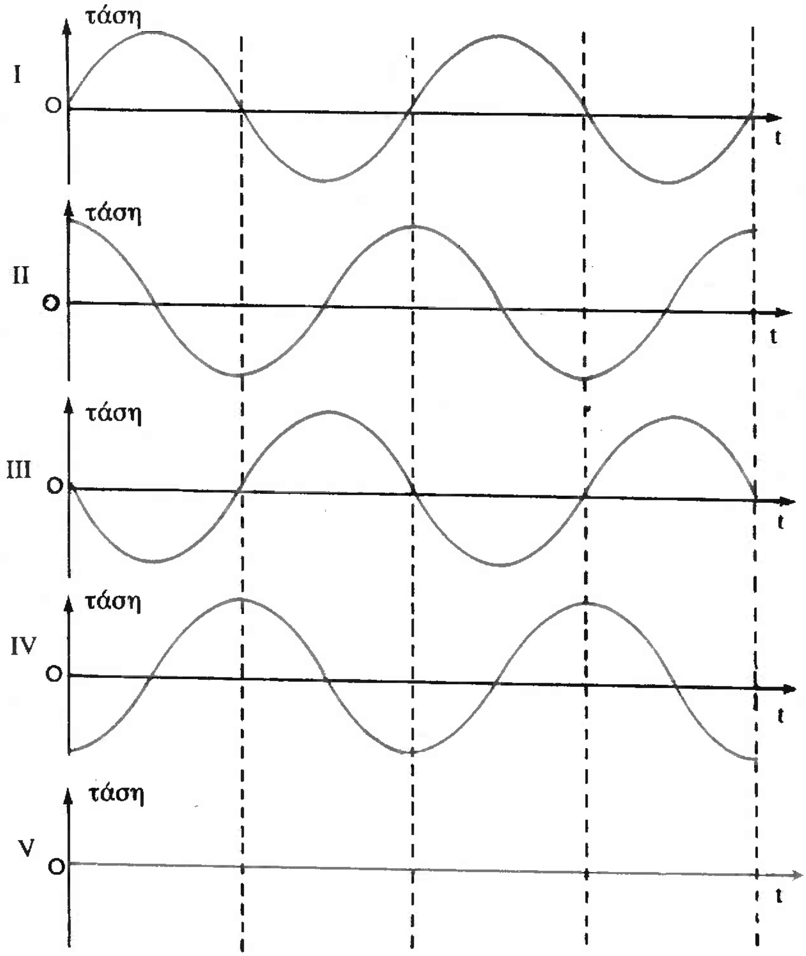
(Δίνεται $\pi^2 \simeq 10$)

(**Απ.** α) $C_x = 10^{-5}F$ β) $R = 20\Omega$)

16. Σε ένα κύκλωμα RLC η διαφορά δυναμικού μεταξύ Α και Β μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στην καμπύλη (Ι).

Ποια από τις υπόλοιπες καμπύλες αντιστοιχεί στη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων: α) Β, Γ, β) Γ,Δ, γ) Β,Δ, δ) Α,Δ





17. Ένα κύκλωμα RLC σε σειρά διαρρέεται από ρεύμα μεταβλητής συχνότητας. Πως μπορούμε με τη βοήθεια αμπερόμετρου να διαπιστώσουμε αν η συχνότητα του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη συχνότητα συντονισμού;

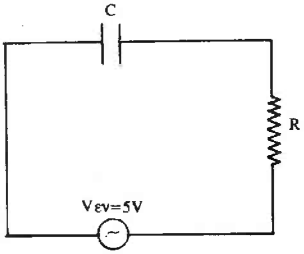
18. Μια εναλλασσόμενη τάση σταθερού πλάτους της οποίας η σχυνότητα μπορεί να μεταβάλλεται, εφαρμόζεται σε κύκλωμα RLC σε σειρά.

α) Να αποδώσετε γραφικά τη μεταβολή της ενεργού τιμής του ρεύματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

β) Αν παράλληλα προς τον πυκνωτή C του κυκλώματος συνδεθεί ένας άλλος πυκνωτής C_1, πως θα μεταβληθούν η συχνότητα συντονισμού και η μέγιστη ένταση του ρεύματος;

γ) Να αποδώσετε πάλι στους ίδιους άξονες τη μεταβολή της ενεργού τιμής του ρεύματος σε συνάρτηση με τη συχνότητα.

19. Δίνεται το κύκλωμα του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η ενεργός τάση στον πυκνωτή είναι 3Volt. Η ενεργός τάση στην αντίσταση είναι:
α) 1Volt β) 2Volt γ) 3Volt δ) 4Volt ε) 10Volt



(Απ. δ)

20. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C = 2,5μF συνδέεται σε σειρά με ωμική αντίσταση 300Ω και με πηγή εναλλασσόμενης τάσης ενεργού τιμής $V_{εν}$ = 100Volt και συχνότητας $ν = \frac{1000}{2π}$Hz.
Να υπολογιστούν:
α) η εμπέδηση του κυκλώματος.
β) η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος.
γ) η ενεργός τιμή της τάσης στα ακρα του πυκνωτή και στα άκρα της αντίστασης.

(Απ. α) Z = 500Ω β) $I_{εν}$ = 0,2A γ) $V_{Rεν}$ = 60Volt, $V_{Cεν}$ = 80Volt)

21. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C=0,1mF συνδέεται σε σειρά με αντίσταση R=10Ω και με μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V_{εν}$ = 100Volt και συχνότητας ν = 50Hz.
α) Υπολογίστε την ενεργό τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα.
β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα.
γ) Γράψτε την εξίσωση του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
δ) Πόση τάση θα δείξει ένα βολτόμετρο, αν συνδεθεί στα άκρα της αντίστασης ή στα άκρα του πυκνωτή;

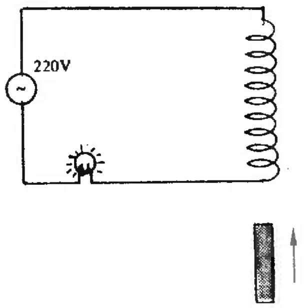
ε) Το αριθμητικό άθροισμα των ενεργών τιμών των τάσεων στον πυκνωτή και στην αντίσταση ισούται με την τάση της πηγής;

(Απ. α) $I = 2{,}99A$ β) $I_o = 4{,}21A$ γ) $I = 4{,}21ημ(314t + 1{,}26)$ δ) 95,22Volt, 29,9Volt
ε) όχι)

22. Στο κύκλωμα του σχήματος ο λαμπτήρας φωτοβολεί κανονικά, πριν να εισαχθεί στο πηνίο πυρήνας μαλακού σιδήρου:

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στη μεταβολή της φωτοβολίας του λαμπτήρα καθώς εισέρχεται ο πυρήνας στο πηνίο είναι σωστή;

α) Η φωτοβολία συνεχώς θα αυξάνει.
β) Η φωτοβολία συνεχώς θα μειώνεται.
γ) Για μια στιγμή ο λαμπτήρας θα φωτοβολήσει έντονα και μετά θα φωτοβολεί κανονικά.
δ) Η φωτοβολία θα μειωθεί για μια στιγμή και μετά θα επανέλθει στην αρχική της τιμή.
ε) Η φωτοβολία θα μείνει σταθερή.



23. Όταν ένα πηνίο συνδέεται με πηγή συνεχούς τάσης 12Volt διαρρέεται από ρεύμα έντασης 2A. Όταν το ίδιο πηνίο συνδεθεί με πηγή εναλλασσόμενης τάσης ενεργού τιμής 12Volt, το ρεύμα που το διαρρέει έχει ενεργό τιμή 1A.

α) Πόση είναι η ωμική αντίσταση του πηνίου.
β) Πόση είναι η επαγωγική αντίσταση του πηνίου.
γ) Πόσος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής L του πηνίου αν η συχνότητα της πηγής είναι $v = 50Hz$.

(Απ. α) 6Ω β) $6\sqrt{3}Ω$ γ) 33mH)

24. Μια ωμική αντίσταση $R = 3Ω$ συνδέεται σε σειρά με πηνίο αμελητέας ωμικής αντίστασης που έχει $L = 10mH$ και με πηγή εναλλασσόμενης τάσης πλάτους $V_o = 5Volt$ και συχνότητας $v = \frac{200}{\pi}Hz$.

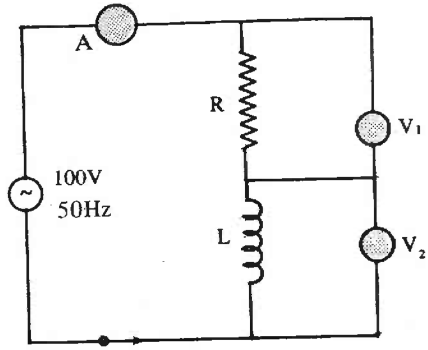
Να υπολογιστούν:

α) Η εμπέδηση του κυκλώματος.
β) Τα πλάτη των τάσεων V_{Ro} και V_{Lo}.
γ) Να γίνει το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και να βρεθεί η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης της πηγής και της τάσης στο πηνίο.

(Απ. α) $Z = 5Ω$ β) $V_{Ro} = 3Volt$, $V_{Lo} = 4Volt$ γ) $εφθ = \frac{3}{4}$)

25. Οι ενδείξεις των οργάνων στο κύκλωμα είναι: 1,5A, V_1 = 75Volt και V_2 = 55Volt.
Αν από άλλο πείραμα γνωρίζουμε ότι η ισχύς που δαπανάται στο κύκλωμα είναι 124Watt, να υπολογίσετε την τιμή της αντίστασης R, την αυτεπαγωγή L του πηνίου και την ωμική του αντίσταση $R_π$.

(**Απ.** 50Ω, 0,12H, 5,1Ω)



26. Σ' ένα κύκλωμα RL σε σειρά εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση $V_{εν}$ = 110Volt. Δίνονται: η αντίσταση R ίση με 80Ω, η συχνότητα της πηγής ίση με 60Hz και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση ίση με 50Watt. Ζητείται το L του πηνίου.

(**Απ.** 302mH)

27. Ένα πηνίο, όταν συνδεθεί με πηγή συνεχούς τάσης 10Volt, διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1A. Όταν το ίδιο πηνίο συνδεθεί σε εναλλασσόμενη τάση $V_{εν}$ = 10Volt και συχνότητα ν = 50Hz, διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_{εν}$ = 0,8A.

α) Να υπολογιστεί η ωμική αντίσταση και η αυτεπαγωγή του πηνίου.

β) Πόση ενέργεια προσφέρεται από την πηγή εναλλασσόμενης τάσης στο πηνίο στη διάρκεια 1sec;

($\pi^2 \simeq 10$)

(**Απ.** α) R = 10Ω, L ≃ 24mH β) 6,4Joule)

28. Ένας λαμπτήρας με χαρακτηριστικά λειτουργίας 110Volt, 55Watt, συνδέεται με πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V_{εν}$ = 220Volt και ν = 50Hz, μέσω πηνίου, που έχει L = 1,28H και αντίσταση R = 10Ω.

Ο λαμπήρας θα φωτοβολεί κανονικά; Αν όχι, θα φωτοβολεί λιγότερο ή περισσότερο;

(**Απ.** θα φωτοβολεί κανονικά)

29. Ένα πηνίο που έχει ωμική αντίσταση R = 4Ω και L = 0,01H συνδέεται με γεννήτρια, της οποίας η ενεργός τάση παραμένει σταθερή και ίση με 10Volt ενώ η συχνότητα μεταβάλλεται.

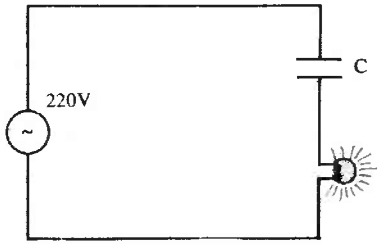
α) Μέχρι ποια συχνότητα η ενεργός ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι μεγαλύτερη από 0,1A;

β) Αν στο κύκλωμα παρεμβληθεί σε σειρά πυκνωτής χωρητικότητας 100nF, πόση είναι η ενεργός ένταση του ρεύματος για τη συχνότητα που υπολογίζεται από το πρώτο ερώτημα;

γ) Υπολογίστε τη συχνότητα συντονισμού ν_0 του κυκλώματος και την ένταση του ρεύματος για τη συχνότητα αυτή.

($\pi^2 \simeq 10$)

(**Απ.** α) 1,6KHz β) 11mA γ) 5KHz 2,5A)

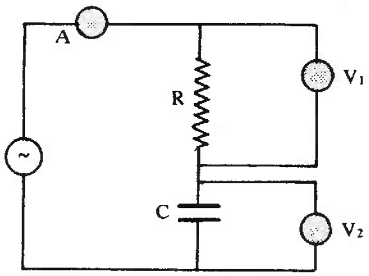


30. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέεται σε σειρά με λαμπτήρα 55Watt, 110Volt και με πηγή εναλλασσόμενης τάσης 220Volt, 50Hz όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C, ώστε ο λαμπτήρας να φωτοβολεί κανονικά.

β) Πόση είναι η μέγιστη ενέργεια που αποθηκεύεται στο πυκνωτή;

(**Απ.** α) C = 8,36μF β) 0,3Joule)



31. Ένα κύκλωμα αποτελείται από αντίσταση R = 100Ω, πυκνωτή C = 100μF και πηγή $V_{εν}$ = 100Volt, ν = 50Hz σε σειρά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο κύκλωμα παρεμβάλλεται αμπερόμετρο Α εναλλασσόμενου ρεύματος. Με τη βοήθεια δύο βολτόμετρων εναλλασσόμενης τάσης, μετράμε τις τάσεις στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή.

α) Ποια θα είναι η ένδειξη του αμπερόμετρου;

β) Ποια θα είναι η ένδειξη του κάθε βολτόμετρου;

γ) Υπολογίστε τη μέση ισχύ που δαπανάται στο κύκλωμα.

(**Απ.** α) 0,95A β) V_1 = 95Volt, V_2 = 30,25Volt γ) 90,25Watt)

32. Ένα πηνίο που έχει ωμική αντίσταση 20Ω, L = 0,4H, συνδέεται σε σειρά με αντίσταση R = 100Ω και πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Η συχνότητα της πηγής είναι $\frac{200}{\pi}$Hz και η ενεργός τάση της είναι 200Volt.

Να υπολογιστούν:

α) Η εμπέδηση του κυκλώματος.

β) Ο συντελεστής ισχύος.

γ) Η μέση ισχύς που καταναλίσκεται στο κύκλωμα.

(**Απ.** α) 200Ω β) 0,6 γ) 120Watt)

33. Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει σε σειρά ωμική αντίσταση R = 10Ω, πυκνωτή Z_C = 20Ω και πηνίο Z_L = 25Ω. Το πηνίο παρουσιάζει ωμική αντίσταση R΄= 10Ω και το κύκλωμα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση $V_{εν}$ = 220Volt.

α) Πόση είναι η ενεργός ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα;

β) Ποιος είναι ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος;

γ) Πόση είναι η ενεργός τάση στα άκρα του πυκνωτή και στα άκρα του πηνίου;

δ) Πόση θερμότητα αναπτύσσεται στο κύκλωμα σε χρόνο t = 2min;

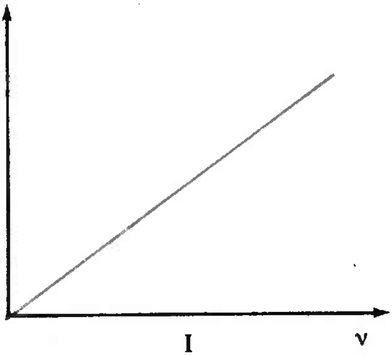
(**Απ.** α) $I_{εν}$ = 10,67A β) συνθ = 0,97 γ) $V_{Cεν}$ = 213,4Volt, $V_{Lεν}$ = 287,3Volt δ) 65577cal)

34. Ένα πηνίο που έχει ωμική αντίσταση R και συντελεστή αυτεπαγωγής L, συνδέεται με πηγή εναλλαασσόμενης τάσης σταθερού πλάτους, της οποίας η συχνότητα μπορεί να μεταβάλλεται.

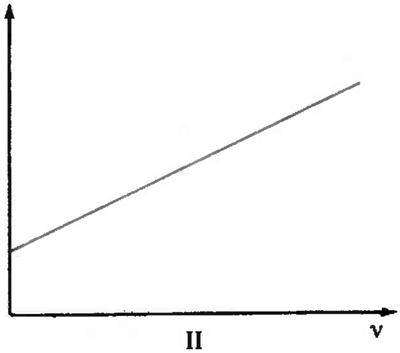
Ποια από τις παρακάτω καμπύλες παριστάνει:

α) τη μεταβολή της εμπέδησης του πηνίου με τη συχνότητα ν της πηγής.

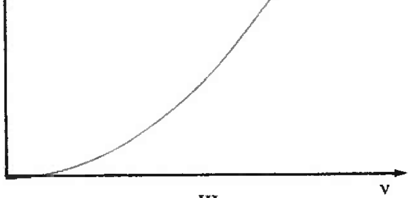
β) την ισχύ που δαπανάται στο πηνίο σε συνάρτηση με τη συχνότητα ν της πηγής.



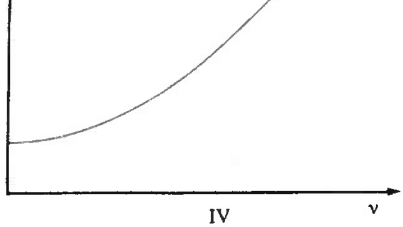
I



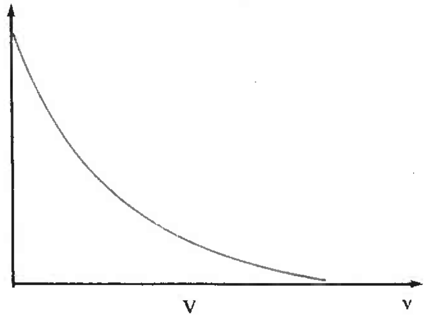
II



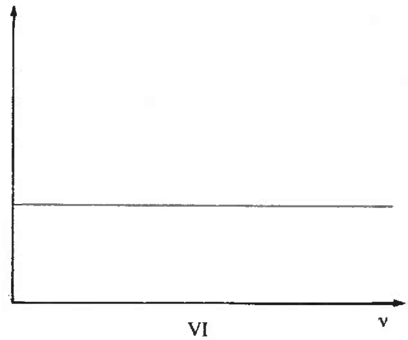
III



IV



V



VI

35. Οι παρακάτω καμπύλες αποδίδουν γραφικά τη μεταβολή της εμπέδησης, με τη συχνότητα για κύκλωμα που μπορεί να αποτελείται από αντίσταση, πηνίο, πυκνωτή ή συνδυασμούς τους.

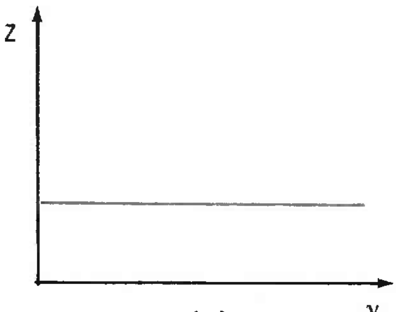
Ποια από τις παραπάνω καμπύλες αντιστοιχεί:

α) σε κύκλωμα RL

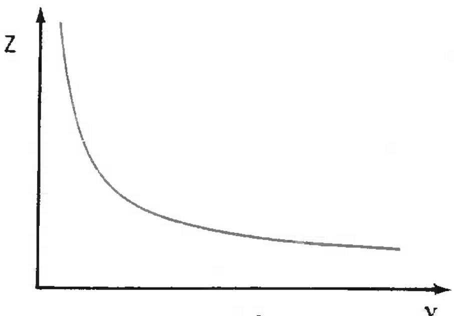
β) σε κύκλωμα RC

γ) σε κύκλωμα RLC

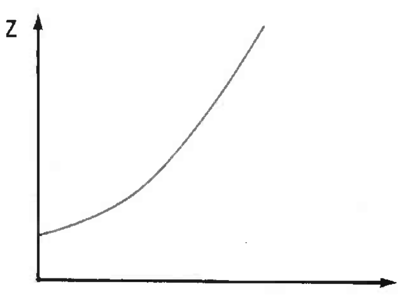
δ) σε ωμική αντίσταση R.



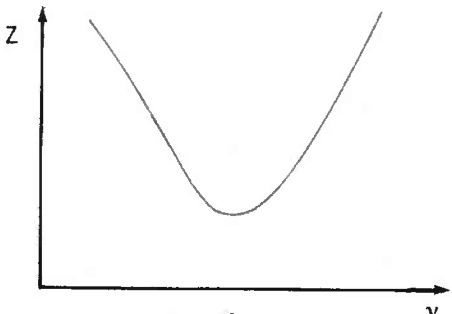
(α)



(β)

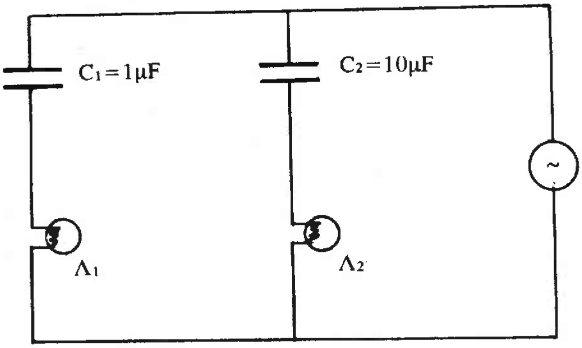


(γ)



(δ)

36. Ποιος από τους δύο όμοιους λαμπτήρες του κυκλώματος θα φωτοβολεί εντονότερα;



37. Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα είναι 120Volt, 240watt. Ο λαμπτήρας πρόκειται να τροφοδοτηθεί από δίκτυο εναλλασσόμενης τάσης ενεργού τιμής 240Volt και συχνότητας 50Hz. Για να λειτουργεί κανονικά ο λαμπτήρας προτείνονται οι ακόλουθες τρεις λύσεις:

I) Να συνδεθεί σε σειρά με ωμική αντίσταση $R = 60\Omega$.

II) Να συνδεθεί σε σειρά με πηνίο αμελητέας ωμικής αντίστασης που έχει $L = 0{,}33H$.

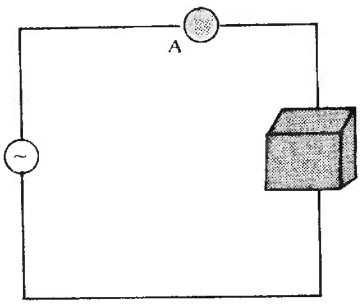
III) Να συνδεθεί σε σειρά με πυκνωτή χωρητικότητας $C = 30{,}6\mu F$.

α) Ποια από τις παραπάνω λύσεις είναι συμφέρουσα από πλευράς δαπάνης σε ηλεκτρική ενέργεια;

β) Ποια είναι πιο εύκολο να πραγματοποιηθεί;

(Απ. α) II ή III, β) III)

38. Ένας σπουδαστής προσπαθεί να προσδιορίσει τι περιέχει το αδιαφανές κιβώτιο το οποίο είναι συνδεμένο στο κύκλωμα του σχήματος.



Ο σπουδαστής έχει την πληροφορία ότι το κιβώτιο μπορεί να περιέχει αντίσταση, πηνίο, πυκνωτή ή συνδυασμούς τους σε σειρά ανά δύο ή ανά τρία. Όταν αυξάνει τη συχνότητα της πηγής και διατηρεί το πλάτος της τάσης σταθερό, βρίσκει ότι η ένταση του ρεύματος αυξάνει συνέχεια και τελικά αποκτάει σταθερή τιμή, ανεξάρτητα από το πόσο υψηλή είναι η συχνότητα. Κατόπιν παίρνει τις εξής μετρήσεις: 1) Όταν η συχνότητα της πηγής είναι 100Hz και η ενεργός τιμή της τάσης είναι 32Volt, το ρεύμα έχει ενεργό τιμή 1mA.

2) Για ενεργό τιμή τάσης της πηγής 32Volt η μέγιστη ενεργός τιμή του ρεύματος είναι 2mA.

α) Προσδιορίστε τι περιέχει το κιβώτιο και τον τρόπο σύνδεσής τους.

β) Υπολογίστε τις τιμές των στοιχείων που περιέχονται στο κιβώτιο.

(Απ. αντίσταση $R = 16K\Omega$ και πυκνωτής $C = 57nF$ σε σειρά)

8
Ηλεκτρομαγνητική θεωρία

Γενικά

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία διατυπώθηκε από το Maxwell και συμπληρώθηκε κατόπιν από άλλους επιστήμονες. Ο Maxwell βασίστηκε στις μέχρι τότε γνώσεις για τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό, δηλαδή το νόμο του Gauss, του Ampere και το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday. Γιαυτό στη συνέχεια θα μελετήσουμε πρώτα τους νόμους αυτούς και κατόπιν την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell.

8.1. Ηλεκτρική ροή

Ένα άλλο φυσικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τα πεδία είναι η ροή. Έτσι π.χ. στο μαγνητικό πεδίο μιλάμε για μαγνητική ροή και στο ηλεκτρικό για ηλεκτρική ροή.

Η ηλεκτρική ροή ορίζεται σε πλήρη αναλογία με τη γνωστή σε μας μαγνητική ροή.

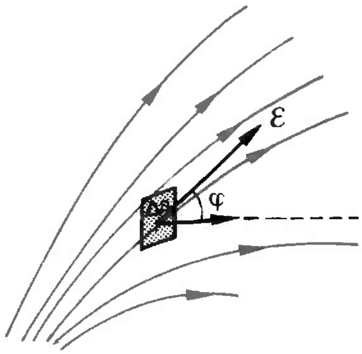
Αν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο φανταστούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού ΔS, σχ. 8.1, που η κάθετη σ' αυτή σχηματίζει γωνία φ με την ένταση $\vec{\mathcal{E}}$ του ηλεκτρικού πεδίου*, τότε ορίζουμε σαν ηλεκτρική ροή ΔΦ που περνάει από τη ΔS το φυσικό μέγεθος

$$\boxed{\Delta\Phi = \mathcal{E}\,\Delta S\,\text{συνφ}} \qquad (8.1)$$

όπου $\vec{\mathcal{E}}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση που φέραμε την επιφάνεια ΔS.

Αν η επιφάνεια που φανταζόμαστε μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο έχει εμβαδό S, τότε θεωρούμε ότι αυτή διαιρείται σε μεγάλο αριθμό στοιχειωδών επιφανειών ΔS_1, ΔS_2, $\Delta S_3 \ldots$

Αν $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3 \ldots$ είναι αντίστοιχα τα μέτρα των εντάσεων του ηλεκτρικού



Σχ. 8.1.

* Η επιφάνεια ΔS θεωρείται τόσο μικρή, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$ να είναι η ίδια για όλα τα σημεία της.

πεδίου και φ_1, φ_2, φ_3 ... είναι οι γωνίες μεταξύ των εντάσεων και των καθέτων στις στοιχειώδεις επιφάνειες, τότε οι αντίστοιχες στοιχειώδεις ροές θα είναι: $\Delta\Phi_1=\mathcal{E}_1\Delta S_1$συν$\varphi_1$, $\Delta\Phi_2=\mathcal{E}_2\Delta S_2$συν$\varphi_2$, $\Delta\Phi_3=\mathcal{E}_3\Delta S_3$συν$\varphi_3$, ...

Για να βρούμε την ολική ροή $\Phi_{ολ}$, που διέρχεται από την επιφάνεια S, θα αθροίσουμε τις στοιχειώδεις ροές, δηλαδή

$$\Phi_{ολ}=\Delta\Phi_1+\Delta\Phi_2+\Delta\Phi_3+\dots$$

ή

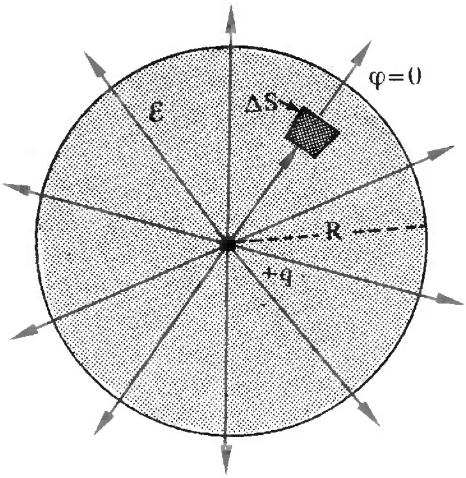
$$\Phi_{ολ}=\Sigma\mathcal{E}_i\Delta S_i\,\text{συν}\varphi_i \qquad i=1,\ 2,\ 3,\dots \qquad (8.2)$$

Η μονάδα της ηλεκτρικής ροής είναι το $1\frac{Nm^2}{Cb}$.

Όπως η μαγνητική ροή, έτσι και η ηλεκτρική ροή είναι μέγεθος μονόμετρο και εκφράζει τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που διέρχονται μέσα από μια επιφάνεια. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι τα φορτία βρίσκονται στο κενό.

8.2. Νόμος του Gauss

Ο Γερμανός φυσικός και μαθηματικός Karl Gauss (1777-1855), του οποίου η προσφορά στην ανάπτυξη της Φυσικής υπήρξε μεγάλη*, μελέτησε μεταξύ άλλων και την ηλεκτρική ροή σε σχέση με τα φορτία που την παράγουν. Το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ονομάζεται νόμος του Gauss.



Σχ. 8.2.

Είναι γνωστό ότι ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί γύρω του ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο. Ας φανταστούμε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R, στο κέντρο της οποίας βρίσκεται ηλεκτρικό φορτίο +q, σχ. 8.2. Η ολική ηλεκτρική ροή που περνάει από τη σφαιρική επιφάνεια υπολογίζεται ως εξής: Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας έχει το ίδιο μέτρο $\mathcal{E}_i=\mathcal{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ και η διεύθυνσή της είναι

* Ανέπτυξε τη θεωρία των σφαλμάτων που γίνονται κατά τις μετρήσεις. Μεγάλη είναι επίσης η προσφορά του στη μελέτη του μαγνητισμού. Στα Μαθηματικά ασχολήθηκε με τη θεωρία των αριθμών, τη θεωρία των συναρτήσεων κ.ά.

ακτινική από το φορτίο προς την επιφάνεια. Θεωρούμε ότι η σφαιρική επιφάνεια χωρίζεται σε στοιχειώδεις επιφάνειες που έχουν όλες το ίδιο εμβαδό ΔS και έτσι ισχύει: $\Sigma\Delta S=4\pi R^2$. Η γωνία φ που σχηματίζεται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και την κάθετη στη στοιχειώδη επιφάνεια είναι για όλη την επιφάνεια μηδέν, διότι το πεδίο είναι ακτινικό και συμμετρικό. Εφαρμόζοντας τον τύπο 8.2 βρίσκουμε:

$$\Phi_{o\lambda}=\Sigma\mathcal{E}_i\Delta S\sigma\upsilon\nu 0$$

ή $$\Phi_{o\lambda}=\mathcal{E}\Sigma\Delta S$$

ή $$\Phi_{o\lambda}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}4\pi R^2$$

ή $$\boxed{\Phi_{o\lambda}=\frac{q}{\varepsilon_o}} \qquad (8.3)$$

Ο τύπος (8.3) φανερώνει ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη προς το ηλεκτρικό φορτίο που δημιουργεί το πεδίο και είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της σφαίρας. Πράγματι, αν θεωρήσουμε άλλη σφαίρα ομόκεντρη της πρώτης αλλά διπλάσιας ακτίνας, τότε η ροή που θα περάσει από αυτή είναι:

$$\Phi_{o\lambda}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(2R)^2}4\pi(2R)^2=\frac{q}{\varepsilon_o}$$

Το συμπέρασμα αυτό μπορούσε να το αναμένει κανείς, αφού η ολική ροή εκφράζει το πλήθος των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από τη σφαιρική επιφάνεια και είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις. Κατά συνέπεια, αν θεωρήσουμε μια κλειστή επιφάνεια οποιασδήποτε μορφής, που περιβάλλει το φορτίο +q, τότε η ολική ηλεκτρική ροή $\Phi_{o\lambda}$ που θα διέρχεται από αυτή δίνεται από τη σχέση (8.3).

Στην περίπτωση που η κλειστή επιφάνεια περικλείει πολλά φορτία, η σχέση (8.3) γράφεται:

$$\Phi_{o\lambda}=\frac{1}{\varepsilon_o}\Sigma q \qquad (8.4)$$

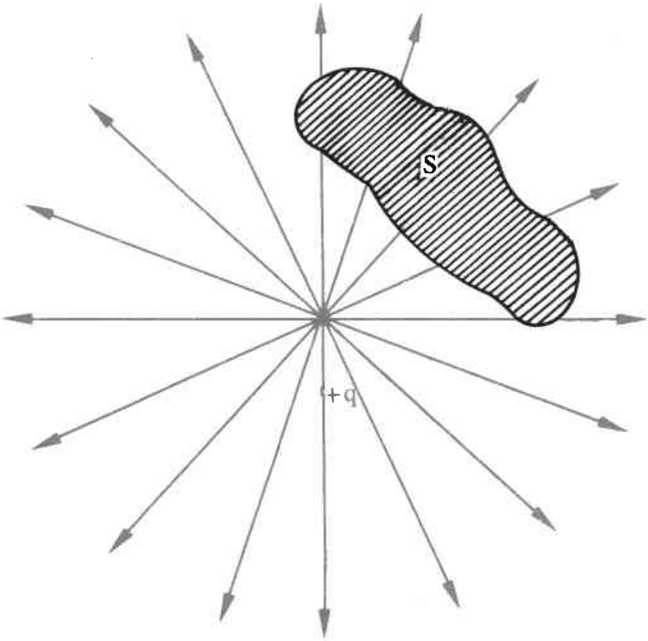
Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (8.2) και (8.4), προκύπτει:

$$\boxed{\Sigma\mathcal{E}_i\Delta S_i\sigma\upsilon\nu\varphi_i=\frac{1}{\varepsilon_o}\Sigma q} \qquad (8.5)$$

Η σχέση (8.5) αποτελεί το νόμο του Gauss ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: **Η**

ολική ηλεκτρική ροή, που διέρχεται από μια υποθετική κλειστή επιφάνεια, οποιουδήποτε σχήματος ισούται με το αλδεγρικό άθροισμα των φορτίων που περικλείονται από αυτή, προς τη διηλεκτρική σταθερά $ε_o$ του κενού.

Στην περίπτωση που η κλειστή επιφάνεια S δεν περιέχει φορτία, σχ. 8.3. η ολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια είναι μηδέν, γιατί όσες δυναμικές γραμμές εισέρχονται σ' αυτή τόσες και εξέρχονται.



Σχ. 8.3.

Ο νόμος του Gauss που συσχετίζει την ηλεκτρική ροή με το ηλεκτρικό φορτίο σε μερικές περιπτώσεις προσφέρεται για τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.

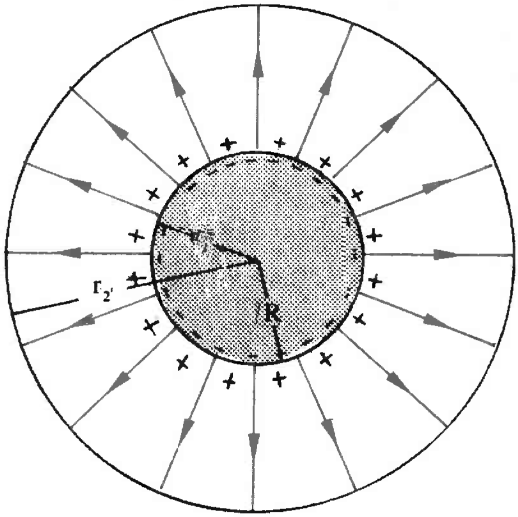
8.3. Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου με το νόμο του Gauss

Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση $\vec{\mathcal{E}}$ του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από το κέντρο μικρής κοίλης φορτισμένης σφαίρας που βρίσκεται στο κενό (σχ. 8.4). Έστω q το φορτίο της σφαίρας και R η ακτίνα της. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $r \geq R$

β) $r < R$

Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε ότι η φορτισμένη σφαίρα περιβάλλεται από ομόκεντρη σφαιρική επιφάνεια S που έχει ακτίνα r_2>R. Λόγω της συμμε-



Σχ. 8.4.

τρίας στην κατανομή του φορτίου, δεχόμαστε ότι και το πεδίο θα έχει ακτινική συμμετρία, με συνέπεια η ένταση να έχει σταθερό μέτρο σε απόσταση r_2. Έτσι η ηλεκτρική ροή θα είναι:

$$\Phi_{ολ} = S\mathcal{E}$$

ή $$\Phi_{ολ} = 4\pi r_2^{\,2}\mathcal{E}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss προκύπτει:

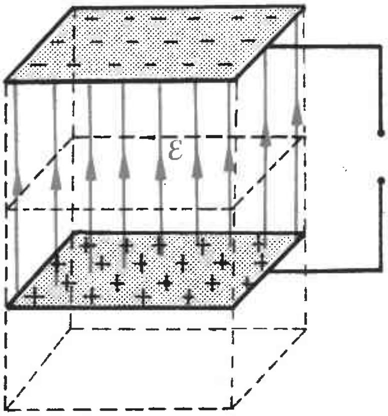
$$4\pi r_2^2\,\mathcal{E} = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_2^2}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση που το φορτίο της σφαίρας είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της.

Στη δεύτερη περίπτωση, που ζητάμε την ένταση $\vec{\mathcal{E}}$ του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας, θεωρούμε μια σφαιρική επιφάνεια που έχει το ίδιο κέντρο με τη φορτισμένη σφαίρα, σχ.8.4. Η ακτίνα αυτής της υποθετικής σφαιρικής επιφάνειας είναι λίγο μικρότερη από την ακτίνα της φορτισμένης σφαίρας. Επειδή δεν περικλείονται φορτία, η ολική ηλεκτρική ροή είναι μηδέν, $\Phi_{ολ}=0$ από την οποία προκύπτει ότι $\mathcal{E}=0$. Για κάθε άλλη επιφάνεια στο εσωτερικό της σφαίρας προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα και συνεπώς έχουμε ότι για $r<R$ η ένταση $\mathcal{E}=0$.

8.4. Υπολογισμός της χωρητικότητας πυκνωτή με το νόμο του Gauss

Θεωρούμε τον πυκνωτή του σχήματος 8.5, ο οποίος έχει παράλληλους οπλισμούς και φέρει φορτίο q. Επειδή οι δυναμικές γραμμές περιορίζονται στο χώρο μεταξύ των οπλισμών, θεωρούμε μία κλειστή πρισματική επιφάνεια που



Σχ. 8.5.

περιβάλλει μόνο τον έναν οπλισμό και εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss γι' αυτή. Δεδομένου ότι το πεδίο είναι ομογενές και το φορτίο του οπλισμού είναι q, έχουμε:

$$\Phi_{o\lambda}=\mathcal{E}\,S=\frac{q}{\varepsilon_o},$$

όπου η ένταση $\mathcal{E}$ του πεδίου είναι:

$$\mathcal{E}=\frac{V}{l}$$

Το V είναι η τάση μεταξύ των οπλισμών και το l η μεταξύ τους απόσταση. Εξάλλου η χωρητικότητα C ισούται με

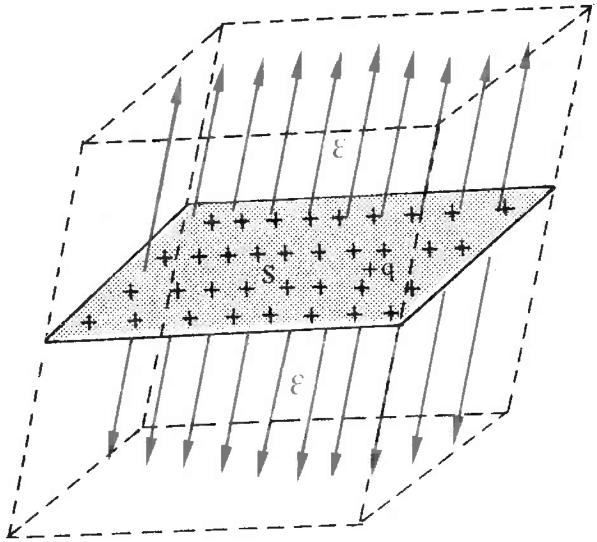
$$C=\frac{q}{V}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$C=\varepsilon_o\frac{S}{l}$$

8.5. Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από επίπεδη φορτισμένη επιφάνεια

Έστω ότι η επίπεδη επιφάνεια έχει εμβαδόν S, φορτίο +q και ότι το πεδίο που δημιουργείται είναι ομογενές, σχ. 8.6.



Σχ. 8.6.

Θεωρούμε μια πρισματική επιφάνεια που περιβάλλει τη φορτισμένη επιφάνεια, όπως εικονίζεται στο σχ. 8.6. Η ολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την υποθετική αυτή επιφάνεια είναι:

$$\Phi_{ολ} = \mathcal{E}S + \mathcal{E}S = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\text{ή} \qquad 2\mathcal{E}S = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\text{ή} \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{q}{2S}$$

Το πηλίκο $\frac{q}{S}$ ονομάζεται επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

8.6. Νόμος του Ampere

Θεωρούμε έναν ευθύγραμμο αγωγό μεγάλου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Γνωρίζουμε ότι γύρω από τον αγωγό δημιουργείται μαγνητικό πεδίο που το μέτρο της μαγνητικής του επαγωγής σε απόσταση r από τον αγωγό είναι:

$$\boxed{B=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{r}} \qquad (8.6)$$

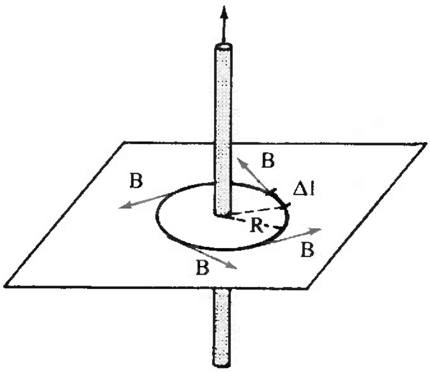
Το μ_o είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Έστω ένας κύκλος ακτίνας R, που το κέντρο του είναι ένα σημείο του αγωγού και το επίπεδό του είναι κάθετο σ'αυτόν, σχ. 8.7. Χωρίζουμε την περιφέρεια του κύκλου σε ν στοιχειώδη τμήματα, Δl_1, Δl_2, Δl_3... Η μαγνητική επαγωγή σε καθένα από αυτά έχει μέτρο

$$B_1=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{R},$$

$$B_2=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{R},$$

$$B_3=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{R} \quad \text{κτλ}$$



Σχ. 8.7.

Τα ανύσματα της μαγνητικής επαγωγής είναι εφαπτόμενα στα αντίστοιχα στοιχειώδη τμήματα και βρίσκονται στο επίπεδο του κύκλου.

Πολλαπλασιάζουμε κάθε άνυσμα με το αντίστοιχο στοιχειώδες τμήμα και αθροίζουμε τα γινόμενα.

Έτσι παίρνουμε:

$$B_1\Delta l_1+B_2\Delta l_2+B_3\Delta l_3+\ldots=\Sigma B_i\Delta l_i$$

Επειδή στην προκειμένη περίπτωση το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής είναι σταθερό για όλα τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου, το άθροισμα γράφεται:

$$\Sigma B_i\Delta l_i=B_i(\Delta l_1+\Delta l_2+\ldots+\Delta l_\nu)$$

Αλλά $$\Delta l_1+\Delta l_2+\ldots\Delta l_\nu=2\pi R$$

$$\text{και} \qquad B_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

οπότε έχουμε:

$$\Sigma B_i \Delta l_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2I}{R}2\pi R$$

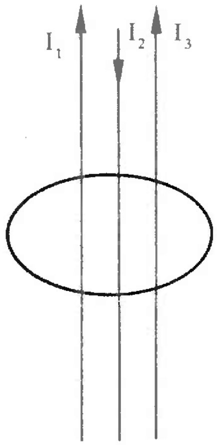
$$\text{ή} \qquad \Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I \qquad (8.7)$$

Στην περίπτωση που ο κύκλος περιβάλλει περισσότερους από ένα αγωγούς, η σχέση (8.7) γράφεται:

$$\boxed{\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o \Sigma I} \qquad (8.8)$$

όπου B_i η συνισταμένη μαγνητική επαγωγή στο τμήμα Δl_i, και ΣI το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που διαρρέουν τους αγωγούς. Για το σχ. 8.8.

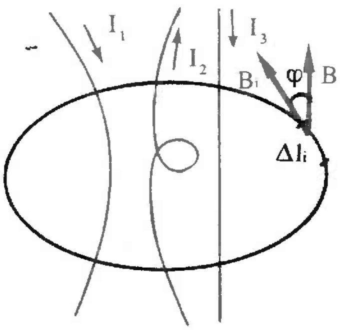
$$\Sigma I = I_1 - I_2 + I_3$$



Σχ. 8.8.

Η σχέση (8.8) ισχύει και στην περίπτωση που οι αγωγοί περιβάλλονται από κλειστή καμπύλη οποιασδήποτε μορφής και αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του νόμου του Ampere που διατυπώνεται ως εξής:

«Κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης που περιβάλλει έναν ή περισσότερους ρευματοφόρους αγωγούς οποιουδήποτε σχήματος π.χ. σχ. 8.9., το αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων των εφαπτομενικών συνιστωσών της μαγνητικής επαγωγής επί τα στοιχειώδη τμήματα Δl_i, στα οποία διαιρείται η καμπύλη, ισούται με το γινόμενο της μαγνητικής διαπερατότητας του κενού επί την ολική ένταση των ρευμάτων που περιβάλλει η καμπύλη».



Σχ. 8.9. B_i είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{B}$ στο τμήμα Δl_i.

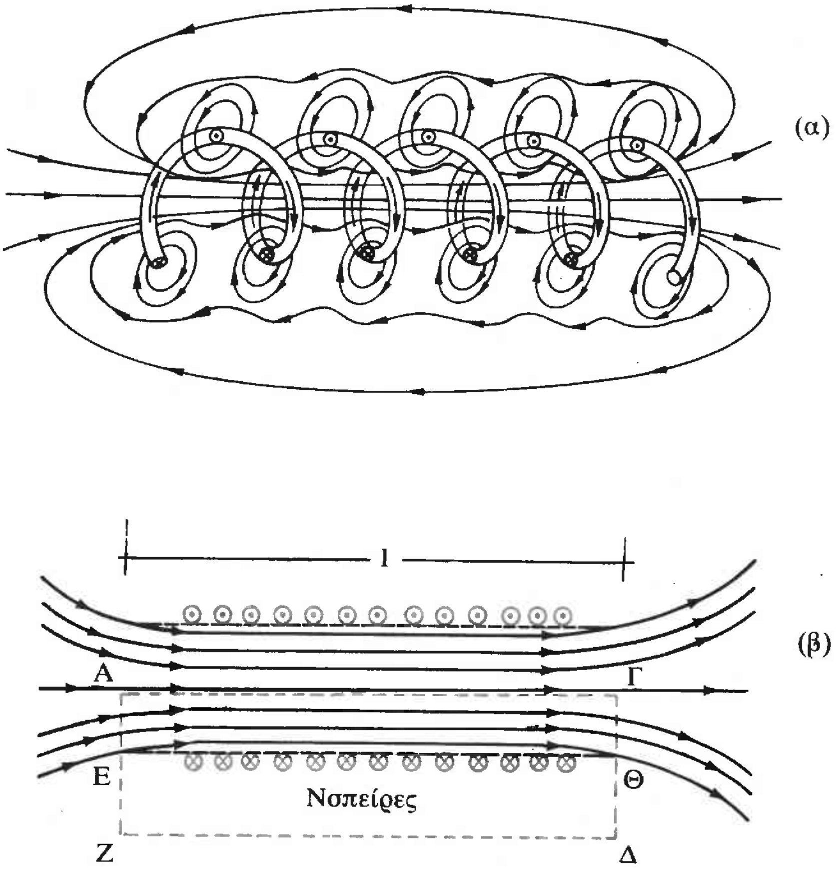
Δηλαδή

$$\boxed{\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I_{ολ}} \qquad (8.9)$$

όπου $I_{ολ} = \Sigma I$ και B_i οι εφαπτομενικές συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής στα τμήματα Δl_i.

8.7. Υπολογισμός της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό σωληνοειδούς

Ας θεωρήσουμε σωληνοειδές που έχει N σπείρες, μήκος l και διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I, σχ. 8.10α.



Σχ. 8.10.

Το πείραμα δείχνει ότι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο εξωτερικό του σωληνοειδούς είναι τόσο ασθενές, ώστε να θεωρείται αμελητέο συγκρινόμενο με το ομογενές πεδίο που δημιουργείται στο εσωτερικό του.

Για να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere. Θεωρούμε μία κατά μήκος τομή του σωληνοειδούς και φανταζόμαστε την κλειστή γραμμή ΑΓΔΖΑ. Από το σχήμα 8.10β έχουμε:

$$\Sigma B_i \Delta l_i = B(\text{ΑΓ}) + 0(\text{ΓΘ}) + 0(\text{ΘΔ}) +$$

$$+ 0(\text{ΔΖ}) + 0(\text{ΖΕ}) + 0(\text{ΕΑ}) = \mu_0 N I$$

Η μαγνητική επαγωγή στα τμήματα ΘΔ, ΔΖ, ΖΕ είναι μηδέν, γιατί βρίσκονται εκτός του σωληνοειδούς, ενώ στα τμήματα ΓΘ και ΕΑ η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{B}$ είναι μηδέν. Το $I_{ολ}$ είναι ίσο με ΝΙ, γιατί στην κλειστή γραμμή περιλαμβάνονται οι Ν σπείρες του σωληνοειδούς. Συνεπώς η τελευταία σχέση γράφεται:

$$B(ΑΓ)=\mu_o NI$$

$$\text{ή} \quad B=\frac{\mu_o NI}{ΑΓ}$$

και, επειδή ΑΓ=l,

$$\boxed{B=\mu_o\frac{NI}{l}} \qquad (8.10)$$

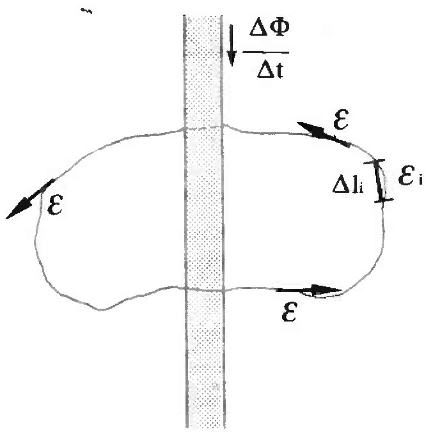
Η σχέση (8.10) μας παρέχει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό του σωληνοειδούς σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά και την **ένταση** του ρεύματος που το διαρρέει. Στην περίπτωση που στο εσωτερικό του υπάρχει υλικό που έχει μαγνητική διαπερατότητα μ, η σχέση (8.10) γράφεται:

$$B'=\mu B=\mu\mu_o\frac{NI}{l} \qquad (8.11)$$

8.8. Γενικότερη διατύπωση του νόμου της επαγωγής (νόμος του Faraday)

Ας θεωρήσουμε τον κλειστό αγωγό σχ. 8.11, που περιβάλλει το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Όπως είδαμε στην παράγραφο 6.4 γύρω από το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο. Έστω ότι σε ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού Δl_i, η εφαπτομενική συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\mathcal{E}_i$.

Αποδεικνύεται ότι, αν αθροίσουμε τα γινόμενα $\mathcal{E}_i\Delta l_i$, τότε το άθροισμα $\Sigma\mathcal{E}_i\Delta l_i$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής. Δηλαδή:



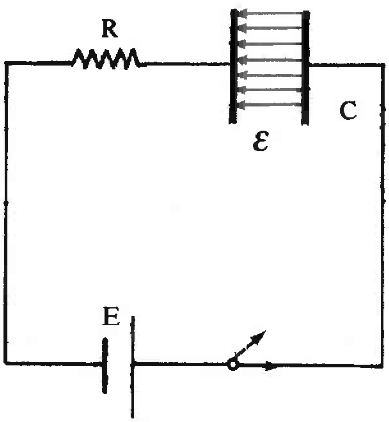
Σχ. 8.11.

$$\Sigma \mathcal{E}_i \Delta l_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \qquad (8.12)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί τη γενικότερη διατύπωση του νόμου της επαγωγής, που είναι γνωστή και ως νόμος του Faraday.

8.9. Ρεύμα μετατόπισης

Ο πρώτος κανόνας του Kirchhoff που λέει ότι όσο ρεύμα προσέρχεται σε ένα κόμβο τόσο και απομακρύνεται από αυτόν, ή ΣΙ=0, δεν μπορεί να εφαρμοστεί κατά τη φόρτιση ή την εκφόρτιση ενός πυκνωτή. Αυτό συμβαίνει, γιατί ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του δε διαρρέεται από ρεύμα, με αποτέλεσμα να δημιουργείται συσσώρευση φορτίου στους οπλισμούς.



Σχ. 8.12.

Ο James Maxwell (1831-1879) έδειξε ότι είναι δυνατό να γενικευτούν οι αντιλήψεις μας για το ηλεκτρικό ρεύμα, ώστε να μπορούμε να λέμε ότι και ο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή χώρος διαρρέεται από ρεύμα που έχει ίση ένταση με εκείνο που διαρρέει το υπόλοιπο κύκλωμα. Η γενίκευση αυτή ξεκίνησε από τη σκέψη ότι κατά τη φόρτιση το φορτίο του πυκνωτή αυξάνεται με αποτέλεσμα να αυξάνονται ανάλογα η διαφορά δυναμικού και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών. Συνεπώς κάθε μεταβολή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα κατά τη φόρτιση, ή την εκφόρτιση του πυκνωτή, οδηγεί σε μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο των οπλισμών. Αν λοιπόν σ' αυτές τις μεταβολές της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου **αντιστοιχίσουμε** ένα ρεύμα, μπορούμε να θεωρούμε ότι και ο χώρος μεταξύ των οπλισμών διαρρέεται από αυτό το ρεύμα και συνεπώς ικανοποιείται ο πρώτος κανόνας του Kirchhoff.

Το ρεύμα αυτό λέγεται **ρεύμα μετατόπισης I_μ** και ο υπολογισμός του σε συνάρτηση με τις μεταβολές της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$ γίνεται ως εξής:

Ας θεωρήσουμε ότι ο πυκνωτής στο κύκλωμα του σχήματος 8.12 δεν είναι πλήρως φορτισμένος. Αν η τάση στα άκρα του είναι V_c, τότε το φορτίο Q του πυκνωτή και η ένταση $\mathcal{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών του θα είναι αντίστοιχα

$$Q=CV_c \tag{8.13}$$

$$\mathcal{E}=\frac{V_c}{l} \tag{8.14}$$

όπου l η απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8.13) και (8.14) παίρνουμε για το φορτίο Q.

$$Q=\mathcal{E}Cl \tag{8.15}$$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 το φορτίο του πυκνωτή είναι Q_1 και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathcal{E}_1$. Σύμφωνα με τη σχέση (8.15) θα ισχύει:

$$Q_1=\mathcal{E}_1 Cl \tag{8.16}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+\Delta t$ θα ισχύει:

$$Q_2=\mathcal{E}_2 Cl \tag{8.17}$$

Κατά συνέπεια σε χρόνο $\Delta t=t_2-t_1$ η μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου είναι $Q_2-Q_1 = \Delta Q$ και η μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, $\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1=\Delta\mathcal{E}$. Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (8.17) και (8.16), παίρνουμε:

$$Q_2-Q_1=Cl(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)$$

$$\text{ή} \qquad \Delta Q=Cl\Delta\mathcal{E} \tag{8.18}$$

Διαιρώντας την (8.18) δια του Δt έχουμε:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Cl\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} \tag{8.19}$$

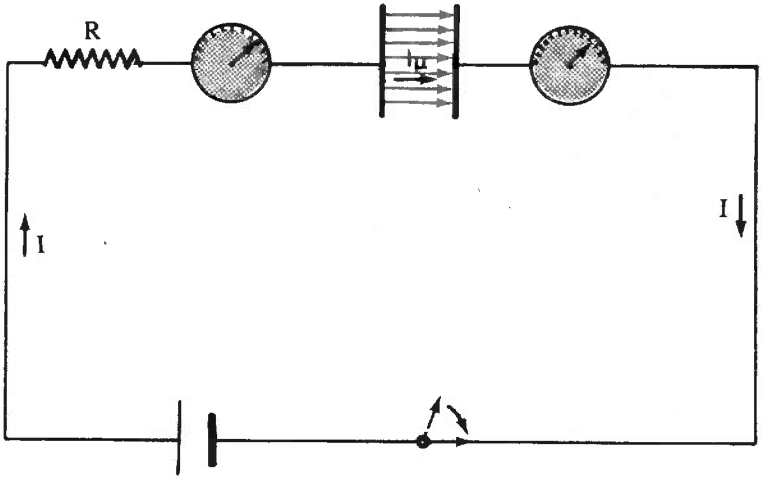
Το πρώτο μέλος της (8.19) παριστάνει το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Το δεύτερο μέλος έχει διαστάσεις έντασης ρεύματος, σχετίζεται άμεσα με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, και είναι το ρεύμα μετατόπισης Iμ. Δηλαδή η ένταση του ρεύματος μετατόπισης είναι $I_\mu=Cl\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}$ και θεωρείται ότι διαρρέει το χώρο μεταξύ των οπλισμών. Επειδή $C=\varepsilon_o\frac{S}{l}$ το ρεύμα μετατόπισης μπορεί να γραφεί

$$\boxed{I_\mu=\varepsilon_o S\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}} \tag{8.20}$$

Όταν ο πυκνωτής φορτιστεί πλήρως, το ρεύμα I του κυκλώματος μηδενίζε-

ται. Τότε όμως και το ρεύμα μετατόπισης Ιμ γίνεται μηδέν, γιατί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αποκτά σταθερή τιμή και η μεταβολή $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t}$ είναι μηδέν.

Μπορούμε λοιπόν να υποστηρίξουμε ότι κατά τη φόρτιση, ή την εκφόρτιση του πυκνωτή, το ρεύμα δε διακόπτεται, αλλά με τη γενικότερη έννοια που του δώσαμε διαρρέει όλο το κύκλωμα (σχ. 8.13).

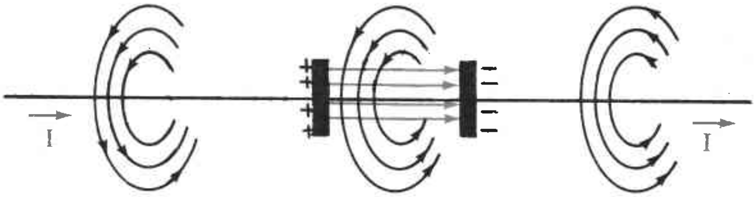


Σχ. 8.13.

Βέβαια μεταξύ των δυο ρευμάτων υπάρχει μια ουσιαστική διαφορά: Το ρεύμα Ι που διαρρέει το κύκλωμα μετριέται πειραματικά, ενώ το ρεύμα μετατόπισης Ιμ δεν είναι μετρήσιμο.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς ποια σκοπιμότητα υπηρετεί η εισαγωγή της έννοιας του ρεύματος μετατόπισης. Με τις διευθετήσεις που έγιναν ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, γιατί και ο χώρος μεταξύ των οπλισμών διαρρέεται από ρεύμα. Αλλά δεν ήταν αυτός ο κύριος σκοπός του Maxwell. Αυτός γνώριζε ότι, αν ένας ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα, δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι κλειστές καμπύλες που τον περιβάλλουν. Το πρόβλημα που τον απασχολούσε ήταν τι συμβαίνει με το μαγνητικό πεδίο στο χώρο που περιβάλλει τον πυκνωτή. Σκέφτηκε λοιπόν ότι, αν ο χώρος μεταξύ των οπλισμών διαρρέεται από ένα ρεύμα, Ιμ, τότε το μαγνητικό πεδίο δε διακόπτεται, αλλά περιβάλλει και το χώρο του πυκνωτή κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο που περιβάλλει και το υπόλοιπο κύκλωμα, σχ. 8.14.

Η σύλληψη ήταν μεγαλοφυής. Στις μεταβολές της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου αντιστοίχισε μία ένταση ρεύματος που δημιουργούσε μαγνητικό πεδίο. Έτσι σε κάθε μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ



Σχ. 8.14.

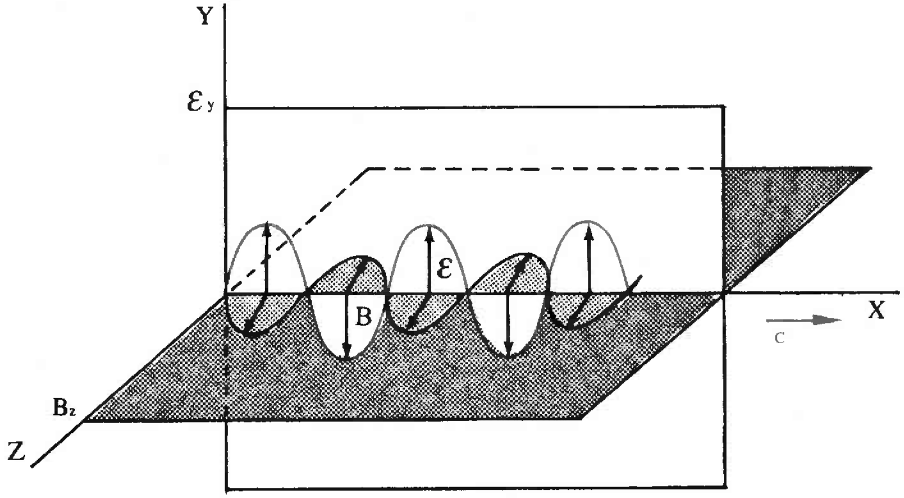
των οπλισμών δημιουργείται μαγνητικό πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές το περιβάλλουν και είναι κάθετες σ' αυτό. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται στην πράξη και αποτελεί την βάση της θεωρίας των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Έτσι το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται όχι μόνο από τα ρεύματα που διαρρέουν αγωγούς αλλά και από τη μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου.

8.10. Ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell

Αφορμή για να διατυπώσει ο Maxwell την ηλεκτρομαγνητική του θεωρία ήταν τα πειράματα του Oersted και του Faraday καθώς και οι μέχρι τότε γνώσεις για τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό. Αυτός σκέφτηκε ότι ήταν δυνατό να θέσει όλους τους νόμους και τις εξισώσεις που περιγράφουν το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις των πεδίων αυτών με το ηλεκτρικό φορτίο, κάτω από ένα ενιαίο σύστημα εξισώσεων. Οι τέσσερις εξισώσεις, στις οποίες κατέληξε, είναι γνωστές σαν εξισώσεις του Maxwell και έχουν μεγάλη σπουδαιότητα για τη Φυσική, γιατί οδήγησαν σε σημαντικές προβλέψεις, όπως π.χ. ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Άμεση συνέπεια των εργασιών του Mawell ήταν η ενοποίηση του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού σε μια θεωρία που ονομάζεται ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Μετά το Maxwell, άλλοι επιστήμονες, όπως ο Heaviside (1850-1925) και ο Lorentz (1853-1928), αποσαφήνισαν τη θεωρία του και έδωσαν στις εξισώσεις την τελική τους μορφή. Η διατύπωση των εξισώσεων αυτών στηρίζεται στα ανώτερα μαθηματικά και η παρουσίασή τους σε ένα σχολικό εγχειρίδιο εμπεριέχει τον κίνδυνο της υπεραπλούστευσης, η οποία μπορεί να τους στερήσει ένα μέρος από την κομψότητα της έκφρασης και το βάθος της σκέψης που περικλείουν. Η παρουσίασή τους θα γίνει με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, ενώ η μελέτη τους θα είναι κατά κύριο λόγο ποιοτική και θα αποσκοπεί να δείξει τον τρόπο σκέψης του Maxwell.

Ο νόμος του Faraday, σύμφωνα με τον οποίο κάθε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί γύρω του ηλεκτρικό πεδίο και το συμπέρασμα ότι κάθε μετα-

βαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, επέτρεψαν στο Maxwell να διατυπώσει τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού με απλές και συμμετρικές εξισώσεις. Το γεγονός ότι η μεταβολή ηλεκτρικού πεδίου συνοδεύεται από δημιουργία μαγνητικού πεδίου και αντιστρόφως οδήγησαν το Maxwell στη πρόβλεψη ότι όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο ταλαντώνεται, ή γενικότερα επιταχύνεται, πρέπει να εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα που αποτελούνται από ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό και ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση του κύματος. Τα κύματα αυτά έχουν την ίδια συχνότητα και φάση και διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός, σχ. 8.15.



Σχ.. 8.15.

Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell και οι εξισώσεις που την περιγράφουν, δε θαυμάζονται μόνο για τις πρακτικές εφαρμογές, στις οποίες οδήγησαν π.χ. ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τηλεπικοινωνίες κ.ά. όσο γιατί αποτελούν μία από τις μεγαλύτερες συλλήψεις του ανθρώπινου πνεύματος.

Ο Αϊνστάιν είπε ότι: η θεωρητική ανακάλυψη ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, είναι μία από τις μεγαλύτερες κατακτήσεις στην ιστορία της επιστήμης.

8.11 Οι εξισώσεις του Maxwell

Η πρώτη εξίσωση του Maxwell είναι ο νόμος του Gauss για την ηλεκτρική ροή:

$$\Phi_E = \frac{q_{ολ}}{\varepsilon_o} \qquad (8.21)$$

όπου Φ_E η ολική ηλεκτρική ροή και $q_{ολ}$ το συνολικό φορτίο.

Η δεύτερη εξίσωση του Maxwell είναι ο νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό. Αν αντί του ηλεκτρικού φορτίου, η κλειστή υποθετική επιφάνεια περιβάλλει ένα ή περισσότερα μαγνητικά δίπολα, τότε ο νόμος του Gauss για το μαγνητισμό σε πλήρη αναλογία με τη σχέση (8.21) γράφεται

$$\Phi_B = \mu_o \cdot m_{ολ} \qquad (8.22)$$

Στη σχέση (8.22) Φ_B είναι η ολική μαγνητική ροή, $m_{ολ}$ η ολική μαγνητική ποσότητα και μ_o η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Και επειδή δεν μπορούμε να έχουμε ένα μόνο είδος μαγνητικού πόλου, γιατί οι μαγνητικοί πόλοι στη φύση παρουσιάζονται κατά ζεύγη (μαγνητικά δίπολα), μια υποθετική κλειστή επιφάνεια θα περικλείει υποχρεωτικά αντίθετους μαγνητικούς πόλους, που δίνουν $m_{ολ}$ ίσο με μηδέν. Συνεπώς η σχέση (8.22) γράφεται:

$$\Phi_B = 0 \qquad (8.23)$$

και αποτελεί τη δεύτερη εξίσωση του Maxwell.

Η τρίτη εξίσωση του Maxwell εκφράζεται με το νόμο του Faraday:

$$\Sigma \mathcal{E}_i \Delta l_i = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} \qquad (8.24)$$

ότι δηλαδή γύρω από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο που μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη μεταβολή $\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}$ της μαγνητικής ροής.

Η τέταρτη εξίσωση του Maxwell προκύπτει από το νόμο του Ampere

$$\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I_{ολ} \qquad (8.25)$$

Όπως μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς, οι εξισώσεις (8.24) και (8.25)

παρουσιάζουν σημαντικές αναλογίες. Ωστόσο δεν υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ τους. Πράγματι ο νόμος του Ampere έχει στο δεύτερο μέλος του τον παράγοντα $\mu_o I_{ολ}$, ενώ ο νόμος του Faraday δεν περιέχει ανάλογο όρο. Η απουσία ενός τέτοιου όρου δικαιολογείται από το γεγονός ότι δεν υπάρχουν ελεύθεροι μαγνητικοί πόλοι, αλλά ζεύγη σε μορφή διπόλων. Εξάλλου η εξίσωση (8.24) περιέχει το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$, ενώ η (8.25) δεν περιέχει το ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ροής.

Ο Maxwell σκέφτηκε ότι η αντιστοιχία των εξισώσεων θα ήταν πλήρης, αν στο δεύτερο μέλος του νόμου του Ampere προστεθεί όρος της μορφής $\frac{\Delta\Phi_\varepsilon}{\Delta t}$, οπότε η εξίσωση (8.25) γράφεται:

$$\boxed{\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I_{ολ} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\Delta\Phi_\varepsilon}{\Delta t}} \qquad (8.26)$$

Το γινόμενο $\mu_o\varepsilon_o$ στη σχέση αυτή χρησιμεύει για την τακτοποίηση των μονάδων. Δηλαδή να εκφραστεί ο όρος $\mu_o\varepsilon_o\frac{\Delta\Phi_\varepsilon}{\Delta t}$ σε Nt/A, όπως και οι υπόλοιποι.

Η σχέση (8.26) αποτελεί την τέταρτη εξίσωση του Maxwell. Στη σχέση αυτή ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους ισούται με το ρεύμα μετατόπισης I_μ.

Πράγματι όταν η ηλεκτρική ροή $\Phi_\varepsilon = \mathcal{E} S$ μεταβάλλεται, ενώ η επιφάνεια S παραμένει σταθερή, τότε ο ρυθμός μεταβολής $\frac{\Delta\Phi_\varepsilon}{\Delta t}$ θα είναι ανάλογος προς το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}$. Δηλαδή:

$$\frac{\Delta\Phi_\varepsilon}{\Delta t} = S\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} \qquad (8.27)$$

Η σχέση (8.26), λόγω της (8.27), γράφεται:

$$\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I_{ολ} + \mu_o \varepsilon_o S \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} \qquad (8.28)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (8.20) της παραγράφου 8.9, το γινόμενο $\varepsilon_o S\frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}$ είναι το ρεύμα μετατόπισης I_μ και επομένως η 4η εξίσωση του Maxwell μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o (I_{ολ} + I_\mu) \qquad (8.29)$$

Οι εξισώσεις του Maxwell και μερικές από τις πληροφορίες που μας δίνουν, παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Εξίσωση	Πληροφορίες που παρέχει:
1) $\Phi_E = \dfrac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_o}$	1) Νόμος του Coulomb. 2) Συσχετίζει το φορτίο, το πεδίο που προκαλείται απ' αυτό και την ηλεκτρική ροή.
2) $\Phi_B = 0$	Περιγράφει το μαγνητικό πεδίο και παρέχει το γεγονός ότι δεν υπάρχουν απομονωμένοι μαγνητικοί πόλοι.
3) $\Sigma \mathcal{E}_i \Delta l_i = -\dfrac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}$	Γύρω από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργείται μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Εμπεριέχει το νόμο της επαγωγής.
4) $\Sigma B_i \Delta l_i = \mu_o I_{o\lambda} + \mu_o \varepsilon_o S \dfrac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t}$	Μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Εμπεριέχει τον νόμο Biot-Savart, και το πείραμα Oersted.

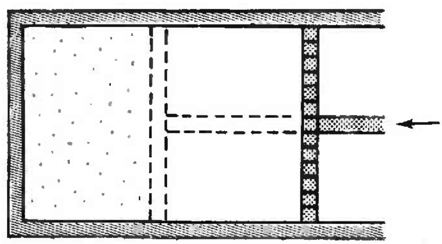
9
Στοιχεία Θερμοδυναμικής

Γενικά

Μια ποσότητα αερίου που βρίσκεται σ' ένα δοχείο όγκου V, λέμε ότι αποτελεί ένα **θερμοδυναμικό σύστημα**. Θερμοδυναμικό σύστημα αποτελεί επίσης ένα στερεό σώμα π.χ. ένας κρύσταλλος ή ένας μαγνήτης κ.ά. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιοριστούμε στη μελέτη αερίων. Ένα θερμοδυναμικό σύστημα π.χ. αέριο μπορεί να περιγραφεί από τις **θερμοδυναμικές μεταβλητές** πίεση, όγκο, θερμοκρασία και μάζα*. **Όταν η πίεση P, η πυκνότητα d και η θερμοκρασία T μιας ποσότητας αερίου έχουν η κάθε μια σταθερή τιμή σε όλη την έκταση του όγκου του, τότε λέμε ότι το αέριο βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ή απλά ισορροπίας.** Μια τέτοια κατάσταση παριστάνεται σ' ένα διάγραμμα P - V μ' ένα σημείο και αντίστροφα ένα σημείο πάνω στο επίπεδο P - V παριστάνει ορισμένη κατάσταση ισορροπίας του θερμοδυναμικού συστήματος.

9.1. Αντιστρεπτές και μη αντιστρεπτές μεταβολές

Ας θεωρήσουμε μια ποσότητα αερίου, που περιέχεται μέσα στο θερμικά μονωμένο κύλινδρο του σχήματος 9.1. Το ανοικτό άκρο του κυλίνδρου κλίνεται με έμβολο το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Αν υποθέσουμε ότι σπρώχνουμε το έμβολο σιγά-σιγά είναι δυνατό για κάθε θέση του, να επιτυγχάνεται κατάσταση ισορροπίας του αερίου.



Σχ. 9.1

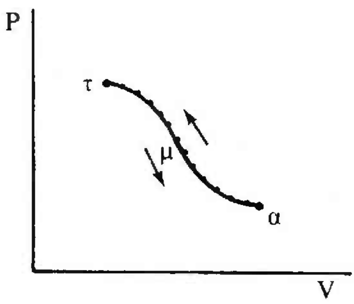
Οι τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας του αερίου, που αντιστοιχούν σε κάθε θέση του εμβόλου, δηλαδή σε κάθε κατάσταση ισορροπίας, συνδέονται με μια σχέση.

$$P = f(V, T) \tag{9.1}$$

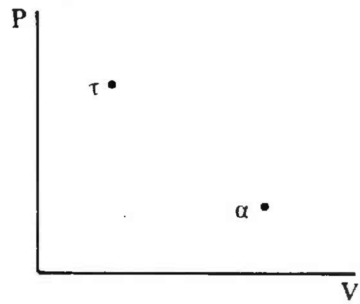
Σ' ένα διάγραμμα P - V η μεταβολή του αερίου από την αρχική κατάσταση ισορροπίας $\alpha(P_\alpha, V_\alpha, T_\alpha)$ στην τελική κατάσταση ισορροπίας $\tau(P_\tau, V_\tau, T_\tau)$, μπορεί να παρασταθεί από τη συνεχή καμπύλη $\alpha \rightarrow \mu \rightarrow \tau$ του σχ. 9.2.

*Άλλα θερμοδυναμικά συστήματα π.χ. ένας κρύσταλλος ή ένας μαγνήτης περιγράφονται από διαφορετικές θερμοδυναμικές μεταβλητές όπως μαγνήτιση, συγκέντρωση κ.τ.λ.

Μετακινώντας το έμβολο σιγά-σιγά κατά την αντίθετη φορά μπορούμε να διαγράψουμε την ίδια μεταβολή κατά την αντίθετη κατεύθυνση τ → μ → α. **Μια τέτοια μεταβολή που αποτελείται από μια σειρά διαδοχικών καταστά-**



Σχ. 9.2. Αντιστρεπτή μεταβολή.



Σχ. 9.3. Μη αντιστρεπτή μεταβολή.

σεων ισορροπίας λέγεται αντιστρεπτή και μπορεί να διαγραφεί και κατά τις δυο φορές. Είναι βέβαια δύσκολο να φανταστούμε πως ένα άεριο σε ισορροπία μπορεί να μεταβάλλεται και να παραμένει σε ισορροπία ενώ μεταβάλλεται. Γι'αυτό το σωστό είναι να λέμε ότι το αέριο κατά την αντιστρεπτή μεταβολή περνάει από μια διαδοχική σειρά **σχεδόν** καταστάσεων ισορροπίας και όσο πιο αργά γίνεται η μεταβολή τόσο προσεγγίζεται καλύτερα η κατάσταση ισορροπίας.

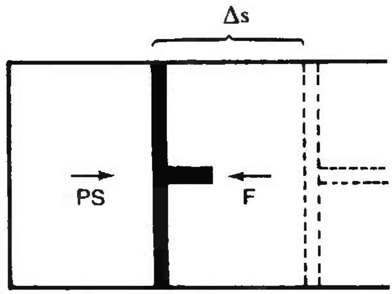
'Ενα άλλο παράδειγμα στο οποίο προσεγγίζεται η αντιστρεπτή διαδικασία είναι το εξής. Προσφέροντας σιγά-σιγά μικρά ποσά θερμότητας σ' ένα δοχείο που περιέχει νερό και πάγο σε θερμοκρασία 0°C, είναι δυνατό να προκαλέσουμε τήξη μέρους του πάγου σε νερό. Αφαιρώντας από το ίδιο δοχείο θερμότητα μπορούμε να προκαλέσουμε πήξη του νερού σε πάγο και να επαναφέρουμε το σύστημα νερό-πάγος στην αρχική του κατάσταση.

Αντίθετα αν, στην περίπτωση του αερίου που μελετήσαμε, γιά να πάμε από την κατάσταση α στην κατάσταση τ, μετακινήσουμε απότομα το έμβολο, κτυπώντας το π.χ. με ένα σφυρί, τότε οι ενδιάμεσες καταστάσεις από τις οποίες περνάει το αέριο δεν είναι καταστάσεις ισορροπίας και επομένως δεν περιγράφονται από την εξίσωση (9.1). Μια τέτοια μεταβολή παριστάνεται με δυο σημεία, σχ. 9.3 και λέγεται **μη αντιστρεπτή** μεταβολή. 'Ενα άλλο παράδειγμα μη αντιστρεπτής μεταβολής είναι το εξής. Αν φέρουμε σε επαφή δυο σώματα που είναι αγωγοί της θερμότητας και έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες, τότε θερμότητα θα μετακινηθεί από το θερμότερο προς το ψυχρότερο σώμα μέχρις ότου οι θερμοκρασίες των δυο σωμάτων εξισωθούν. Η αντίθετης φοράς μεταβολή δεν έχει ποτέ παρατηρηθεί.

Όλες οι μεταβολές στη φύση είναι μη αντιστρεπτές και συμβαίνουν με ανταλλαγή θερμότητας ή ενέργειας μέσω έργου μεταξύ του συστήματος που υφίσταται τη μεταβολή και του περιβάλλοντος. Στην πράξη οι διαδικασίες που γίνονται πολύ αργά και στις οποίες οι τριβές μπορεί να θεωρηθούν αμελητέες, είναι συχνά καλές προσεγγίσεις αντιστρεπτών διαδικασιών και σαν τέτοιες θεωρούνται στη συνέχεια οι μεταβολές των αερίων που αναφέρονται.

9.2. Έργο κατά την εκτόνωση αερίου

Ας θεωρήσουμε τον κύλινδρο του σχήματος 9.4, του οποίου το ανοικτό άκρο κλίνεται από έμβολο εμβαδού S, που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και στον οποίο περιέχεται αέριο υπό πίεση P. Όπως γνωρίζουμε, αν η δύναμη P S, που ασκεί το άεριο στο έμβολο είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη που ασκείται εξωτερικά σ' αυτό, το έμβολο κινείται προς τα δεξιά και η μεταβολή αυτή στην κατάσταση του αερίου ονομάζεται **εκτόνωση**. Επίσης γνωρίζουμε, ότι αν το έμβολο ισορροπεί σε κάποια θέση τότε ισχυει $F = P \cdot S$



Σχ. 9.4

Αν επιτρέψουμε στο έμβολο να κινηθεί προς τα δεξιά για μικρό διάστημα Δs, μπορούμε να θεωρούμε ότι η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή. Τότε η ενέργεια που μεταφέρεται από το αέριο στο περιβάλλον είναι:

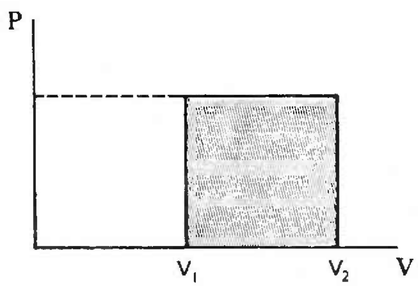
$$W = F \cdot \Delta s = P \cdot S \Delta s \Rightarrow \boxed{W = P \cdot \Delta V} \quad (9.2)$$

όπου ΔV η μεταβολή του όγκου του αερίου.

Στην περίπτωση που μπορούμε να πετύχουμε μεταβολή του όγκου του αερίου από V_1 σε V_2, χωρίς να μεταβληθεί η πίεση P, τότε το έργο W είναι:

$$W = P(V_2 - V_1)$$

και σε διάγραμμα P–V παριστάνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδό του σχήματος 9.5.

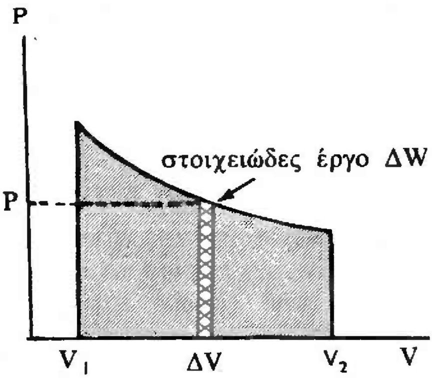


Σχ. 9.5

Στη γενικότερη περίπτωση που η πίεση μεταβάλλεται κατά τη μεταβολή του όγκου του αερίου, σχ. 9.6, το έργο υπολογίζεται ως εξής:

Θεωρούμε μικρές μεταβολές του όγκου του αερίου ΔV, τέτοιες που η πίεση κατά τη διάρκεια αυτών των μεταβολών να μπορεί να λαμβάνεται σταθερή και ίση προς P. Τότε το γινόμενο P ΔV παριστάνει ένα στοιχειώδες έργο ΔW. Όλο το έργο W κατά την εκτόνωση του αερίου μεταξύ των όγκων V_1 και V_2, θα υπολογίζεται με τρόπο παρόμοιο σαν και αυτό που είδαμε στην παράγραφο 1.3 και επομένως θα ισούται με το άθροισμα των στοιχειωδών έργων. Δηλαδή

$$W = \Sigma \Delta W = \Sigma P \ \Delta V \qquad (9.3)$$



Σχ. 9.6

Το έργο W παριστάνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης, του άξονα των όγκων και των δυο παραλλήλων στα σημεία V_1 και V_2, σχ. 9.6. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι η σχέση (9.3) ισχύει μόνο για αντιστρεπτές μεταβολές. Για μη αντιστρεπτές μεταβολές, όπως συμβαίνει στη φύση, το έργο W είναι μικρότερο από το άθροισμα ΣP ΔV

9.3. Εσωτερική ενέργεια 1991

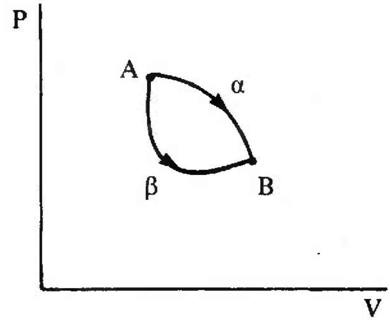
Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι κατά την εκτόνωση του αερίου, ενέργεια μεταφέρεται μέσω του έργου P ΔV στο περιβάλλον. Από πού όμως προέρχεται η ενέργεια αυτή; Η απάντηση είναι ότι η ενέργεια αυτή υπάρχει στο αέριο και ονομάζεται εσωτερική ενέργεια. Επειδή οι δομικοί λίθοι ενός αερίου, π.χ. τα μόριά του, κινούνται, έχουν κινητική ενέργεια. Επίσης λόγω των μεταξύ τους δυνάμεων έχουν και δυναμική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια δεν οφείλεται μόνο στη μεταφορική τους κίνηση αλλά και σε ταλαντώσεις και περιστροφές των ατόμων του μορίου.

Λέγοντας **εσωτερική ενέργεια** ενός αερίου ή γενικότερα ενός συστήματος, εννοούμε το άθροισμα των ενεργειών των δομικών λίθων του συστήματος λόγω της κίνησής τους ή λόγω της θέσης τους.

Η εσωτερική ενέργεια είναι ένα μέγεθος του οποίου μόνο οι μεταβολές είναι μετρήσιμες και επομένως μας ενδιαφέρουν.

Πρέπει να τονισθούν δυο σημαντικές ιδιότητες της εσωτερικής ενέργειας: **Πρώτον**, στην περίπτωση που ένα αέριο βρίσκεται σε συνήθεις συνθήκες έχει χαμηλή πυκνότητα με αποτέλεσμα οι μεταξύ των μορίων δυνάμεις να θεωρούνται αμελητέες. Σ' αυτές τις συνθήκες η εσωτερική του ενέργεια,

όπως θα δούμε, είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας και της μάζας του. **Δεύτερον,** η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας μεταξύ δυο καταστάσεων ισορροπίας Α και Β εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις αυτές και όχι από τον τρόπο με τον οποίο έγινε η μεταβολή από το Α στο Β. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τις μεταβολές α και β ενός αερίου, σχ. 9.7, που συνδέουν δυο καταστάσεις ισορροπίας Α και Β. Όπως μπορεί να αποδειχθεί η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ΔU του αερίου είναι ίδια και στις δυο μεταβολές α και β.



Σχ. 9.7

Ακριβώς όπως η δυναμική ενέργεια ενός σώματος στο πεδίο βαρύτητας είναι συνάρτηση μόνο της θέσης του και επομένως η μεταβολή της μεταξύ δυο θέσεων δεν εξαρτάται από το δρόμο που ενώνει αυτές τις θέσεις, έτσι και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας εξαρτάται μόνο από την αρχική κατάσταση Α και την τελική κατάσταση Β και όχι από τον τρόπο με τον οποίο έγινε η μεταβολή από το Α στο Β.

9.4. Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής είναι μια άλλη διατύπωση της αρχής διατήρησης της ενέργειας και γι' αυτό ούτε αποδεικνύεται ούτε μπορεί να εξαχθεί από άλλους νόμους. Είναι απλώς μια γενίκευση των αποτελεσμάτων που προέρχονται από μετρήσεις σε φαινόμενα, όπου ανταλλάσσονται ποσά θερμικής ενέργειας και εκφράζει το γεγονός ότι η ενέργεια διατηρείται. Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός συστήματος κατά ΔU εμφανίζεται με τη μορφή μιας **οργανωμένης** ποσότητας ενέργειας W και μιας **ανοργάνωτης*** ποσότητας ενέργειας Q την οποίαν ονομάζουμε θερμότητα, δηλαδή ισχύει:

$$\Delta U = Q - W$$

Έτσι η μαθηματική διατύπωση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου έχει την απλή μορφή:

$$\boxed{Q = \Delta U + W} \qquad (9.4)$$

όπου: Q η προσφερόμενη θερμότητα στο σύστημα

ΔU η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος

W η ενέργεια που μεταφέρεται μέσω του μηχανικού έργου από το σύστημα στο περιβάλλον.

---

* Γιατί οι φορείς της ενέργειας αυτής (π.χ. μόρια) κινούνται κατά άτακτο τρόπο.

Σύμφωνα με τη σημασία που αποδώσαμε στο έργο στην παράγραφο 1.1, αν ένα αέριο συμπιεστεί οπότε μεταφέρεται σ' αυτό ενέργεια μέσω του έργου W, τότε για το αέριο το έργο είναι θετικό, ενώ για το περιβάλλον που πρόσφερε την ενέργεια το έργο είναι αρνητικό. Αντίστροφα όταν ένα αέριο εκτονώνεται προσφέροντας ενέργεια στο περιβάλλον μέσω έργου W, τότε το έργο για το περιβάλλον είναι θετικό, ενώ για το αέριο αρνητικό. Επειδή οι μεταβολές των αερίων εφαρμόζονται στη μελέτη των θερμικών μηχανών οι οποίες θέλουμε να μας προσφέρουν ενέργεια μέσω του έργου W, θα θεωρούμε ότι το έργο κατά την εκτόνωση είναι θετικό και κατά τη συμπίεση αρνητικό.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ, όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η ΔU είναι ίδια για τις μεταβολές α και β, σχ. 9.7, το έργο W και επομένως και η θερμότητα Q είναι διαφορετικά για τις δυο μεταβολές α και β. Δηλαδή τα Q και W εξαρτώνται όχι μόνο από τις θέσεις Α και Β αλλά και από τους «δρόμους» α και β που τις συνδέουν.

Η πρώτη υποψία για την ισχύ του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου εμφανίστηκε από τις παρατηρήσεις του Γερμανού γιατρού R. Mayer. Αυτός παρατήρησε, ότι το φλεβικό αίμα που πήρε με αφαίμαξη από ασθενείς σε τροπικές χώρες είχε ανοικτό κόκκινο χρώμα παραπλήσιο σχεδόν με το αίμα των αρτηριών. Το γεγονός αυτό ο Mayer το ερμήνευσε ως εξής. Επειδή οι ασθενείς βρίσκονταν σε θερμά κλίματα κατανάλωναν λιγότερη τροφή και έτσι οι καύσεις στον οργανισμό τους ήταν λιγότερες με αποτέλεσμα περισσότερο οξυγόνο να κυκλοφορεί στο φλεβικό αίμα και να προκαλεί το ανοικτό κόκκινο χρώμα. Κατόπιν ο Mayer διατύπωσε την πρόταση ότι η ενέργεια που ελευθερώνεται από την καύση των τροφών είναι ίση με τη θερμότητα που αποβάλλει ο οργανισμός και την ενέργεια που αποδίδει μέσω έργου στο περιβάλλον.

Τώρα ξέρουμε, ότι η πρόταση αυτή του Mayer πρέπει να συμπληρωθεί και με τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας, οπότε στην περίπτωση του οργανισμού του ανθρώπου ή των ζώων ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος μπορεί να εκφραστεί παραστατικά με το παρακάτω διάγραμμα



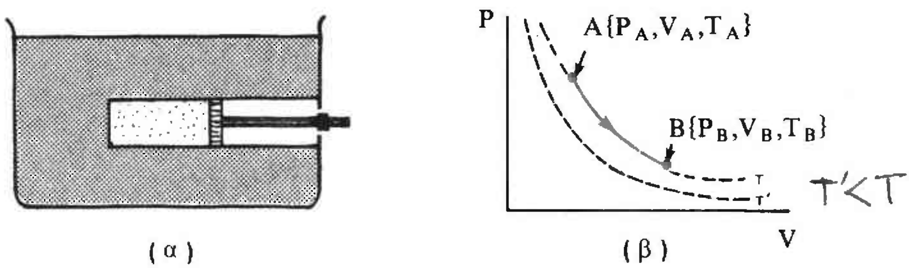
Σαν εσωτερική ενέργεια στον οργανισμό θεωρούμε τη χημική ενέργεια που αποθηκεύεται στις πρωτεΐνες και έτσι τελικά η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας μεταφράζεται σε μεταβολή του βάρους του οργανισμού.

Μεταβολές αερίων

Η κατάσταση ισορροπίας ενός αερίου περιγράφεται από σχέση της μορφής $P=f(V,T)$ όπως είδαμε στην παράγραφο 9.1. Η σχέση αυτή περιέχει τις τρεις μεταβλητές P, V, T και επομένως αποτελεί μια δεσμευτική σχέση μεταξύ τους. Έτσι αν δώσουμε αυθαίρετες τιμές στις δυο απ' αυτές υπολογίζουμε την τρίτη. Επομένως οι δυο από τις τρεις μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και μπορούμε ή να τις μεταβάλλουμε κάθε φορά και τις δυο ή να διατηρούμε τη μια σταθερή. Στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε τις πιο απλές μεταβολές αερίων που είναι η ισόθερμη, η ισόχωρη και η ισοβαρής μεταβολή.

9.5. Ισόθερμη μεταβολή

Η μεταβολή αερίου που γίνεται διατηρώντας τη θερμοκρασία σταθερή



Σχ. 9.8. Πραγματοποίηση ισόθερμης μεταβολής αερίου α και γραφική παράσταση αυτής β.

λέγεται **ισόθερμη**. Μια τέτοια μεταβολή, από την αρχική κατάσταση ισορροπίας $A\{P_A,V_A,T_A\}$ στην τελική κατάσταση ισορροπίας $B\{P_B,V_B,T_B\}$ με $T_A=T_B=T$ εικονίζεται στο σχ. 9.8β.

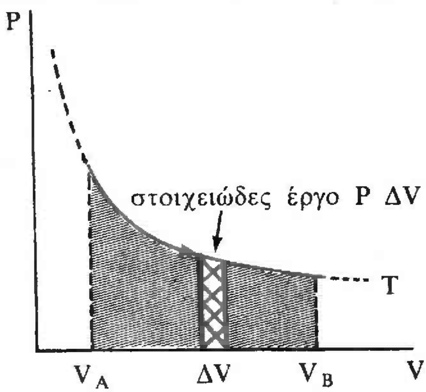
Αν η μεταβολή του αερίου γινόταν σε θερμοκρασία $T'<T$ θα προέκυπτε η ισόθερμη T'. Επειδή κατά τη μεταβολή αυτή η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή, η εσωτερική ενέργεια U του αερίου δε θα μεταβάλλεται. Δηλαδή

$\Delta U = U_B - U_A = 0$. Εφαρμόζοντας στην ισόθερμη αυτή μεταβολή τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε

$$Q = W$$

Δηλαδή όλη η θερμότητα που προσφέρεται στο αέριο κατά την ισόθερμη μεταβολή, μεταφέρεται μέσω μηχανικού έργου W από το αέριο στο περιβάλλον. Το έργο αυτό υπολογίζεται από την άθροιση των στοιχειωδών έργων $P\,\Delta V$, δηλαδή $W = \Sigma P\,\Delta V$ σχ. 9.8γ, παριστάνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν και αποδεικνύεται ότι είναι ίσο προς

$$W = nRT\ln\frac{V_B}{V_A}$$



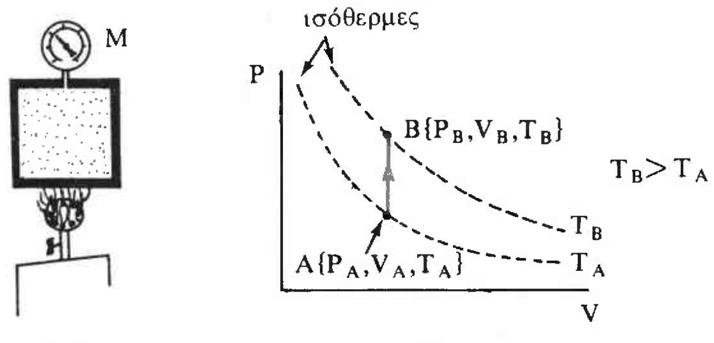
Σχ. 9.8γ

όπου n ο αριθμός των mol του αερίου και T η θερμοκρασία της ισόθερμης.

Μια ισόθερμη μεταβολή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη διάταξη του σχ. 9.8α. Η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή και ίση με τη θερμοκρασία του νερού που περιβάλλει το μεταλλικό κύλινδρο.

9.6. Ισόχωρη μεταβολή 1990

Η μεταβολή αερίου που γίνεται διατηρώντας τον όγκο σταθερό λέγεται **ισόχωρη.**



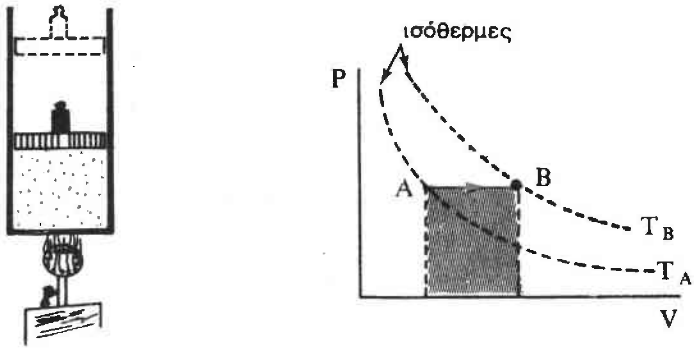
Σχ. 9.9. Πραγματοποίηση ισόχωρης μεταβολής αερίου α και γραφική παράσταση αυτής β.

Μια τέτοια μεταβολή, από την αρχική κατάσταση ισορροπίας, $A\{P_A,V_A,T_A\}$ στην τελική κατάσταση ισορροπίας $B\{P_B,V_B,T_B\}$ με $V_A=V_B$, εικονίζεται στο σχ. 9.9β. Η ισόχωρη μεταβολή παριστάνεται στο διάγραμμα P - V με ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα των όγκων και έχει αναλυτικό τύπο V = σταθ.

Αν εφαρμόσουμε τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο για τη μεταβολή αυτή έχουμε $Q=\Delta U$ γιατί, αφού ο όγκος του αερίου δε μεταβάλλεται, το έργο είναι $W=0$. Επομένως όλη η προσφερόμενη θερμότητα αυξάνει την εσωτερική ενέργεια του αερίου.

9.7. Ισοβαρής μεταβολή 1998

Η μεταβολή αερίου που γίνεται ενώ η πίεσή του διατηρείται σταθερή λέγεται **ισοβαρής**.



(α) (β)

Σχ. 9.10. Πραγματοποίηση ισοβαρούς μεταβολής αερίου α και γραφική παράσταση αυτής β.

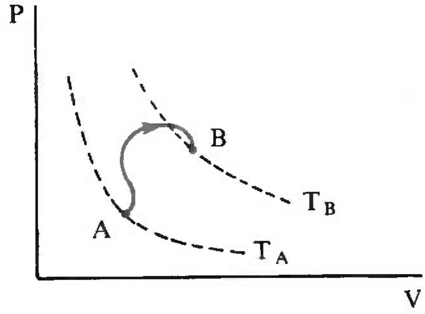
Μια τέτοια μεταβολή από την κατάσταση ισορροπίας $A\{P_A,V_A,T_A\}$ στην κατάσταση $B\{P_B,V_B,T_B\}$, με $P_A=P_B$ εικονίζεται στο σχ. 9.10β. Η μεταβολή αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη διάταξη του σχήματος 9.10α. Προσφέροντας θερμότητα αυξάνει η θερμοκρασία του αερίου και το έμβολο ανυψώνεται. Η ισοβαρής μεταβολή παριστάνεται στο διάγραμμα P - V με ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα των πιέσεων και έχει αναλυτικό τύπο P = σταθ.

Η θερμότητα που προσφέρεται κατά τη μεταβολή αυτή κατά ένα μέρος καταναλώνεται στην αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και κατά

το υπόλοιπο μεταφέρεται υπό μορφή μηχανικού έργου στο περιβάλλον. Δηλαδή $Q = \Delta U + W$.

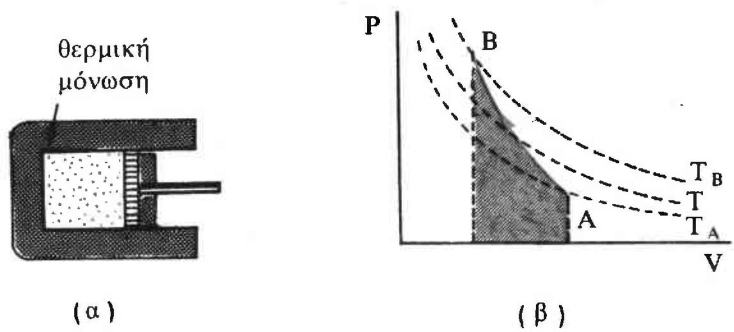
9.8. Αδιαβατική μεταβολή 1985

Στις τρεις μεταβολές που μελετήσαμε η μια από τις δυο ανεξάρτητες μεταβλητές παρέμενε σταθερή. Αν όμως και οι δυο ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται, προκύπτει ένας άπειρος αριθμός δυνατών μεταβολών του αερίου. Μια τέτοια μεταβολή φαίνεται στο σχ. 9.11.



Σχ. 9.11

Πρακτικά ενδιαφέρουσα μεταβολή, στην οποία μεταβάλλονται και οι δυο ανεξάρτητες μεταβλητές του αερίου, είναι αυτή που γίνεται χωρίς να προσφέρεται ή να αφαιρείται θερμότητα από το αέριο. Αυτή η μεταβολή λέγεται **αδιαβατική**. Παράδειγμα τέτοιας μεταβολής είναι η συμπίεση του μίγματος βενζίνης-αέρα στις μηχανές εσωτερικής καύσης. Αδιαβατικές μεταβολές συμβαίνουν επίσης και σε μεγάλες μάζες αέρα στην ατμόσφαιρα. Η αδιαβατική μεταβολή (συμπίεση) μεταξύ των καταστάσεων $A\{P_A, V_A, T_A\}$ και $B\{P_B, V_B, T_B\}$ φαίνεται στο σχ. 9.12β και γίνεται με κίνηση



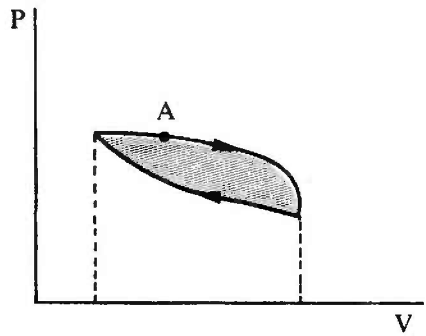
Σχ. 9.12. Πραγματοποίηση αδιαβατικής μεταβολής αερίου α και γραφική παράσταση αυτής β.

του εμβόλου που εικονίζεται στο σχ. 9.12α προς τ' αριστερά. Επειδή κατά την αδιαβατική συμπίεση το αέριο θερμαίνεται, η καμπύλη της αδιαβατικής μεταβολής τέμνει διαρκώς ισόθερμες υψηλότερης θερμοκρασίας και γι' αυτό οι αδιαβατικές καμπύλες είναι πιο απότομες από τις ισόθερμες.

Σύμφωνα με τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο (αρχή διατήρησης της ενέργειας) κατά την αδιαβατική συμπίεση ενός αερίου, η ενέργεια που προσφέρεται από το περιβάλλον στο αέριο μέσω του έργου W, είναι ίση με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου ΔU, ενώ κατά την αδιαβατική εκτόνωση η ενέργεια που προσφέρεται από το αέριο στο περιβάλλον είναι ίση με τη μείωση της εσωτερικής ενέργειας ΔU του αερίου.

9.9. Κυκλική μεταβολή

Η μεταβολή αερίου που ξεκινάει από μια κατάσταση Α και τερματίζεται στην ίδια κατάσταση λέγεται **κυκλική μεταβολή** ή απλά κύκλος. Μια τέτοια μεταβολή φαίνεται στο σχ. 9.13 και μπορεί να πραγματοποιηθεί με θερμική μηχανή, όπως θα δούμε στην παράγραφο 9.11. Στη μεταβολή αυτή η εσωτερική ενέργεια του αερίου δε μεταβάλλεται, γιατί όπως είδαμε στην παράγραφο 9.3, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ενός αερίου δεν εξαρτάται από τον ακολουθούμενο δρόμο, αλλά από την αρχική και την τελική κατάσταση του αερίου. Επομένως ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος αν εφαρμοστεί σ' αυτή τη μεταβολή δίνει



Σχ. 9.13

$$Q = W$$

Δηλαδή η προσφερόμενη θερμότητα μεταφέρεται μέσω του έργου $W = \Sigma P \Delta V$ από το αέριο στο περιβάλλον. Το έργο W δίνεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του σχ. 9.13.

Παράδειγμα

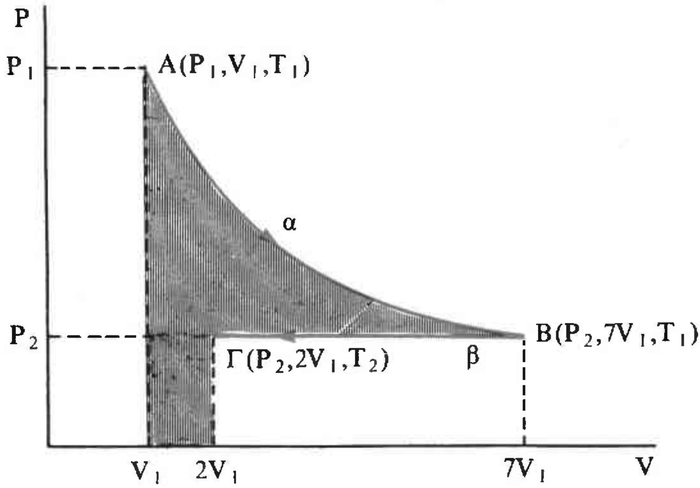
Ένα αέριο, από μια αρχική κατάσταση ισορροπίας $A(P_1, V_1, T_1)$, εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι ν' αποκτήσει όγκο $7V_1$. Στη συνέχεια συμπιέζεται ισοβαρώς μέχρις ότου ο όγκος του να γίνει $2V_1$.

α) Να σχεδιαστούν οι μεταβολές του αερίου σε διάγραμμα P-V.

β) Να γραμμοσκιασθεί το εμβαδόν που αντιστοιχεί στο συνολικό έργο W.

Λύση

α) Η πρώτη μεταβολή του αερίου αποδίδεται από την ισόθερμη α και η δεύτερη από την ευθεία β την παράλληλη στον άξονα των όγκων.



β) Από το εμβαδόν που αντιστοιχεί στην ισόθερμη εκτόνωση $(A, B, 7V_1, V_1, A)$ αφαιρούμε το εμβαδόν που αντιστοιχεί στην ισοβαρή συμπίεση $(B, \Gamma, 2V_1, 7V_1, B)$.

9.10. Δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος 1986

Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος εμφανίζεται με τις εξής διατυπώσεις:

α) των Kelvin-Planck σύμφωνα με την οποία, **είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε μηχανή που μετασχηματίζει τη θερμική ενέργεια σε έργο κατά 100%.**

β) του Clausius σύμφωνα με την οποία, **είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε μηχανή που μεταφέρει θερμότητα από ένα κρύο σώμα σ' ένα ζεστό χωρίς να προσφερθεί ενέργεια με τη μορφή μηχανικού έργου πάνω στη μηχανή από το εξωτερικό περιβάλλον.**

Οι δυο αυτές διατυπώσεις του νόμου αποδεικνύεται ότι είναι εντελώς ισοδύναμες. Δηλαδή οποιαδήποτε υποθετική μηχανή παραβιάζει τη μια διατύπωση, παραβιάζει και την άλλη. Χωρίς μέχρι τώρα να έχουν βρεθεί οποιεσδήποτε εξαιρέσεις.

Η δεύτερη διατύπωση κάνει αδύνατη π.χ. την κατασκευή ενός ψυγείου που θα λειτουργούσε χωρίς δαπάνη κάποιας μορφής ενέργειας.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι για το 2ο θερμοδυναμικό νόμο δεν υπάρχει μαθηματική απόδειξη. Αποτελεί μια αρχή που δικαιολογείται από το ότι αυτή και οι προβλέψεις της έχουν την πειραματική μαρτυρία. Έχει την πιο μεγάλη γενικότητα από οποιαδήποτε αρχή στην επιστήμη. Είναι δε ίσως ο περισσότερο μη «ανακλήσιμος» νόμος της φύσης και έχει την μικρότερη πιθανότητα να αλλάξει ή να απορριφθεί στο μέλλον.

Την αφορμή για να διατυπωθεί ο 2ος νόμος, έδωσε το 1824 ο Nicolas Sadi Carnot, ένας Γάλλος μηχανικός του στρατού 28 ετών, που έγραψε μια πραγματεία πάνω στην απόδοση των ατμομηχανών η οποία έφερε επανάσταση στη θερμοδυναμική, πριν ακόμα η μικροσκοπική πλευρά της θερμικής ενέργειας είναι γνωστή και πριν διατυπωθεί ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής. Περιείχε αυτή η πραγματεία όλο το υπόβαθρο του δεύτερου νόμου ο οποίος τελικά πήρε τις παραπάνω διατυπώσεις.

9.11. Θερμικές μηχανές - Κύκλος Carnot

Οι θερμικές μηχανές μετατρέπουν τη θερμική ενέργεια σε ωφέλιμο μηχανικό έργο και για να λειτουργήσουν χρειάζονται τα εξής. α) Μια πηγή* θερμότητας σε υψηλή θερμοκρασία T_1 που στη συνέχεια θα την ονομάζουμε πηγή Α. β) Ένα μέσον Μ υγρό ή συνηθέστερα αέριο που παίρνοντας θερμότητα Q_1 από την πηγή Α εκτελεί μια κυκλική μεταβολή. γ) Μια πηγή* θερμότητας σε χαμηλή θερμοκρασία T_2 που στη συνέχεια θα την ονομάζουμε πηγή Β και η οποία σε κάθε κύκλο δέχεται θερμότητα Q_2 από το μέσον Μ.

Τέτοιες θερμικές μηχανές είναι π.χ. οι μηχανές εσωτερικής καύσης (αυτοκινήτων, πλοίων...), οι ατμομηχανές κ.ά. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της ατμομηχανής. Σ' αυτήν πηγή Α είναι ο βραστήρας που ζεσταίνει το νερό και το κάνει ατμό. Μέσον Μ είναι ο θερμός ατμός που εκτονώνεται και έτσι μέρος της ενέργειάς του, μετατρέπεται μέσω του έργου σε μηχανική ενέργεια. Πηγή Β είναι το περιβάλλον όπου διαφεύγει ο ατμός μετά την εκτόνωση μέσα στον κύλινδρο.

Οι θερμικές μηχανές αναπτύχθηκαν τον 18ο και 19ο αιώνα, κυριαρχούν στη σημερινή εποχή και επέτρεψαν στον άνθρωπο να αντικαστατήσει με αυτές τα χέρια του στην παραγωγή έργου όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

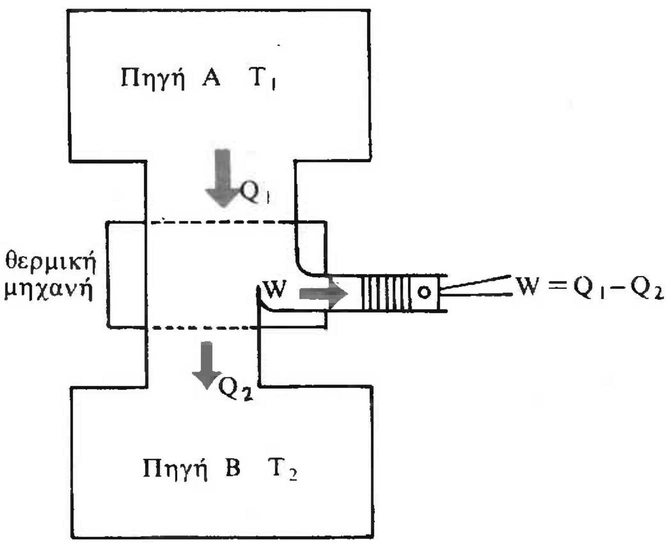
---

*Θεωρούμε ότι οι θερμοκρασίες των πηγών δε μεταβάλλονται από την αφαίρεση ή την προσφορά ποσών θερμότητας σ' αυτές.

εποχή	ενέργεια από τον άνθρωπο	ενέργεια από τα ζώα	ενέργεια από τις μηχανές
1800	14%	80%	6%
1900	10%	52%	38%
1975	~1%	~0%	99%

Ο πίνακας αυτός είναι ενδεικτικός της τάσης που υπάρχει παγκόσμια για αντικατάσταση του ανθρώπου και των ζώων από τις μηχανές στην παραγωγή οιασδήποτε μορφής έργου και αφορά στην πρώτη βιομηχανική επανάσταση της ανθρωπότητας. Σήμερα ζούμε στην εποχή της δεύτερης τεχνολογικής επανάστασης που εκφράζεται μέσω της επιστήμης της πληροφορικής. Δηλαδή τη σπουδαιότητα που είχε η ενέργεια στην πρώτη βιομηχανική επανάσταση την έχει σήμερα η πληροφορία.

Μια θερμική μηχανή μπορεί σχηματικά να παρασταθεί όπως φαίνεται στο σχ. 9.14.



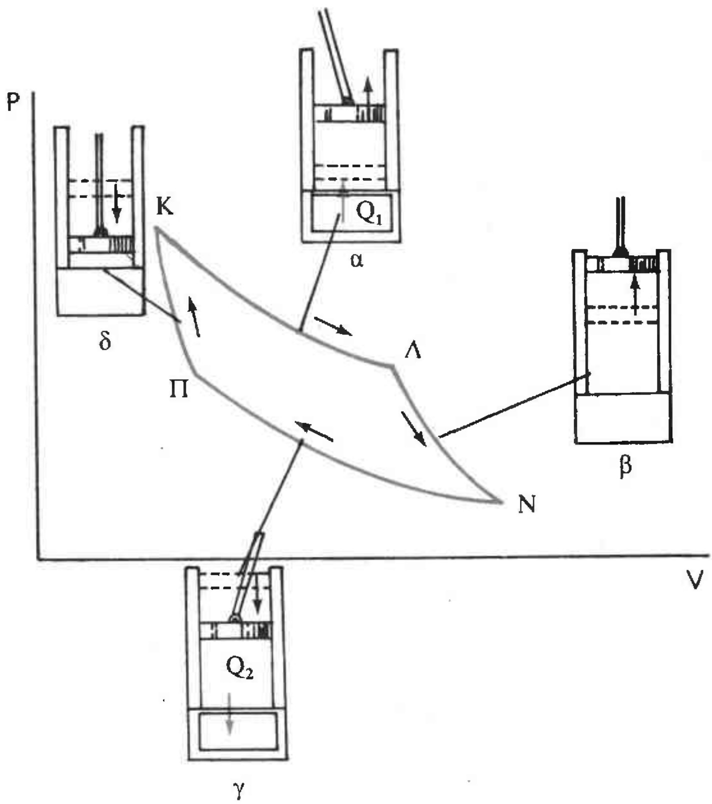
Σχ. 9.14. Αρχή λειτουργίας θερμικής μηχανής.

Σύμφωνα με τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο για το μηχανικό έργο έχουμε $W = \Delta Q - \Delta U$. Επειδή το μέσον Μ παθαίνει κυκλική μεταβολή η εσωτερική του ενέργεια δεν αλλάζει, δηλαδή $\Delta U = 0$. Επομένως το μηχανικό έργο είναι $W = \Delta Q = Q_1 - Q_2$. Κατά συνέπεια η απόδοση α που έχει η θερμική μηχανή είναι,

$$\alpha = \frac{\text{ωφέλιμο μηχανικό έργο}}{\text{δαπανώμενη ενέργεια}} = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{9.5}$$

Επειδή θερμότητα Q_2 αποδίδεται στην πηγή Β, το Q_2 είναι μικρότερο του Q_1 και διάφορο του μηδενός, επομένως η απόδοση α είναι μικρότερη της μονάδας, πράγμα που συμφωνεί με το 2ο θερμοδυναμικό νόμο.

Τη θεωρητική μελέτη της θερμικής μηχανής με τη μέγιστη δυνατή απόδοση την παρουσίασε πρώτος ο Carnot το 1824 σε μια εργασία του με τον



Σχ. 9.15. Κύκλος Carnot.

τίτλο "Sur la puissance motrice du feu" (Περί της κινητικής δυνάμεως του πυρός). Είναι μια απλοποιημένη ιδανική μηχανή που ονομάζεται **μηχανή Carnot** και στην οποίαν το μέσον Μ ακολουθεί μια κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή, ένα **κύκλο Carnot**.

Ένας τέτοιος κύκλος αποτελείται από τις εξής τέσσερις αντιστρεπτές μεταβολές όπως δείχνει το σχ. 9.15.

1986

α. Θερμότητα Q_1 μεταφέρεται στη μηχανή (μέσον Μ) από την πηγή Α ισόθερμα υπό θερμοκρασία T_1 (τμήμα ΚΛ).

β. Η θερμοκρασία της μηχανής ελαττώνεται αδιαβατικά από T_1 σε T_2 (τμήμα ΛΝ).

γ. Θερμότητα Q_2 αποβάλλεται από τη μηχανή στο περιβάλλον (πηγή Β) ισόθερμα υπο θερμοκρασία T_2 (τμήμα ΝΠ).

δ. Η θερμοκρασία της μηχανής αυξάνεται αδιαβατικά από T_2 σε T_1 (τμήμα ΠΚ) και ο κύκλος ξεκινάει πάλι απ' την αρχή.

Αποδεικνύεται ότι τα ποσά θερμότητας Q_1, Q_2 που διακινούνται μεταξύ των πηγών θερμότητας και της μηχανής, είναι ανάλογα των απολύτων θερμοκρασιών T_1, T_2. Δηλαδή ισχύει

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}} \tag{9.6}$$

Επομένως η απόδοση α της μηχανής Carnot γίνεται

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \tag{9.7}$$

Αυτή είναι η μέγιστη δυνατή απόδοση που μπορεί να έχει οποιαδήποτε θερμική μηχανή που λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών T_1 και T_2. Η ατμομηχανή π.χ. που λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών 150^0C και 20^0C θα έχει θεωρητική μέγιστη απόδοση $\alpha = 1 - \frac{293}{423} = 0{,}307$ δηλαδή περίπου 31%. Βεβαίως η απόδοση αυτής της ατμομηχανής λόγω απωλειών και τριβών θα είναι ακόμη μικρότερη.

Στην παράγραφο 9.9 είδαμε ότι η προσφερόμενη θερμότητα στην κυκλική μεταβολή ισούται με το έργο. Οπότε θα έλεγε κανείς ότι η απόδοση της κυκλικής μεταβολής είναι $\alpha = \frac{W}{Q} = 1$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το 2ο θερμοδυναμικό νόμο. Δε συμβαίνει όμως αυτό στην πραγματικότητα. Το Q είναι το καθαρό ποσό θερμότητας που προσφέρεται στο αέριο κατά την κυκλική μεταβολή και που προέρχεται από το Q_1 που απορρόφησε σ' ένα τμήμα της κυκλικής μεταβολής και από το Q_2 που απέβαλλε στο υπόλοιπο τμήμα της. Επομένως $Q = Q_1 - Q_2 < Q_1$ και συνεπώς η απόδοση στην κυκλική μεταβολή είναι $\alpha = \frac{W}{Q_1} < 1$.

Η διατύπωση του 2ου νόμου, όπως δόθηκε από τους Kelvin-Planck, αποκλείει την κατασκευή μιας μηχανής που θα μπορούσε να εκμεταλλευθεί τα τεράστια ποσά θερμικής ενέργειας των θαλασσών, αφού θα ήταν απαραί-

τητη μια δεύτερη δεξαμενή θερμότητας, μικρότερης θερμοκρασίας T_2 από αυτή των θαλασσών T_1.

Παράδειγμα

Σε μια ατμομηχανή, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί από μια μηχανή Carnot, η θερμή δεξαμενή έχει θερμοκρασία T_1 και ο ατμός αποβάλλεται στον αέρα υπό θερμοκρασία $T_2 = 100\,^0C$. Αν η μέση μηχανική ισχύς που αποδίδει η ατμομηχανή είναι $P = 100$ KWatt και προσφέρεται από το βραστήρα θερμότητα με ρυθμό $P_1 = 3{,}94 \cdot 10^5 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$, να βρεθεί η θερμοκρασία T_1.

Λύση

Η απόδοση α της ατμομηχανής είναι $\alpha = \frac{W}{Q_1} = \frac{P \cdot t}{P_1 \cdot t}$ ή $\alpha = \frac{10^5\,\text{Watt}}{3{,}94 \cdot 10^5\,\text{Joule/sec}} =$
$= 0{,}254$

Επομένως $0{,}254 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{T_1 - 373}{T_1} \Rightarrow T_1 = 500\,^0K$

«Το πιθανό είναι ό,τι συνήθως συμβαίνει»

Αριστοτέλης

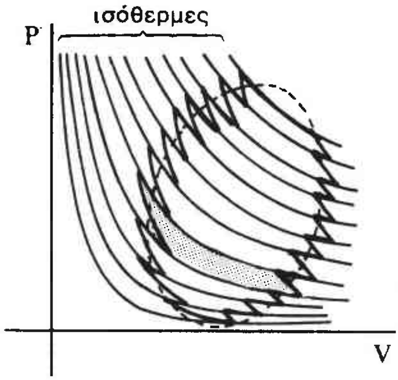
9.12. Εντροπία

Ας θεωρήσουμε τη θερμότητα Q_1, που απορροφά το μέσον Μ σ' ένα κύκλο Carnot, σαν θετική και τη θερμότητα Q_2 που αποβάλλει σαν αρνητική. Τότε η σχέση (9.6) της προηγούμενης παραγράφου δίνει $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$.

Γενικότερα κατά μήκος ενός κύκλου Carnot ισχύει
$\Sigma \left(\frac{\Delta Q}{T} \right) = 0$.

Την ποσότητα $\frac{\Delta Q}{T}$, όπου ΔQ είναι ένα μικρό ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το μέσο, ενώ η θερμοκρασία του T παραμένει σταθερή, ο Γερμανός φυσικός R. Clausius ονόμασε **στοιχειώδη μεταβολή της εντροπίας ΔS.**

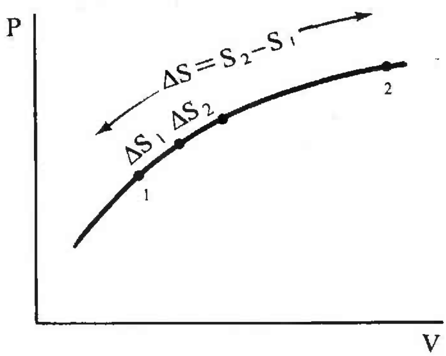
Συνεπώς για έναν κύκλο Carnot ισχύει $\Sigma\Delta S = 0$. Επειδή εύκολα αποδεικνύεται σχ. 9.16, ότι κάθε αντιστρεπτός κύκλος μπορεί, με τη βοήθεια σμήνους



Σχ. 9.16. Η εστιγμένη καμπύλη δείχνει έναν τυχαίο αντιστρεπτό κύκλο που μπορεί να προσεγγιστεί από μια σειρά κύκλων Carnot. ΄Οσο πιο πυκνές είναι οι ισόθερμες τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν παριστάνει έναν τέτοιο στοιχειώδη κύκλο Carnot.

από πυκνές αδιαβατικές και ισόθερμες καμπύλες, να προσεγγιστεί με μια σειρά κύκλων Carnot, η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή.

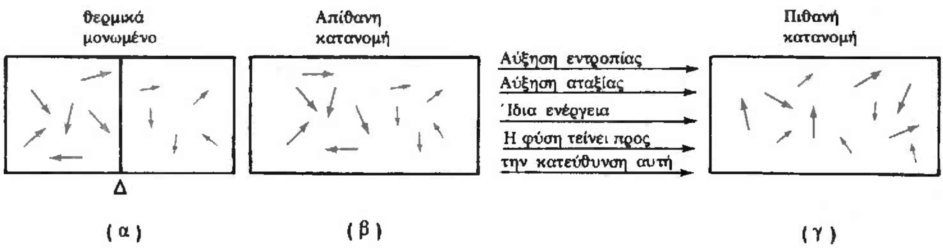
Ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε αντιστρεπτή μεταβολή του μέσου Μ. Τότε η μεταβολή της εντροπίας ΔS κατά τη μετάβαση από ένα σημείο 1 σ' ένα άλλο σημείο 2 της μεταβολής, σχ. 9.17, είναι $\Delta S = \sum_{1}^{2} \frac{\Delta Q}{T}$, όπου ΔQ είναι η στοιχειώδης ποσότητα θερμότητας που απορροφάται κατά ένα στοιχειώδες τμήμα της μεταβολής κατά το οποίο το μέσον Μ βρίσκεται σε θερμοκρασία Τ. ΄Οπως και στην εσωτερική ενέργεια έτσι και στην εντροπία, μόνο οι μεταβολές αυτής έχουν νόημα. Δηλαδή η μεταβολή στην εντροπία, όταν ένα σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη, εξαρτάται μόνο από τις δυο



Σχ. 9.17

καταστάσεις και όχι από το δρόμο που ακολουθήσαμε για να πάμε από τη μια κατάσταση στην άλλη.

Για να αντιληφτούμε τι κρύβεται κάτω από την έννοια της εντροπίας ας μελετήσουμε το εξής παράδειγμα. Στο σχήμα 9.18 εικονίζονται τρία στιγμιότυπα ενός ιδεατού πειράματος που αναφέρεται σε μεταβολή ενός αερίου. Στο στιγμιότυπο α ένα διάφραγμα Δ χωρίζει τα ταχέως κινούμενα μόρια του αερίου (ταχύτητας υ_1) από τα βραδέως κινούμενα (ταχύτητας $\upsilon_2 < \upsilon_1$). Αφαιρώντας το διάφραγμα το αέριο εμφανίζει την εικόνα του στιγμιότυπου β. Στο στιγμιότυπο γ φαίνεται η τελική κατάσταση του αερίου. Στη μεταβολή από το β στο γ δε μεταβλήθηκε η ενέργεια του αερίου, άλλαξε μόνο η κατανομή των μορίων με τις διαφορετικές ταχύτητες στο χώρο του δοχείου. Στο β υπάρχει μια οργάνωση (τάξη) στην κατανομή των ταχυτήτων των μορίων, δηλαδή τα μόρια με μεγάλες ταχύτητες είναι συγκεντρωμένα στο αριστερό μέρος του δοχείου και τα μόρια με μικρές ταχύτητες είναι συγκεντρωμένα στο δεξιό, ενώ στο στιγμιότυπο γ υπάρχει πλήρης αταξία. Το στιγμιότυπο β έχει μικρή πιθανότητα να παρατηρηθεί, ενώ αυτό που συνήθως παρατηρούμε είναι το στιγμιότυπο γ, το οποίο είναι και το πιο πιθανό.



Σχ. 9.18

Δηλαδή η εξέλιξη του φαινομένου οδηγεί σε αύξηση της αταξίας και η κατάληξη αυτού στην ισορροπία οδηγεί στη μέγιστη αταξία των μορίων.

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε φυσική μεταβολή τείνει σε κατάσταση μεγαλύτερης αταξίας η οποία είναι και η πιο πιθανή.

Αποδεικνύεται ότι η εντροπία S που έχει μια κατάσταση γ, σχ. 9.18 και η πιθανότητα P να παρατηρηθεί αυτή η κατάσταση, συνδέονται με τη σχέση

$$S = K \ln P$$

όπου K μια σταθερά που ονομάζεται σταθερά Boltzmann. Η εξίσωση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθούμε ότι η φορά κατά την οποίαν γίνονται οι μεταβολές στη φύση είναι από μια κατάσταση β σε μια άλλη κατάσταση γ μεγαλύτερης εντροπίας. Όσο όμως αυξάνει η εντροπία ενός συστήματος τόσο λιγότερο διαθέσιμη για έργο γίνεται η ενέργεια που περικλείει το σύστημα.

Πράγματι ας θεωρήσουμε μια μηχανή Carnot στην οποία προσφέρεται ποσόν θερμότητας μεταξύ των θερμοκρασιών T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$), τότε η απόδοση α της μηχανής θα είναι $\alpha = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Αν τώρα το ίδιο ποσόν θερμότητας προσφέρεται στη μηχανή μεταξύ των θερμοκρασιών T'_1 και T_2 ($T'_1 > T_2$) όπου $T'_1 > T_1$, η απόδοση της μηχανής θα είναι $\alpha' = 1 - \frac{T_2}{T'_1}$ και θα είναι $\alpha' > \alpha$. Δηλαδή **δυο ίσα ποσά θερμότητας σε διαφορετικές θερμοκρασίες έχουν διαφορετική ικανότητα παραγωγής έργου και όσο πιο χαμηλή είναι η θερμοκρασία υπό την οποίαν βρίσκεται ένα ποσό θερμότητας, τόσο πιο υποβαθμισμένη από πλευράς απόδοσης είναι αυτή η ποσότητα θερμότητας.**

Ένα άλλο παράδειγμα που μας δείχνει ότι η αύξηση της εντροπίας ενός συστήματος ελαττώνει την ικανότητα παραγωγής έργου απ' αυτό, είναι το εξής.

Ας θεωρήσουμε ότι αφήνουμε ένα κομμάτι ξύλο να πέσει από ύψος h πάνω στο πάτωμα του δωματίου μας. Το ξύλο ξεκινάει τη διαδρομή του με μια δυναμική ενέργεια mgh και μετά την κρούση του με το πάτωμα, αυτή η ενέργεια παραμένει σαν θερμική που έχει ανεβάσει λίγο τη θερμοκρασία του ξύλου, του πατώματος, του αέρα και των τοίχων του δωματίου που απορρόφησαν τα ηχητικά κύματα που γέννησε η κρούση του ξύλου με το πάτωμα. Η αρχική λοιπόν δυναμική ενέργεια μετατράπηκε ολοκληρωτικά σε θερμική ενέργεια και το τελικό αποτέλεσμα είναι να αυξηθούν οι άτακτες κινήσεις των μορίων των σωμάτων τα οποία απορρόφησαν τη θερμότητα. Η ενέργεια όμως στο πείραμα αυτό δεν παύει να διατηρείται.

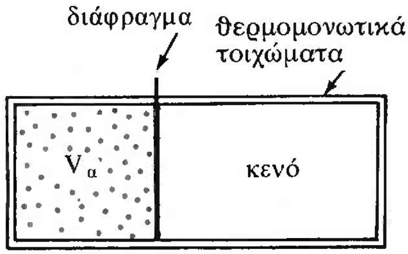
Τι μπορούμε όμως να πούμε για την αντίστροφη μεταβολή, για την αντίστροφη φορά στην εξέλιξη του φαινομένου που περιγράψαμε; Μπορούμε αντιστρέφοντας το φαινόμενο να αποκαταστήσουμε τα πράγματα στην αρχική τους κατάσταση; Μπορούμε να μετατρέψουμε τις άτακτες κινήσεις των μορίων των σωμάτων, που πήραν μέρος στην εξέλιξη του φαινομένου, στην οργανωμένη κίνηση της μηχανικής ενέργειας για να σηκώσουμε πάλι το ξύλο στην αρχική του θέση, ψύχοντας το δωμάτιο στην αρχική του θερμοκρασία;

Μια τέτοια αντιστροφή του φαινομένου αν ήταν δυνατή δε θα παραβίαζε τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής σύμφωνα με τον οποίο η ενέργεια διατηρείται. Ο δεύτερος νόμος παρόλα αυτά αποκλείει ότι μια τέτοια μεταβολή είναι πραγματοποιήσιμη. Η αυξημένη εντροπία που έχει τώρα το σύστημα κάνει αδύνατη την αντιστροφή του φαινομένου και επομένως τη μετατροπή της θερμότητας που περικλείει το σύστημα σε μηχανική ενέργεια η οποία θα μπορούσε να σηκώσει το σώμα. Συνεπώς η γνώση της ενέργειας ενός συστήματος δεν είναι αρκετή για να ξέρουμε πόσο έργο μπορεί να αποδώσει το σύστημα. Την πληροφορία αυτή δίνει η εντροπία η οποία κατά κάποιο τρόπο μετράει την «ποιότητα» της ενέργειας του συστήματος. Για

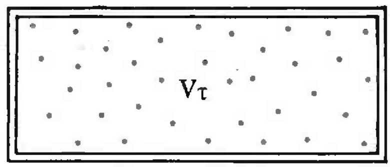
όλες τις μεταβολές που συμβαίνουν στην φύση και που είναι μη αντιστρεπτές, είναι $\Delta S > 0$, δηλαδή με άλλα λόγια η εντροπία του σύμπαντος αυξάνει.

Εφαρμογή 1994

Ένα αέριο υπό χαμηλή πυκνότητα και θερμοκρασία T καταλαμβάνει όγκο Vα, σχ. α. Αν αφαιρέσουμε το διάφραγμα το αέριο εκτονώνεται και αποκτά όγκο Vτ, σχ. β. Η μεταβολή αυτή του αερίου λέγεται **ελεύθερη εκτόνωση** και κατ' αυτή η εσωτερική ενέργεια του αερίου, άρα και η θερμοκρασία του παραμένει η ίδια*. Τι μεταβλήθηκε λοιπόν στο αέριο; Αυξήθηκε η αταξία των μορίων του, άρα μεταβλήθηκε (αυξήθηκε) η εντροπία του αερίου. Για να υπολογίσουμε την αύξηση ΔS της εντροπίας του αερίου σκεπτόμαστε ως εξής. Όπως είπαμε στην παράγραφο 9.12 η μεταβολή στην εντροπία μεταξύ δυο καταστάσεων εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις και όχι από τον τρόπο με τον οποίο μεταβαίνουμε από τη μια κατάσταση στην άλλη. Έτσι προκειμένου να υπολογίσουμε τη μεταβολή της εντροπίας κατά την ελεύθερη εκτόνωση μεταξύ Vα και Vτ (μη αντιστρεπτή μεταβολή) υπολογίζουμε τη μεταβολή της εντροπίας κατά μια ισόθερμη εκτόνωση μεταξύ Vα και Vτ (αντιστρεπτή μεταβολή). Τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 9.5, για την πραγματοποίηση της ισόθερμης εκτόνωσης, σε θερμοκρασία T, απαιτείται θερμότητα $Q = nRT\ln\frac{V_\tau}{V_\alpha}$ όπου n ο αριθμός των mol του αερίου, Vα και Vτ ο αρχικός και τελικός όγκος του. Επομένως η μεταβολή ΔS της εντροπίας στην ισόθερμη εκτόνωση, άρα και στην ελεύθερη εκτόνωση είναι:



(α)



(β)

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR\ln\frac{V_\tau}{V_\alpha}$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε, ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αύξηση του όγκου του αερίου, τόσο μεγαλύτερη είναι και η αύξηση της εντροπίας του.

---

* Τούτο είναι απόρροια του 1ου θερμοδυναμικού νόμου, γιατί στην ελεύθερη εκτόνωση έχουμε $Q = 0$, $W = 0$ και επομένως και $\Delta U = 0 \Rightarrow U =$ σταθερή.

9.13. Ενεργειακή κρίση – Θερμική μόλυνση

Το ενεργειακό πρόβλημα για το παρόν και το μέλλον, είναι ένα από τα πιο περίπλοκα ζητήματα που αντιμετωπίζει ο πολιτισμός μας. Πως είναι όμως δυνατόν να υπάρχει ενεργειακό πρόβλημα αφού σύμφωνα με τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο η ενέργεια δε χάνεται; Η απάντηση είναι ότι, η ενέργεια που χρησιμοποιείται (καταναλώνεται) υποβαθμίζεται και επομένως τα διαθέσιμα μη υποβαθμισμένα ποσά ενέργειας μειώνονται ενώ παράλληλα αυξάνει συνεχώς η ζήτησή τους. Η κατανάλωση ενέργειας σε μια χώρα είναι μέτρο του βαθμού ανάπτυξής της και όσο αναπτύσσεται η ανθρωπότητα τόσο αυξάνει η ζήτηση σε ενέργεια και μάλιστα κατά γεωμετρική πρόοδο.

Όλες οι μελέτες των πηγών ενέργειας του μέλλοντος συγκλίνουν στο γεγονός της ύπαρξης δυο μόνον άφθονων πηγών, που μπορούν να ικανοποιήσουν τις μακροπρόθεσμες απαιτήσεις μας: Η ηλιακή ενέργεια και η πυρηνική σύντηξη του δευτέριου (βαρύ υδρογόνο) που υπάρχει στους ωκεανούς.

Η ηλιακή ακτινοβολία είναι μια σχεδόν ανεξάντλητη πηγή, αφού οι εκτιμήσεις δίνουν ζωή στον ήλιο της τάξης των 5 δισεκατομμυρίων ετών. Οι δυνατότητες που σήμερα δίνει η τεχνολογία για εκμετάλλευση της ηλιακής ενέργειας είναι πολύ μικρές και προς το παρόν αν και βομβαρδιζόμαστε με ενέργεια 10^{18} KWh ετησίως, η συνεισφορά του ήλιου στην επίλυση του παγκόσμιου ενεργειακού προβλήματος είναι ασήμαντη.

Από την άλλη μεριά η ενέργεια που εκλύεται κατά τη σύντηξη δυο ταχέων πυρήνων δευτέριου σε ήλιο, σύμφωνα με την αντίδραση

$$^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}He + n + \text{ενέργεια}$$

είναι η δεύτερη λύση στο ενεργειακό πρόβλημα. Έχει υπολογιστεί ότι η περιεκτικότητα του νερού των θαλασσών σε δευτέριο είναι 1 δευτέριο ανά 6500 άτομα υδρογόνου. Το κόστος σήμερα (1981) για να αφαιρέσουμε το δευτέριο που υπάρχει σ' ένα λίτρο θαλασσινού νερού, είναι λιγότερο από δυο δραχμές. Αν τώρα αυτό το δευτέριο που βγάζουμε από ένα λίτρο το χρησιμοποιούσαμε σε αντιδράσεις σύντηξης θα παίρναμε ενέργεια ίση με αυτή που δίνουν 300 λίτρα βενζίνης. Για να καταλάβουμε τι σημαίνει αυτό μπορούμε να προσθέσουμε ότι αξιοποιώντας σε αντιδράσεις σύντηξης το δευτέριο που υπάρχει σε 1 Km^3 θαλασσινού νερού παίρνουμε περισσότερη ενέργεια από αυτή που μπορούν να μας δώσουν συνολικά τα διαθέσιμα σήμερα παγκόσμια αποθέματα πετρελαίου, άνθρακα και φυσικών αερίων.

Βέβαια το μεγάλο «αν» είναι κατά πόσο μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τη σύντηξη οικονομικά. Τα τεχνικά προβλήματα που παραμένουν να λυθούν είναι τεράστια και πάντως δεν προβλέπεται να έχουν λυθεί μέσα στα ερχόμενα χρόνια. Αλλά ας υποθέσουμε ότι λύθηκαν τα προβλήματα της σύντηξης. Ποιες θα είναι οι συνέπειες στις μακροπρόθεσμες ανάγκες της ανθρωπότητας σε ενέργεια; Οι αντιδραστήρες σύντηξης το πιο πιθανό θα

χρησιμοποιούνται για παραγωγή ηλεκτρισμού. Το 1974 η παγκόσμια κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας ήταν 5×10^{12}KWh/έτος. Οι θάλασσες θα μπορούσαν μέσω της σύντηξης να παρέχουν ηλεκτρική ενέργεια επί 260.000.000 χρόνια. Αν λάβουμε όμως υπόψη ότι η μέση ετήσια αύξηση στην κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας είναι 3%, κατά μέτριες εκτιμήσεις, τότε δυστυχώς, οι θάλασσες θα στέρευαν ενεργειακά (όσον αφορά στο δευτέριο) μετά 538 χρόνια. Βέβαια η διαπίστωση αυτή είναι παραπλανητική, με την έννοια ότι πολύ πριν από το οριακό αυτό σημείο, άλλα αίτια θα έχουν δημιουργήσει άλλα προβλήματα. Για παράδειγμα, με 2% ετήσια αύξηση του πληθυσμού της γης, σε 330 χρόνια κάθε άνθρωπος στον πλανήτη μας θα διαθέτει 1m^2 γη, ή η αύξηση των πυρηνικών εξοπλισμών που αν δεν ελεγχθεί είναι πιθανότερο να καταστρέψει τον πολιτισμό μας πολύ ενωρίτερα.

Ένα άλλο πρόβλημα-γέννημα των καιρών και της εξέλιξης είναι η μόλυνση με τη γενική έννοια, που αρχίζει από τη μόλυνση του νου με το συνεχή πληροφοριακό βομβαρδισμό του, μέχρι τη μόλυνση του περιβάλλοντος από βιοχημικά κατάλοιπα (π.χ. 270 εκατομμύρια τόνοι CO διοχετεύονται ετησίως στην ατμόσφαιρα από τις διάφορες δραστηριότητες του ανθρώπου).

Εμείς θα περιοριστούμε μόνο στη **θερμική μόλυνση**. Τα εργοστάσια ηλεκτροπαραγωγής (εκτός των υδροηλεκτρικών) λειτουργούν με μεγάλους στροβίλους που κινούνται από ατμό. Ο ατμός συμπυκνώνεται από ένα ψυχρό σύστημα, που μπορεί να είναι το νερό ενός ποταμού, μιας λίμνης, μιας ακτής ή ένας ψυκτικός πύργος που διαχέει τη θερμότητα στην ατμόσφαιρα. Κατά την παραγωγή μιας KWh ηλεκτρικής ενέργειας, απορρίπτεται στο περιβάλλον τουλάχιστον 1,5 KWh θερμότητας. Αν το θερμαινόμενο νερό αποβάλλεται π.χ. σ' ένα ποταμό το αποτέλεσμα θα είναι η αύξηση της θερμοκρασίας του νερού του ποταμού κοντά στο εργοστάσιο ηλεκτροπαραγωγής κατά μερικούς βαθμούς. Αν το θερμό νερό αποβάλλεται σε μια λίμνη το αποτέλεσμα είναι πιο έντονο. Σε οποιαδήποτε περίπτωση η μεταβολή στη θερμοκρασία του νερού θα επηρεάσει το περιεχόμενο αυτού σε O_2 με συνέπειες στην ταχύτητα αύξησης φυτών και ζώων που ζουν μέσα σ' αυτό. Συνεπώς η οικολογική ισορροπία στο υδάτινο σύστημα θα διαταραχθεί. Αν η αποβολή της θερμότητας γίνεται στην ατμόσφαιρα έχουμε άλλες δυσάρεστες συνέπειες, όπως τη μεταβολή των κλιματολογικών συνθηκών.

Αλλά η θερμική μόλυνση δεν προέρχεται μόνο από τους «παραγωγούς» ενέργειας αλλά και από τους «χρήστες» αυτής. Το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας που χρησιμοποιούμε μετατρέπεται τελικά σε θερμότητα, που διαχεόμενη στην ατμόσφαιρα συνεισφέρει στην ατμοσφαιρική θέρμανση. Σε μεγάλες πόλεις όπου η κατανάλωση ενέργειας είναι συγκεντρωμένη, η θερμοκρασία του αέρα είναι αρκετούς βαθμούς υψηλότερη από αυτή των γειτονικών περιοχών, με αποτέλεσμα πάλι να εμφανίζονται ατμοσφαιρικές διαταραχές, όπως το καπνογόνο νέφος. Η θερμική μόλυνση είναι ένα ανοιχτό

πρόβλημα με μακροπρόθεσμες άγνωστες συνέπειες αλλά οπωσδήποτε όχι ευνοϊκές για τον άνθρωπο.

Η λύση και στο ενεργειακό πρόβλημα και στη μόλυνση πρέπει και μπορεί να επιτευχθεί, όταν η ανάπτυξη των κοινωνιών γίνεται με όρους που διασφαλίζουν τις αξίες και την ποιότητα της ζωής και όχι με την καταστρεπτική αποθέωση της καταναλωτικής κοινωνίας.

Εφαρμογή

Για να εκτιμήσουμε το μέγεθος της θερμικής μόλυνσης, ας πάρουμε το παράδειγμα του λεκανοπεδίου της Αττικής με πληθυσμό γύρω στα 4 000 000. Αν υποθέσουμε ένα μέσο ρυθμό κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας 2KW ανά κάτοικο, για όλο το λεκανοπέδιο η κατανάλωση είναι περίπου $8\ 10^9$W. Η έκταση της περιοχής είναι περίπου 250 Km^2, οπότε ο μέσος ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας και επομένως παραγόμενης θερμότητας είναι 32 W/m^2. Λαμβάνοντας υπόψη ότι κατά μέσο όρο ο ρυθμός με τον οποίο φτάνει η ηλιακή ενέργεια στη γη είναι 200 W/m^2, έχουμε μια αύξηση της θερμότητας που ελευθερώνεται στο λεκανοπέδιο κατά 16% και περισσότερο, αν ληφθούν υπόψη και άλλες πηγές θερμότητας, όπως π.χ. τα αυτοκίνητα. Συνέπεια αυτού είναι μια αύξηση της θερμοκρασίας στο λεκανοπέδιο σε σχέση με τα γειτονικά μέρη,που έχει δυσάρεστα αποτελέσματα στη ζωή των κατοίκων.

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

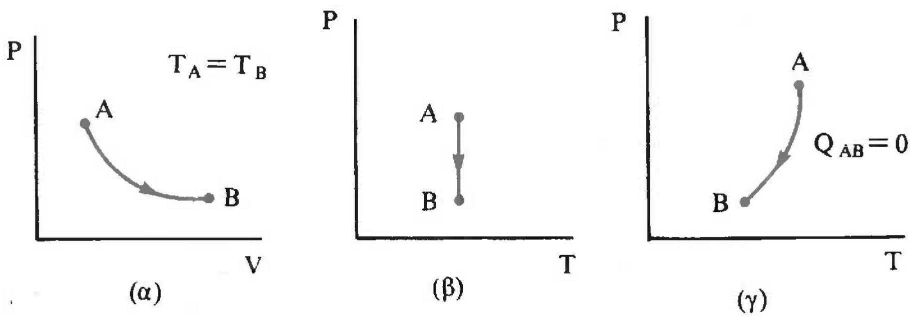
1. Όλες οι μεταβολές στη φύση είναι μη αντιστρεπτές. Αναφέρατε μερικές.

2. Ένα αέριο συμπιέζεται αδιαβατικά όταν:

Α) η συμπίεση γίνεται πολύ αργά
Β) η θερμοκρασία του αερίου διατηρείται σταθερή
Γ) ο όγκος του αερίου ελαττώνεται
Δ) μεταξύ αερίου και περιβάλλοντος δεν ανταλλάσσεται θερμότητα

Ποιά η σωστή απάντηση;

3. Να βρείτε τις μεταβολές ενός αερίου σταθερής μάζας από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β, που αντιστοιχούν στα εξής διαγράμματα.



4. Είναι δυνατό να προσφέρουμε θερμότητα σ' ένα αέριο χωρίς να μεταβάλουμε τη θερμοκρασία του; Ισχύει το ίδιο και για ένα υγρό;

5. Μια αδιαβατική μεταβολή αερίου, που βρίσκεται σε συνήθεις συνθήκες και μια ισόχωρη γίνονται μεταξύ των ίδιων ισοθέρμων. Σε ποια περίπτωση η εσωτερική ενέργεια του αερίου μεταβάλλεται περισσότερο;

6. Ένα αέριο μάζας m, όγκου V_o και πίεσης P_o συμπιέζεται σε όγκο $V_o/2$ α) ισόθερμα και β) αδιαβατικά. Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο αέριο, μέσω έργου, κατά τις παραπάνω μεταβολές είναι η ίδια;

7. Μια ποσότητα αερίου που περιγράφεται από την κατάσταση $(P_\alpha, V_\alpha, T_\alpha)$ μπορεί να εκτονωθεί και ο όγκος να γίνει V_τ κατά δυο τρόπους: 1) ισόθερμα, 2) ισοβαρώς. Η θερμότητα που πρέπει να προσφερθεί στο αέριο κατά τη μεταβολή 1, σε σχέση με τη θερμότητα που πρέπει να προσφερθεί κατά τη μεταβολή 2, είναι:

α) μεγαλύτερη
β) μικρότερη
γ) ίση
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(Απ. β))

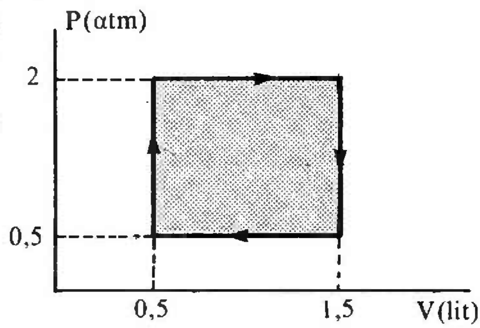
8. Σε άξονες P-V να παρασταθεί μια αντιστρεπτή μεταβολή μιας ποσότητας αερίου που η πυκνότητά του είναι χαμηλή, όταν η εσωτερική του ενέργεια διατηρείται σταθερή.

9. Ένα αέριο εκτελεί την κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή που δείχνει το σχήμα. Η ενέργεια που αποδίδεται σ' έναν κύκλο είναι:

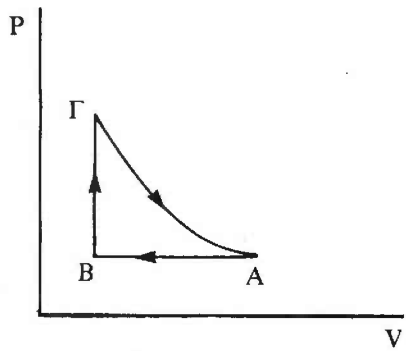
α) 1,2 Joule β) 0 Joule γ) -5 Joule δ) 151,9 Joule

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Δίνεται 1 atm = $1{,}013 \; 10^5$ N/m^2



10. Ένα αέριο εκτελεί την κυκλική μεταβολή ΑΒΓΑ που δείχνει το σχήμα. Πόσο είναι το καθαρό ποσό θερμότητας που απέδωσε το αέριο στο περιβάλλον κατά τη μεταβολή ΑΒ, αν $Q_{ΒΓ}$ = 5cal, $Q_{ΓΑ}$ = 0 και $W_{ΑΒΓΑ}$ = 14,5 Joule (Δίνεται 1cal = 4,18 Joule)



(Απ. 1,53 cal)

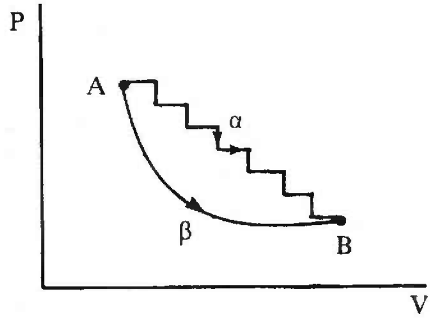
11. Ένα αέριο συμπιέζεται ισόθερμα από μια αρχική πίεση 20 atm σε μια τελική 60 atm στη θερμοκρασία των 27°C. Αν ο αριθμός των mol του αερίου είναι n = 3:

α) Βρείτε την ενέργεια που προσφέρθηκε στο αέριο.
β) Πόση θερμότητα αφαιρέθηκε από το αέριο;
γ) Πόση η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου;
Δίνεται R = 8,314 Joule/mol °K

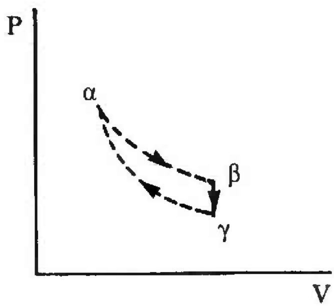
(Απ. α) 8220,4 Joule β) 8220,4 Joule γ) 0)

12. Σε μια ισόθερμη εκτόνωση η προσφερόμενη στο αέριο θερμότητα αποδίδεται στο περιβάλλον 100% μέσω του έργου W. Είναι αυτό ασυμβίβαστο με το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο;

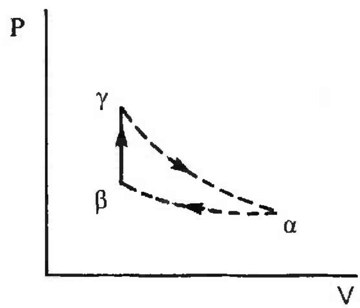
13. Το σχήμα παριστάνει δυο μεταβολές α και β αερίου μεταξύ δυο καταστάσεων Α και Β. Σε ποια από τις α και β το ΔU, Q, W, ΔS είναι μεγαλύτερο;



14. Οι καμπύλες που παριστάνουν αδιαβατικές μεταβολές δεν τέμνονται, διότι αλλιώς θα παραβιάζονταν οι θερμοδυναμικοί νόμοι. Συγκεκριμένα δείξτε ότι: στην περίπτωση που διαγράφεται ο κύκλος α → β → γ → α του σχήματος Ι παραβιάζεται ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος, ενώ στην περίπτωση που διαγράφεται ο κύκλος α → β → γ → α του σχήματος ΙΙ παραβιάζεται ο 2ος νόμος της θερμοδυναμικής. Οι εστιγμένες καμπύλες παριστάνουν αδιαβατικές μεταβολές και οι πλήρεις παριστάνουν ισόχωρες μεταβολές.

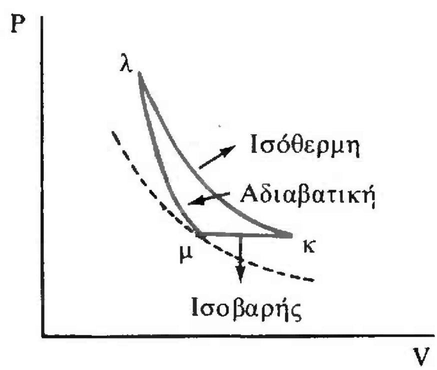


(I)



(II)

15. Στο διάγραμμα φαίνεται η κυκλική μεταβολή λ → κ → μ → λ (ισόθερμη εκτόνωση, ισοβαρής συμπίεση, αδιαβατική συμπίεση), στην οποία υποβάλλεται ένα αέριο. Να συμπληρώσετε τον πίνακα θέτοντας σε κάθε τετράγωνο ένα από τα σύμβολα +, –, 0. Το + αντιστοιχεί σε αύξηση, το – σε μείωση και το μηδέν στη μη μεταβολή για το αντίστοιχο μέγεθος. Π.χ. στο πρώτο τετράγωνο θέτουμε + γιατί στο αέριο προσφέρουμε θερμότητα.



Μεταβολή	Q	ΔU	W	ΔP	ΔT	ΔV	ΔS
λ → κ	+						
κ → μ							
μ → λ							

10
Νόμοι αερίων

10.1 Μακροσκοπική - Μικροσκοπική περιγραφή

Για να μελετήσουμε πως συμπεριφέρεται ένα αέριο, π.χ. όταν η θερμοκρασία του διατηρείται σταθερή ενώ μεταβάλλεται ο όγκος του, μετρούμε με ένα μανόμετρο την πίεση που έχει το αέριο κάθε φορά και καταλήγουμε έπειτα από πολλές μετρήσεις στο γνωστό νόμο PV = σταθ. Η πειραματική αυτή μελέτη της συμπεριφοράς του αερίου ονομάζεται **μακροσκοπική** και τα μεγέθη που χρησιμοποιεί, όπως π.χ. η πίεση, ο όγκος, η θερμοκρασία ονομάζονται **μακροσκοπικά** ή **θερμοδυναμικά** μεγέθη, ή **θερμοδυναμικές μεταβλητές**.

Μπορούμε επίσης να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των αερίων θεωρητικά, αν λάβουμε υπόψη ότι το αέριο αποτελείται από μόρια τα οποία κινούνται, συγκρούονται, κτυπούν τα τοιχώματα του δοχείου κ.λ.π. Η περιγραφή της συμπεριφοράς του αερίου με τον τρόπο αυτό λέγεται **μικροσκοπική**. Η δυσκολία σ' αυτόν τον τρόπο μελέτης είναι ότι πρέπει να ξέρουμε τη συμπεριφορά ενός μεγάλου πλήθους μορίων για να περιγράψουμε το αέριο. Το πόσο δύσκολο είναι αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με το εξής παράδειγμα. Για να βρούμε τις ταχύτητες των μορίων ενός λίτρου αερίου σε κανονικές συνθήκες, χρειάζεται να επιλύσουμε περίπου 80.000.000.000.000.000.000.000 ($8 \cdot 10^{22}$) εξισώσεις. Κάτι τέτοιο όμως ακόμη και με ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι πρακτικά αδύνατο, αφού ένας μέσος υπολογιστής θα χρειάζονταν πάνω από 500.000 χρόνια.

Η δυσκολία αυτή αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια της **στατιστικής μηχανικής** η οποία υπολογίζει και αξιοποιεί μέσες τιμές μεγεθών. Στο πιο πάνω παράδειγμα με τη βοήθεια της στατιστικής μηχανικής υπολογίζεται η μέση ταχύτητα των μορίων του αερίου, την οποίαν συσχετίζουμε με τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων και με τη βοήθεια των νόμων της μηχανικής βρίσκουμε την πίεση του αερίου, όπως θα δούμε στην παράγραφο 10.7.

Η περιγραφή της συμπεριφοράς των αερίων μπορεί να γίνει είτε μακροσκοπικά με βάση τα πειραματικά δεδομένα χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η δομή του αερίου, είτε μικροσκοπικά με τη βοήθεια της στατιστικής μηχανικής λαμβάνοντας υπόψη τη δομή του αερίου. Γενικότερα η μακροσκοπική και η μικροσκοπική μελέτη της συμπεριφοράς της ύλης δίνουν μαζί μια ενοποιημένη αλληλοσυμπληρούμενη γνώση του κόσμου, αφού η διπλή αυτή μελέτη εφαρμόζεται γενικά σ' όλο το πεδίο των φυσικών επιστημών. Ειδικά για τη φυσική παραμένει ως στόχος, να εξηγήσει τους πειραματικούς-μακροσκοπικούς νόμους της με τη βοήθεια μικροσκοπικών μεγεθών όπως η ταχύτητα, η ορμή, η ενέργεια των μορίων αερίου κ.ά. Αλλά και χωρίς μια τέτοια εξήγηση οι μακροσκοπικοί νόμοι δεν παύουν να παραμένουν ορθοί και χρήσιμοι.

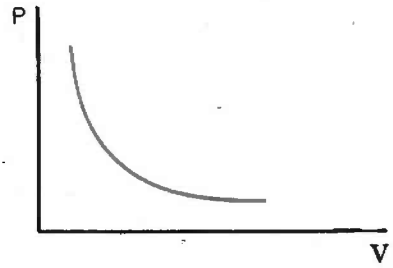
Η πιο απλή μορφή του μικροσκοπικού τρόπου μελέτης της συμπεριφοράς της ύλης είναι η **κινητική θεωρία** των αερίων της οποίας στοιχεία θα δούμε στη συνέχεια.

10.2. Νόμοι αερίων

Τον 17ο και 18ο αιώνα βρέθηκαν πειραματικά σχέσεις μεταξύ των μακροσκοπικών μεταβλητών των αερίων. Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές σαν νόμοι των αερίων και είναι οι εξής:

α) Ο **νόμος του Boyle** που διατυπώθηκε το 1660, αναφέρει ότι η πίεση P ορισμένης μάζας αερίου, μεταβάλλεται αντίστροφα ανάλογα με τον όγκο του V, εφ' όσον η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή.

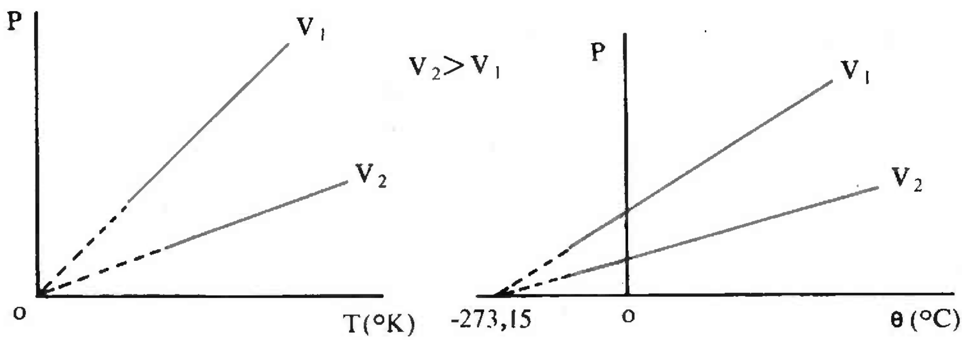
Η μαθηματική περιγραφή του νόμου δίνεται από την εξίσωση PV = σταθ. και από τη γραφική παράσταση του σχ. 10.1. Η καμπύλη αυτή αποδίδει την ισόθερμη μεταβολή που μελετήσαμε στην παράγραφο 9.5.



Σχ. 10.1. Γραφική παράσταση του νόμου του Boyle (υπερβολή).

β) Ο **νόμος του Charles** που διατυπώθηκε το 1787, λέει ότι η πίεση P ενός αερίου, που έχει ορισμένη μάζα και βρίσκεται περιορισμένο σε σταθερό όγκο, μεταβάλλεται ανάλογα με την απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου. Η αναλογία αυτή περιγράφεται μαθηματικά από την εξίσωση P = σταθ. T και από την ευθεία του σχ. 10.2.

Αργότερα βρέθηκε πειραματικά ότι ο νόμος δεν ισχύει για θερμοκρασίες κοντά στο απόλυτο μηδέν. Στις θερμοκρασίες αυτές η συμπεριφορά της ύλης εξηγείται με τη βοήθεια γνώσεων από τη νεώτερη **(κβαντική)** φυσική.

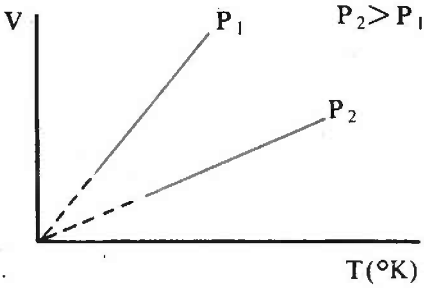


Σχ. 10.2. Γραφική παράσταση του νόμου του Charles. Κοντά στο απόλυτο μηδέν, που δεν ισχύει ο νόμος, οι ευθείες σχεδιάστηκαν διακεκομμένες.

Ο νόμος αυτός περιγράφει την ισόχωρη μεταβολή που μελετήσαμε στην παράγραφο 9.6.

γ) Ο **νόμος του Gay-Lussac** που διατυπώθηκε το 1802 και προσδιορίζει ότι ο όγκος V ενός αερίου μεταβάλλεται ανάλογα προς την απόλυτη θερμοκρασία του T, όταν η μάζα και η πίεσή του παραμένουν σταθερές. Μαθηματικά ο νόμος περιγράφεται από την εξίσωση $V =$ σταθ. T και την ευθεία του σχήματος 10.3.

Επίσης και ο νόμος του Gay-Lussac δεν ισχύει κοντά στο απόλυτο μηδέν και για το λόγο αυτό οι γραμμές στο σχήμα 10.3 σχεδιάστηκαν διακεκομμένες κοντά στο μηδέν. Ο νόμος αυτός περιγράφει την ισοβαρή μεταβολή που μελετήσαμε στην παράγραφο 9.7.



Σχ. 10.3. Γραφική παράσταση του νόμου του Gay-Lussac

Οι τρεις νόμοι που αναφέραμε ισχύουν όταν το αέριο είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Με ακριβέστερα πειράματα βρέθηκε ότι οι νόμοι των αερίων ισχύουν κατά προσέγγιση.

10.3. Καταστατική εξίσωση αερίων

Στους νόμους που περιγράψαμε θεωρήσαμε τη μάζα του αερίου σταθερή. Στην περίπτωση που και η μάζα του αερίου μεταβάλλεται, υπάρχει ανάγκη ενός νέου νόμου, δηλαδή μιας εξίσωσης που να συνδέει τη θερμοκρασία την πίεση τον όγκο και τη μάζα του αερίου σε κατάσταση ισορροπίας. Μια τέτοια εξίσωση ονομάζεται **καταστατική εξίσωση** και έχει διαφορετική μορφή για κάθε αέριο. Το πρόβλημα που τίθεται είναι η ανεύρεση μιας γενικότερης εξίσωσης που να ισχύει η ίδια για όλα τα αέρια. Για πολλά αέρια, όπως π.χ. H_2, O_2, N_2, He κ.λ.π. αυτές οι καταστατικές εξισώσεις παίρνουν την ίδια απλή μορφή όταν η πυκνότητα των αερίων είναι μικρή. Έτσι η κατάσταση αυτών των αερίων περιγράφεται από την ίδια καταστατική εξίσωση που έχει την απλή μορφή

$$PV = \text{σταθ.}\ T \qquad (10.1)$$

και που συνδυάζει τους προαναφερθέντες τρεις νόμους. Π.χ. για μάζα σταθερή και θερμοκρασία σταθερή η σχέση (10.1) γράφεται $PV =$ σταθ. δηλαδή ο νόμος του Boyle.

Η σταθερά της (10.1) εξαρτάται από τη μάζα του αερίου, διότι π.χ. με σταθερή πίεση και θερμοκρασία ο όγκος που καταλαμβάνει ένα αέριο είναι

ανάλογος της μάζας του. Έτσι η σχέση (10.1) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\boxed{PV = nRT} \tag{10.2}$$

όπου n ο αριθμός των γραμμομορίων (mol) του αερίου, που είναι ανάλογος της μάζας και R μια σταθερά για την οποίαν έχει βρεθεί ότι είναι η ίδια για όλα τα αέρια σε μικρές πυκνότητες. Για το λόγο αυτό η R λέγεται παγκόσμια σταθερά των αερίων και βρέθηκε ότι έχει τιμή

$$R = 8{,}314 \ \frac{\text{Joule}}{\text{mol } ^{o}\text{K}} = 0{,}0821 \ \frac{\text{lit atm}}{\text{mol } ^{o}\text{K}}$$

Η σχέση (10.2), αν λυθεί ως προς P είναι η εξίσωση (9.1) της παραγράφου 9.1.

10.4. Το πρότυπο του ιδανικού αερίου

Όπως βρέθηκε πειραματικά η σχέση (10.2) ισχύει μόνο κατά προσέγγιση. Υπάρχει άραγε κάποιο αέριο που να την ικανοποιεί πλήρως; Η απάντηση είναι όχι. Η ανάγκη όμως να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των αερίων κατά ενιαίο τρόπο μας υποχρεώνει να φανταστούμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο αέριο στα μόρια του οποίου αποδίδουμε ορισμένες ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές στηρίχτηκαν κυρίως στα πειραματικά δεδομένα της κίνησης Brown που θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Το αέριο αυτό λέγεται **ιδανικό αέριο** και είναι ένα πρότυπο* συμπεριφοράς των αερίων. Μελετώντας τη συμπεριφορά του

---

* Με τη χρήση του προτύπου προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε κατά ενιαίο τρόπο μια πλειάδα φαινομένων ή να προσεγγίσουμε τη γνωστή συμπεριφορά άλλων φαινομένων. Το πρότυπο μπορεί να είναι μια υπόθεση μια κατασκευή ή ακόμη και μια εξίσωση. Η επιλογή ενός προτύπου γίνεται με τα εξής κριτήρια.

α) Να είναι το απλούστερο δυνατό.

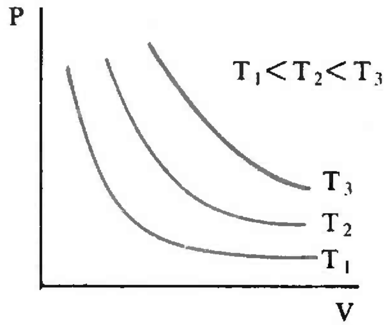
β) Να είναι σε συμφωνία με άλλες καλά θεμελιωμένες θεωρίες ή πρότυπα σε σύγγενή πεδία της επιστήμης.

γ) Να επιτρέπει παραπέρα προβλέψεις οι οποίες να μπορούν να ελεγχθούν πειραματικά. Γνωστά πρότυπα είναι π.χ. το πλανητικό πρότυπο του Rutherford για το άτομο, το ιδανικό αέριο κ.ά. Η έννοια του προτύπου έχει μεγάλη χρήση σε ευρύ φάσμα επιστημών, από τις ιστορικές και κοινωνικές επιστήμες ως την ιατρική.

ιδανικού αερίου μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά των αερίων. Οι νόμοι των αερίων που βρέθηκαν πειραματικά, μπορούν να ερμηνευτούν αν μελετήσουμε την κίνηση των μορίων του ιδανικού αερίου, εφαρμόζοντας σ' αυτά τους γνωστούς νόμους της μηχανικής.

Για το ιδανικό αέριο η σχέση (10.2) αποτελεί την καταστατική του εξίσωση την οποίαν και ικανοποιεί πλήρως. Η απεικόνιση της (10.2) για διάφορες θερμοκρασίες, φαίνεται στο σχ. 10.4.

Κάθε καμπύλη παριστάνει τη μεταβολή της πίεσης σε συνάρτηση με τον όγκο για ορισμένη μάζα αερίου σε σταθερή θερμοκρασία. Οι καμπύλες είναι υπερβολές και ονομάζονται ισόθερμες αερίου.



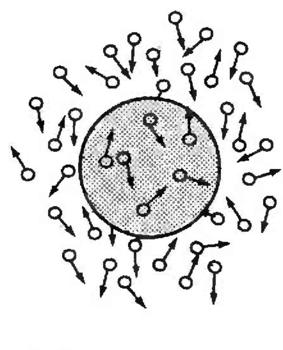
Σχ. **10.4.** Ισόθερμες αερίου.

Μικροσκοπική περιγραφή του προτύπου του ιδανικού αερίου

10.5. Κίνηση Brown

Κατά το 1827 ο Άγγλος βοτανολόγος R. Brown πρωτοπαρατήρησε με το μικροσκόπιο την τρεμουλιαστή κίνηση μικρών κόκκων γύρης πάνω στο νερό. Είδε ότι οι κόκκοι χόρευαν ακατάπαυστα με κίνηση ακανόνιστη και τυχαία που αρχικά θεωρήθηκε σαν μια μορφή ζωής. Θερμαίνοντας το νερό η κίνηση γινόταν πιο έντονη, ενώ ψύχοντάς το γύριζε στον αρχικό της ρυθμό.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι σωματίδια οποιουδήποτε στερεού που αιωρούνται σε οποιοδήποτε υγρό παρουσιάζουν μια τέτοια κίνηση. Δηλαδή κινούνται τυχαία χωρίς ρυθμό και μάλιστα όσο μικρότερα είναι τα σωματίδια τόσο ταχύτερη είναι η κίνηση. Στην πραγματικότητα ο Brown παρακολουθούσε τα αποτελέσματα ενός μεγάλου αριθμού κρούσεων των μορίων του νερού πάνω σ' ένα κόκκο γύρης, σχ. 10.5.



Σχ. **10.5.** Οι μικρές σφαίρες είναι τα μόρια του νερού που κτυπούν τον κόκκο γύρης.

Ανάλογο πείραμα μπορεί να γίνει αν μέσα σ' ένα διαφανές δοχείο φυσήξουμε τον καπνό από ένα αναμμένο τσιγάρο και στη συνέχεια τον παρατηρήσουμε με το μικροσκόπιο. Η κίνηση οφείλεται στον τυχαίο βομβαρδισμό των σωματιδίων του καπνού από τα μόρια του αέρα.

Αν τα μόρια του αέρα ήταν απείρως μικρά στο μέγεθος και άπειρα στο πλήθος, θα βομβάρδιζαν ένα σωματίδιο καπνού (που είναι σχετικά μεγάλο) συμμετρικά από όλες τις πλευρές με αποτέλεσμα να μην υπάρχει κίνηση Brown. Στην άλλη περίπτωση που θα υπήρχαν μερικά μεγάλα μόρια αέρα γύρω από το σωματίδιο του καπνού, τότε στις συγκρούσεις τους μαζί του θα το ανάγκαζαν να κάνει βίαια άλματα σε κάθε σύγκρουση. Απ' ότι βλέπουμε στο μικροσκόπιο, αυτό που συμβαίνει είναι κάτι ενδιάμεσο ανάμεσα στις δυο πιο πάνω ακραίες περιπτώσεις. Πρέπει επομένως να υπάρχουν πολλά μόρια αέρα που να χτυπούν το σωματίδιο του καπνού απ' όλες τις πλευρές πολλές φορές το δευτερόλεπτο (βλέπε σχ. 10.5). Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα ένας μεγάλος αριθμός μορίων αέρα χτυπούν το σωματίδιο από κάθε κατεύθυνση και τυχαία. Περισσότερα μόρια αέρα χτυπούν μια πλευρά του παρά την άλλη και κινούν το σωματίδιο προς μια κατεύθυνση. Ένα μεγάλο άλμα του σωματιδίου είναι σπάνιο αλλά πάμπολλες μικρές τυχαίες κινήσεις είναι αυτό που βλέπουμε στο μικροσκόπιο.

Αυτή η παρατήρηση ήταν η πρώτη άμεση πειραματική μαρτυρία της ύπαρξης μοριακής κίνησης. Η κίνηση Brown δείχνει όχι μόνο ότι τα αέρια αποτελούνται από μόρια, αλλά ακόμη ότι αυτά τα μόρια είναι σε διαρκή κίνηση. Η ποσοτική εξήγηση της κίνησης Brown ήρθε αργότερα με την ανάπτυξη της κινητικής θεωρίας, όπως θα δούμε στην παράγραφο 10.7. Μια πρώτη ερμηνεία δόθηκε το 1905 από τον Einstein και μάλιστα στο ίδιο τεύχος του περιοδικού όπου ανάπτυξε και τη θεωρία της σχετικότητας. Σήμερα τα αποτελέσματα της κίνησης Brown μπορεί να επαληθευτούν πειραματικά.

10.6. Ιδιότητες ιδανικού αερίου 1986

Με βάση τα πειραματικά δεδομένα της κίνησης Brown αποδόθηκαν στα μόρια του ιδανικού αερίου οι εξής ιδιότητες:

▶ Τα μόρια του αερίου συμπεριφέρονται σαν μικρές όμοιες ελαστικές σφαίρες που βρίσκονται σε διαρκή και τυχαία κίνηση. Έτσι κατά τις συγκρούσεις των μορίων με τα τοιχώματα του δοχείου η κινητική τους ενέργεια δεν αλλάζει.

▶ Μεταξύ των κινουμένων μορίων δεν ασκούνται δυνάμεις παρά μόνο κατά τη στιγμή που συγκρούονται. Επομένως η μεταξύ δύο συγκρούσεων κίνηση είναι ευθύγραμμη και ισοταχής.

▶ Ο χρόνος που διαρκεί η σύγκρουση είναι πολύ μικρός, αμελητέος.

▶ Το μέγεθος των μορίων, σε σχέση με το χώρο που καταλαμβάνουν,

θεωρείται μικρό. Έτσι ο συνολικός τους όγκος είναι αμελητέος σε σχέση με τον όγκο του δοχείου που τα περιέχει.

Αν λοιπόν σ' αυτές τις παραδοχές προσθέσουμε άλλη μία, ότι δηλαδή φανταζόμαστε μεγάλο πλήθος μορίων, όπως συμβαίνει και στα αέρια, τότε έχουμε το πρότυπο του ιδανικού αερίου. Με τη βοήθεια αυτού του προτύπου η κινητική θεωρία των αερίων εξηγεί αβίαστα όλους τους νόμους των αερίων. Αλλά τι είναι η κινητική θεωρία; Είναι η εφαρμογή των νόμων της μηχανικής του Newton σε μεγάλο αριθμό μορίων ιδανικού αερίου και η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων. Με την έκφραση στατιστική επεξεργασία εννοούμε τον υπολογισμό μέσων τιμών, όπως π.χ. μέση ταχύτητα των μορίων, μέση κινητική ενέργεια κ.λ.π.

Η συμπεριφορά των αερίων αποκλίνει από εκείνη του ιδανικού αερίου και αυτό οφείλεται στο ότι τα μόρια των αερίων έχουν δομή, που όσο πιο πολύπλοκη είναι τόσο περισσότερο τα αέρια αυτά αποκλίνουν από το ιδανικό αέριο. Π.χ. η συμπεριφορά του τριατομικού CO_2 αποκλίνει περισσότερο από το ιδανικό αέριο απ' ότι η συμπεριφορά του μονατομικού He, όπως θα δούμε στον πίνακα της παραγράφου 10.10.

10.7. Προσδιορισμός πίεσης-θερμοκρασίας του ιδανικού αερίου με την κινητική θεωρία

Α. Πίεση

Ας θεωρήσουμε μικρό κύβο πλευράς l με τοιχώματα ελαστικά μέσα στον οποίο βρίσκεται ιδανικό αέριο. Φανταζόμαστε ένα μόριο του αερίου με μάζα m ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και συνιστώσες αυτής υ_x, υ_y, υ_z, σχ. 10.6. Αν κατά την κίνησή του το μόριο συγκρουσθεί με το γραμμοσκιασμένο τοίχωμα X του κύβου, θα αναπηδήσει με τη συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα x αντίθετη της υ_x. Οι υ_y και υ_z δε θα επηρεαστούν και έτσι η μεταβολή ΔJ της ορμής του σωματίου θα είναι

$$\Delta J = \text{τελική ορμή - αρχική ορμή} = m\upsilon_x - (-m\upsilon_x) = 2m\upsilon_x, \text{ σχ. } 10.7.$$

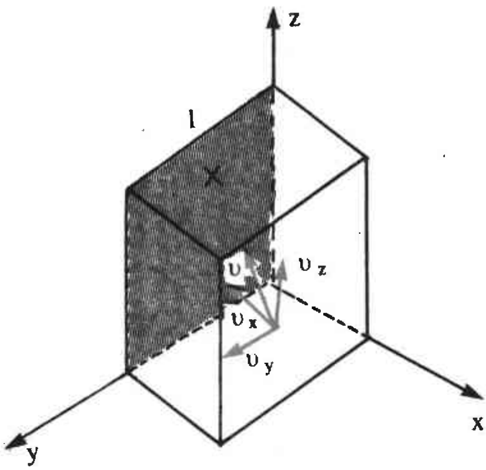
Αν υποθέσουμε ότι κατά την κίνησή του το μόριο δε συγκρούεται με άλλα σωμάτια τότε, για να διανύσει διάστημα 2l χρειάζεται χρόνο $\frac{2l}{\upsilon_x}$.

Επειδή η ταχύτητα υ_x είναι πολύ μεγάλη, ο χρόνος $\frac{2l}{\upsilon_x}$ είναι πολύ μικρός και κατά συνέπεια μπορούμε να το θεωρήσουμε κατά προσέγγιση ίσο με τον πολύ μικρό χρόνο Δt που διαρκεί η σύγκρουση. Έτσι σε χρόνο Δt το μόριο έχει συγκρουστεί με το τοίχωμα X μια φορά και η ορμή του έχει μεταβληθεί κατά $2m\upsilon_x$

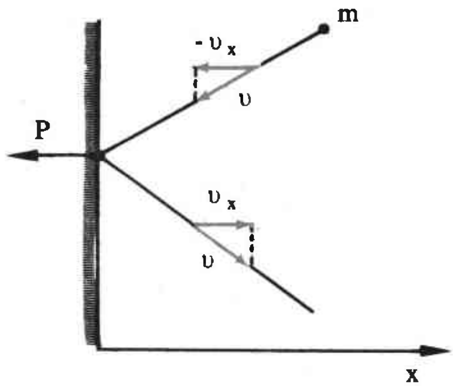
Η δύναμη λοιπόν την οποία δέχεται η έδρα X από το ένα μόριο είναι

$$f_x = \frac{\Delta J}{\Delta t} = \frac{2m\upsilon_x}{2\ l/\upsilon_x} \Rightarrow f_x = \frac{m\upsilon_x^2}{l}$$

Έτσι η ολική δύναμη F_x που δέχεται η έδρα X, από τα N μόρια που



Σχ. 10.6. Μόριο αερίου με ταχύτητα $\upsilon(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ μέσα σε κύβο ακμής l.



Σχ. 10.7. Μεταβολή ορμής $\Delta J = m\upsilon_x - (-m\upsilon_x) = 2m\upsilon_x$.

βρίσκονται μέσα στον κύβο, είναι:

$$F_x = \frac{m\upsilon_{1x}^2}{l} + \frac{m\upsilon_{2x}^2}{l} + \cdots + \frac{m\upsilon_{Nx}^2}{l}$$

$$\text{ή} \quad F_x = \frac{m}{l}(\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{2x}^2 + \cdots + \upsilon_{Nx}^2) = \frac{Nm}{l}\,\frac{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{2x}^2 + \cdots + \upsilon_{Nx}^2}{N}$$

Η παράσταση $\frac{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{2x}^2 + \cdots \upsilon_{Nx}^2}{N}$ είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της ταχύτητας που έχουν τα μόρια του αερίου κατά τον άξονα x. Αν λοιπόν την παραστήσουμε με $\overline{\upsilon_x^2}$, τότε η δύναμη F_x γίνεται

$$F_x = \frac{Nm}{l}\,\overline{\upsilon_x^2}$$

Όμοια βρίσκουμε τις δυνάμεις F_y και F_z που δέχονται τα τοιχώματα Y και Z εξ αιτίας των κρούσεων των μορίων με αυτά. Θα είναι δηλαδή

$$F_y = \frac{Nm}{l}\,\overline{\upsilon_y^2} \quad \text{και} \quad F_z = \frac{Nm}{l}\,\overline{\upsilon_z^2}$$

Αν διαιρέσουμε τη δύναμη F_x με το εμβαδόν l^2 της έδρας X, βρίσκουμε την πίεση P_x που δέχεται η έδρα X. Δηλαδή

$$P_x = \frac{F_x}{l^2} = \frac{Nm}{l^3}\overline{\upsilon_x^2}$$

Οι πιέσεις P_y και P_z στις έδρες Y και Z του κύβου βρίσκονται όμοια και είναι

$$P_y = \frac{Nm}{l^3}\overline{\upsilon_y^2} \qquad P_z = \frac{Nm}{l^3}\overline{\upsilon_z^2}$$

Επειδή πειραματικά βρίσκεται ότι οι πιέσεις $P_x = P_y = P_z = P$, συνεπάγεται από τις τρεις τελευταίες σχέσεις ότι, $\overline{\upsilon_x^2} = \overline{\upsilon_y^2} = \overline{\upsilon_z^2}$ (10.3)

Ισχύει όμως ότι $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$ και επομένως $\overline{\upsilon^2} = \overline{\upsilon_x^2} + \overline{\upsilon_y^2} + \overline{\upsilon_z^2}$ (10.4)

Από τις (10.3) και (10.4) παίρνουμε $\overline{\upsilon^2} = 3\overline{\upsilon_x^2} = 3\overline{\upsilon_y^2} = 3\overline{\upsilon_z^2}$.

Συνεπώς η πίεση P που ασκείται σε κάθε τοίχωμα του κύβου, δηλαδή η πίεση του αερίου, θα είναι ίση προς:

$$P = \frac{Nm}{l^3}\frac{\overline{\upsilon^2}}{3} \tag{10.5}$$

Αν με V παραστήσουμε τον όγκο του κύβου, με $N_1 = \frac{N}{V}$ τον αριθμό των μορίων του αερίου ανά μονάδα όγκου και με d την πυκνότητα του αερίου, η (10.5) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$P = \frac{Nm}{V}\frac{\overline{\upsilon^2}}{3}$$

$$P = \frac{1}{3} N_1 m\overline{\upsilon^2} \tag{10.6}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3} d\overline{\upsilon^2}} \tag{10.7}$$

Η (10.6) μπορεί να γραφεί και ως εξής: $P = \frac{2}{3} N_1 \frac{1}{2} m\overline{\upsilon^2}$.

Η ποσότητα $\frac{1}{2} m\overline{\upsilon^2}$ είναι η μέση κινητική ενέργεια $\overline{E}_\kappa$ για κάθε μόριο του

αερίου και έτσι η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\boxed{P = \frac{2}{3} N_1 \overline{E}_\kappa} \qquad (10.8)$$

Με τη βοήθεια λοιπόν του προτύπου του ιδανικού αερίου και των νόμων της μηχανικής, υπολογίσαμε στατιστικά την πίεση P του αερίου. Πετυχαίνουμε έτσι να συσχετίσουμε μια μακροσκοπική μεταβλητή, όπως η πίεση του αερίου, με μια μικροσκοπική, όπως η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου.

Ο αριθμός των μορίων του αερίου που κτυπούν τα τοιχώματα του δοχείου, στη μονάδα του χρόνου, δεν είναι σταθερός, δηλαδή παρουσιάζει διακυμάνσεις. Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί. Αυτές οι διακυμάνσεις παρατηρούνται στη μετρούμενη πίεση, ή αλλιώς η πίεση παραμένει σταθερή; Η απάντηση είναι ότι εξ αιτίας του πολύ μεγάλου αριθμού των μορίων που κτυπούν τα τοιχώματα του δοχείου, οι διακυμάνσεις αυτές είναι αμελητέες και συνεπώς η παρατηρούμενη πίεση είναι σταθερή.

Τέλος σημειώνουμε ότι η $\overline{E}_\kappa$ που εμφανίζεται στον τύπο (10.8), παριστάνει τη μέση κινητική ενέργεια που οφείλεται στη μεταφορική κίνηση των μορίων.

Β. Θερμοκρασία 1985

Η σχέση (10.8) γράφεται $P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\overline{E}_\kappa$ ή $PV = \frac{2}{3} N\overline{E}_\kappa$ (10.9)

Αν με N_A παραστήσουμε την σταθερά Avogadro, δηλαδή τον αριθμό των μορίων που περιέχει 1 mol, η καταστατική εξίσωση $PV = nRT$ γράφεται $PV = nN_A \frac{R}{N_A} T$. Το σταθερό πηλίκο $\frac{R}{N_A}$ ονομάζεται σταθερά του Boltzmann K, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$PV = NKT \qquad (10.10)$$

όπου $N = nN_A$ ο αριθμός των μορίων του αερίου.

Η σύγκριση των σχέσεων (10.9) και (10.10) δίνει $\frac{2}{3} N\overline{E}_\kappa = NKT \Rightarrow$

$$\boxed{\overline{E}_\kappa = \frac{3}{2} KT} \quad (10.11) \quad \text{ή} \quad \boxed{T = \frac{2}{3K}\overline{E}_\kappa} \quad (10.12)$$

Δηλαδή η μέση κινητική ενέργεια για κάθε μόριο του αερίου, που οφείλεται στην τυχαία μεταφορική τους κίνηση, είναι ανάλογη προς την

απόλυτη θερμοκρασία του αερίου. Έτσι βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ της μακροσκοπικής μεταβλητής T και της μικροσκοπικής μεταβλητής $\overline{E}_\kappa$.

Από τη σχέση (10.11) φαίνεται ότι για $T=0$ θα είναι και $\overline{E}_\kappa=0$, δηλαδή στο απόλυτο μηδέν τα μόρια του ιδανικού αερίου ηρεμούν. Αυτό όμως δεν είναι σωστό γιατί και στην περίπτωση που το ιδανικό αέριο υπήρχε στην πραγματικότητα, τα μόρια δε θα ηρεμούσαν για τους εξής λόγους α) Το απόλυτο μηδέν είναι πειραματικά απρόσιτο β) Στη θερμοκρασία κοντά στο απόλυτο μηδέν, η ερμηνεία της συμπεριφοράς της ύλης δίνεται από την κβαντική φυσική που παραδέχεται ότι σ' αυτή τη θερμοκρασία τα μόρια έχουν κάποια κίνηση (ενέργεια μηδενικού σημείου).

Από την ίδια σχέση (10.11) φαίνεται ότι η $\overline{E}_\kappa$ εξαρτάται μόνο από τη T. Έτσι τα μόρια αερίων, όπως το H_2, He, O_2 που στις συνηθισμένες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας προσεγγίζουν το ιδανικό αέριο, έχουν όλα την ίδια μέση κινητική ενέργεια στην ίδια θερμοκρασία, μολονότι οι μάζες των διαφέρουν.

Σαν συμπέρασμα προκύπτει ότι το πρότυπο του ιδανικού αερίου με τη βοήθεια της κινητικής θεωρίας α) Ερμηνεύει την πίεση του αερίου με τη βοήθεια των ελαστικών κρούσεων των μορίων του με τα τοιχώματα του δοχείου β) Συσχετίζει την απόλυτη θερμοκρασία με τη μεταφορική κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου.

Παράδειγμα

Ένα δοχείο περιέχει άζωτο σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Να υπολογιστούν:

α) Η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων.

β) Η μέση κινητική ενέργεια του κάθε μορίου.

γ) Η μεταβολή στην ορμή ενός μορίου σε μια σύγκρουση με τα τοιχώματα του δοχείου, αν υποτεθεί ότι το μόριο πέφτει κάθετα στο τοίχωμα με ταχύτητα $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$.

Λύση

Οι κανονικές συνθήκες είναι:

$$P = 1 \text{ atm} = 1{,}013\cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ και } T = 273\,^\circ K$$

α) Από τη σχέση $P = \frac{1}{3}d\overline{\upsilon^2} \Rightarrow \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3P}{d}} \Rightarrow \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3PV}{m_{\alpha\varepsilon\rho.}}}$

Επειδή, αν θεωρήσουμε 1 mol αζώτου, δηλαδή $28\cdot 10^{-3}$ Kgr θα είναι $V = 22{,}4\ 10^{-3}\text{m}^3$, έχουμε:

$$\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}013\cdot 10^5\cdot 22{,}4\cdot 10^{-3}}{28\cdot 10^{-3}}}\,\text{m/sec} \Rightarrow \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = 490\text{m/sec}$$

β) Έχουμε $\overline{E}_\kappa = \frac{1}{2}\, m\overline{\upsilon^2}$, όπου m η μάζα του μορίου η οποία είναι

$$m = \frac{\text{μάζα γραμμομορίου}}{N_A} = \frac{28\cdot 10^{-3}}{6{,}023\cdot 10^{23}}\text{Kgr} \Rightarrow m = 4{,}65\cdot 10^{-26}\text{Kgr}$$

Έτσι $\overline{E}_\kappa = \frac{1}{2}\, 4{,}65\cdot 10^{-26}\cdot (490)^2$ Joule $\Rightarrow \overline{E}_\kappa = 5{,}58\cdot 10^{-21}$ Joule.

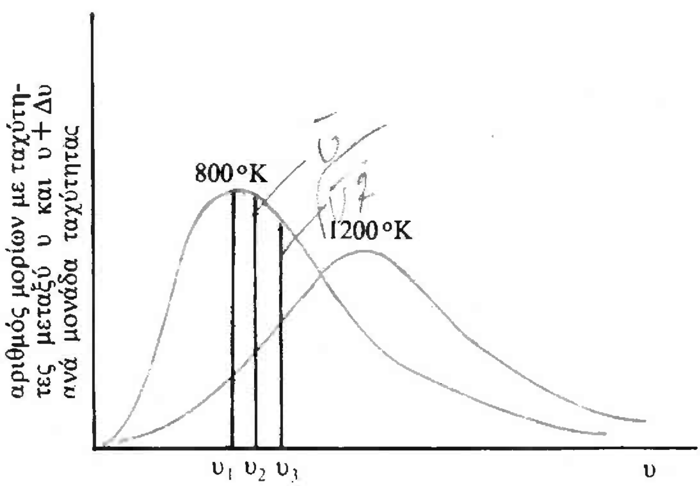
γ) Η μεταβολή της ορμής ενός μορίου είναι $\Delta J = 2m\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$

$\Delta J = 2\cdot 4{,}65\cdot 10^{-26}\cdot 490$ kgr·m·sec^{-1} $\Rightarrow \Delta J = 4{,}56\ 10^{-23}$ kgr.m.sec^{-1}

10.8. Κατανομή των ταχυτήτων των μορίων αερίου Κατανομή Maxwell-Boltzmann (M-B)

Τα μόρια ενός αερίου που βρίσκονται σ'ένα δοχείο σε κατάσταση ισορροπίας δεν έχουν όλα την ίδια ταχύτητα για δυο λόγους, πρώτον εξ αιτίας του τυχαίου τρόπου με τον οποίον ανταλλάσσουν μεταξύ τους ενέργεια και δεύτερον εξαιτίας του τυχαίου τρόπου με τον οποίον ανταλλάσσουν ενέργεια με τα τοιχώματα του δοχείου.

Εφαρμόζοντας την κινητική θεωρία ο Maxwell μπόρεσε να βρει την κατανομή των μορίων αερίου στις διάφορες ταχύτητες, που ονομάζεται κατανομή Maxwell-Boltzmann και που αποδίδεται στο σχ. 10.8.



Σχ. 10.8. Κατανομή Maxwell-Boltzmann.

Στο σχήμα έχουν αποδοθεί οι κατανομές των ταχυτήτων των μορίων ενός αερίου για δυο διαφορετικές θερμοκρασίες. Στην κατανομή που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία των 800 °K, με $υ_1$ παριστούμε την ταχύτητα που αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης, με $υ_2$ παριστούμε τη μέση ταχύτητα των μορίων του αερίου και με $υ_3$ παριστούμε την ταχύτητα $\sqrt{\overline{υ^2}}$. Από τη σχέση (10.11) και από την $\overline{E}_κ = \frac{1}{2} m\overline{υ^2}$ προκύπτει ότι

$$\boxed{\sqrt{\overline{υ^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}}$$

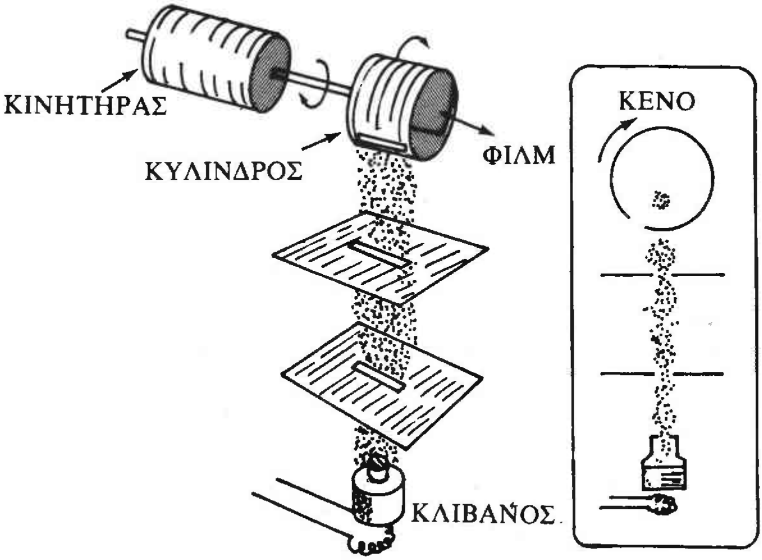
Το ότι η $υ_2$ είναι δεξιά της $υ_1$ δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι ταχύτητες των μορίων έχουν μια ελάχιστη τιμή (το μηδέν), ενώ δεν έχουν μέγιστη και γι' αυτό οι καμπύλες στο σχ. 10.8 πλησιάζουν τον άξονα των ταχυτήτων ασυμπτωτικά.

Από τις παραπάνω κατανομές φαίνεται ακόμη ότι όσο αυξάνει η θερμοκρασία του αερίου τόσο αυξάνουν οι ταχύτητες των μορίων του. Αυτό μπορεί να φανεί και αναλυτικά ως εξής. Από την καταστατική εξίσωση των αερίων $PV = nRT$ φαίνεται ότι όταν αυξάνει η T, αυξάνει το γινόμενο P V και από τη σχέση (10.9) της παραγράφου 10.7 φαίνεται ότι αύξηση του PV αντιστοιχεί σε αύξηση της $\overline{υ^2}$.

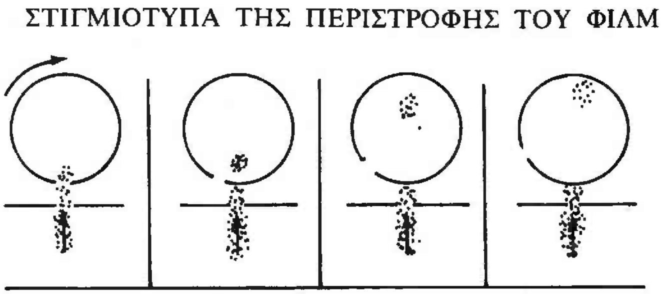
Ο ευρύτατος πειραματικός έλεγχος που έχει γίνει από τότε, έχει επιβεβαιώσει την αλήθεια αυτής της κατανομής πράγμα που ενισχύει την ορθότητα της κινητικής θεωρίας.

Μεταξύ των διαφόρων τρόπων πειραματικού ελέγχου της κατανομής ταχυτήτων κατά M-B περιγράφουμε το πείραμα του Zartman, σχ. 10.9. Από ένα κλίβανο μέσα στον οποίο θερμαίνεται το αέριο στη θερμοκρασία που θέλουμε, μέσα από μια σχισμή διοχετεύονται τα μόρια του αερίου σε κύλινδρο που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Το εσωτερικό τού κυλίνδρου φέρει ευαίσθητο φίλμ, πάνω στο οποίο αφήνουν τα ίχνη τους όσα μόρια προσπέσουν σ' αυτό. Από τον αριθμό των μορίων που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο του φίλμ, υπολογίζουμε εύκολα την κατανομή των μορίων στις διάφορες ταχύτητες γιατί όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση του ίχνους ενός μορίου από το σημείο μηδέν τόσο μικρότερη η ταχύτητα του μορίου που αντιστοιχεί στο ίχνος.

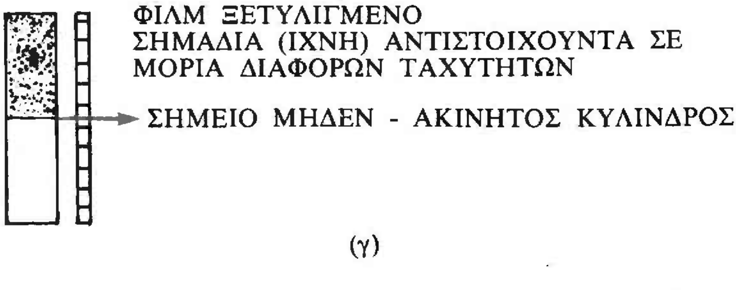
Για το H_2 βρέθηκε ότι σε θερμοκρασία 0°C η μέση ταχύτητα μορίων είναι ίση περίπου με 1700 m/sec.



(α)



(β)



(γ)

Σχ. 10.9. Πείραμα Zartman για τον έλεγχο της κατανομής Maxwell-Boltzmann.

Εφαρμογή

Με τη βοήθεια της κινητικής θεωρίας είναι δυνατόν να ερμηνευτεί η έλλειψη μερικών αερίων από την ατμόσφαιρα της γης ή την ατμόσφαιρα άλλων ουράνιων σωμάτων.

Πράγματι από τη σχέση $\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\dfrac{3KT}{m}}$ έχουμε:

$$\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3KTN_A}{mN_A}} \Rightarrow \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (\text{M} = \text{γραμμομόριο αερίου}) \quad (\alpha)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διαφυγής, δηλαδή η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα για να εγκαταλείψει τη γήϊνη έλξη είναι

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} = 1{,}12 \cdot 10^4 \text{ m/sec} \quad (\beta)$$

Από την εξίσωση (α) συμπεραίνουμε ότι η $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$ γίνεται μεγάλη για ψηλές θερμοκρασίες και για αέρια με μικρό μοριακό βάρος. Για παράδειγμα προκειμένου για το υδρογόνο ($M = 2\ 10^{-3}$ Kgr/mol) όταν αυτό βρίσκεται στο ύψος των 600 Km όπου $T \simeq 1500°K$ βρίσκουμε $\sqrt{\overline{\upsilon^2}} \simeq 4{,}3\ 10^3$ m/sec. Αν τώρα παρατηρήσουμε το σχήμα 10.8 βλέπουμε ότι υπάρχουν μόρια με ταχύτητες πολύ μεγαλύτερες από την $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$, δηλαδή στο ύψος των 600 Km μόρια υδρογόνου έχουν ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας διαφυγής $\upsilon_\delta = 1{,}12 \cdot 10^4$ m/sec και έτσι εγκαταλείπουν τη γήϊνη ατμόσφαιρα. Στα 4 δισεκατομμύρια περίπου χρόνια που πέρασαν από το σχηματισμό της γης, σιγά-σιγά τα μόρια του υδρογόνου διαχέονταν προς τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας και από εκεί προς το διάστημα.

Αντίθετα με το υδρογόνο, το οξυγόνο που έχει μεγάλο μοριακό βάρος ($M = 32$ gr) και κατά συνέπεια μικρή $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$ δεν μπόρεσε να εγκαταλείψει την ατμόσφαιρα της γης.

Για τη σελήνη η ταχύτητα διαφυγής υ'_δ είναι

$$\upsilon'_\delta \simeq \frac{1}{5}\upsilon_\delta \quad \text{δηλαδή} \quad \upsilon'_\delta = 2{,}38\ 10^3 \text{ m/sec}$$

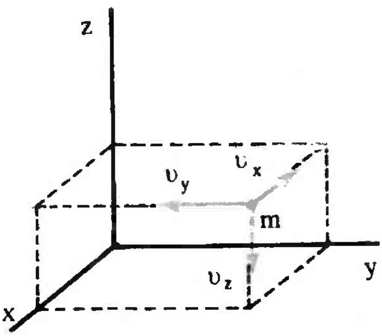
Έτσι ενώ το οξυγόνο παραμένει στη γήϊνη ατμόσφαιρα, εγκατέλειψε σιγά-σιγά την ατμόσφαιρα της σελήνης όπου η ταχύτητα διαφυγής είναι μικρότερη.

10.9. Θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας

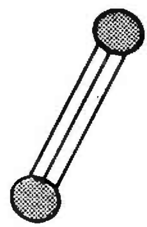
Στην παράγραφο 10.7 είδαμε ότι η μέση κινητική ενέργεια από μεταφορά

$\overline{E}_K$ ενός μορίου ιδανικού αερίου δίνεται από τη σχέση $\overline{E}_K = \frac{3}{2}KT$. Αν η $\overline{E}_K$ γραφεί με τη μορφή $\overline{E}_K = \overline{E}_{Kx} + \overline{E}_{Ky} + \overline{E}_{Kz} = \frac{1}{2} m\overline{\upsilon_x^2} + \frac{1}{2} m\overline{\upsilon_y^2} + \frac{1}{2} m\overline{\upsilon_z^2}$ τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε καθέναν από τους όρους E_{Kx}, E_{Ky}, E_{Kz} ενέργεια $\frac{1}{2}KT$. Η αντιστοιχία αυτή είναι μερική περίπτωση μιας πρότασης γνωστής ως **θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας** η οποία θα διατυπωθεί πιο κάτω. Η ανάγκη για τη διατύπωση του θεωρήματος αυτού προήλθε από την επιθυμία να εξηγηθούν οι ειδικές θερμότητες κατ' αρχήν των διατομικών αερίων αφού για τα μονατομικά αέρια η κινητική θεωρία έδινε μια ικανοποιητική εξήγηση των ειδικών θερμοτήτων.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, **η εσωτερική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων, όπως π.χ. μια ποσότητα αερίου, υπολογίζεται αν αντιστοιχίσουμε ενέργεια $\frac{1}{2}$ KT σε κάθε βαθμό ελευθερίας που προσδιορίζει την κίνηση κάθε σωματιδίου.** Με τον όρο βαθμοί ελευθερίας εννοούμε το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που απαιτούνται για να γνωρίζουμε την κίνηση των σωματιδίων. Η κίνηση ενός μονατομικού μορίου προσδιορίζεται από τρεις μόνο μεταβλητές, τις υ_x, υ_y και υ_z σχ. 10.10. Γι' αυτό ένα μονατομικό μόριο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Η κίνηση ενός διατομικού μορίου με σταθερή σύνδεση μεταξύ των ατόμων του, σχ. 10.11, δηλαδή ενός μορίου που τα άτομά του δεν μπορούν να εκτελούν ταλαντώσεις, προσδιορίζεται από πέντε μεταβλητές. Τρεις για να γνωρίζουμε την ταχύτητα του κ.β. του μορίου και δυο για να προσδιορίζουμε την περιστροφή γύρω από το κ.β. Ένα διατομικό μόριο με χαλαρή σύνδεση, σχ. 10.12, δηλαδή ένα μόριο που μπορεί να μεταφέρεται, να περιστρέφεται και να ταλαντούται έχει επτά βαθμούς ελευθερίας (δηλαδή τρεις λόγω μεταφοράς, δυο λόγω περιστροφής και δυο εξαιτίας της ταλάντωσης).



Σχ. 10.10. Οι συνιστώσες υ_x, υ_y, υ_z προσδιορίζουν την κίνηση ενός μονατομικού μορίου.



Σχ. 10.11. Διατομικό μόριο με σταθερή σύνδεση μεταξύ των ατόμων του.



Σχ. 10.12. Διατομικό μόριο με χαλαρή σύνδεση μεταξύ των ατόμων του.

Έτσι αν έχουμε μια ποσότητα αερίου με N μόρια και κάθε μόριο έχει f βαθμούς ελευθερίας, τότε η μέση ενέργεια κάθε μορίου θα ισούται με

$$\bar{E} = f\,\frac{1}{2}\,KT$$

και η ολική ενέργεια (εσωτερική) του αερίου θα ισούται με

$$U = E_{ολ} = N\bar{E} = \frac{f}{2}\,NKT = \frac{f}{2}\,nRT \qquad (10.13)$$

10.10. Ειδικές θερμότητες αερίων

Είναι γνωστό ότι αν προσφέρουμε σε n mol σώματος θερμότητα ΔQ τότε η αύξηση της θερμοκρασίας του σώματος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\Delta Q = nC\Delta\theta^{*} \qquad (10.14)$$

όπου C η γραμμομοριακή ειδική θερμότητα του σώματος. Στην περίπτωση αερίου το C παίρνει δυο τιμές. Την τιμή C_v αν η προσφορά της θερμότητας γίνει με όγκο σταθερό και την τιμή C_p αν η προσφορά της θερμότητας γίνεται με πίεση σταθερή. Αν προσφέρουμε θερμότητα ΔQ σ' ένα αέριο, με σταθερό όγκο, παίρνουμε όπως είδαμε ΔQ = ΔU. Έτσι η (10.14), επειδή Δθ = ΔT, γράφεται:

$$\boxed{\Delta U = n\,C_v\,\Delta T} \quad (10.15) \qquad ή \qquad \boxed{C_v = \frac{1}{n}\frac{\Delta U}{\Delta T}} \quad (10.16)$$

Αν προσφέρουμε στο αέριο θερμότητα ΔQ, με σταθερή πίεση, τότε $\Delta Q = n\,C_p\,\Delta\theta$. Από την προσφερόμενη θερμότητα ένα μέρος καταναλώνεται στην αύξηση ΔU της εσωτερικής ενέργειας του αερίου και το υπόλοιπο στο έργο W, πράγμα που έχει ως συνέπεια το C_p να είναι μεγαλύτερο του C_v. Η ΔU δίνεται **πάντοτε** από τη σχέση (10.15) διότι η εσωτερική ενέργεια, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Το

---

* Η σχέση $\Delta Q = nC\Delta\theta$ προκύπτει από τη γνωστή σχέση $\Delta Q = m\;c\;\Delta\theta$ αν γραφεί με τη μορφή $\Delta Q = \frac{m}{MB}\,c\;MB\;\Delta\theta = n\;C\;\Delta\theta$ όπου $C = c\;MB$.

έργο W ισούται με P ΔV. Επομένως στην περίπτωση αυτή ο 1ος θερμοδυναμικός νόμος γράφεται:

$$\Delta Q = \Delta U + W \tag{10.17}$$

η

$$\boxed{nC_p\Delta T = nC_v\Delta T + p\Delta V} \tag{10.18}$$

Για σταθερή πίεση η καταστατική εξίσωση των αερίων δίνει $p\Delta V = nR\Delta T$. Επομένως με αντικατάσταση η (10.18) γράφεται:

$$\boxed{C_p = C_v + R} \tag{10.19}$$

από την οποία φαίνεται ότι πράγματι $C_p > C_v$.
Η (10.16) με τη βοήθεια της (10.13) δίνει

$$C_v = \frac{1}{n}\,\frac{\Delta\left(\frac{f}{2}\,nRT\right)}{\Delta T} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{f}{2}\,nR\Delta T}{\Delta T} = \frac{f}{2}\,R$$

οπότε $C_p = C_v + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R$

Έτσι αν συμβολίσουμε με γ το λόγο $\frac{C_p}{C_v}$, έχουμε $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}$

$$C_v = \frac{f}{2}\,R \tag{10.20}$$

$$C_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R \tag{10.21}$$

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \tag{10.22}$$

Π.χ. για το H_2 θέτοντας $f=5$ στη σχέση (10.21) βρίσκουμε θεωρητική τιμή

$$C_p = 29{,}1\ \frac{\text{Joule}}{\text{mol}\,^\circ\text{K}}$$

Στη συνέχεια δίνουμε έναν πίνακα των θεωρητικών και πειραματικών τιμών για το C_p και το γ σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία γύρω στους 300°K για διάφορα αέρια.

	$C_p \left(\frac{Joule}{mol^oK}\right)$		$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$	
	Πειραματική	Θεωρητική	Πειραματική	Θεωρητική
He	20,8	20,8	1,66	1,67
Ar	20,7	20,8	1,67	1,67
H_2	28,8	29,1	1,41	1,40
O_2	29,3	29,1	1,40	1,40
CO_2	36,6	33,2	1,32	1,33
SO_2	40,7	33,2	1,29	1,33

Από τον πίνακα βλέπουμε αποκλίσεις μεταξύ των θεωρητικών τιμών (που βρίσκονται από τις σχέσεις (10.21) και (10.22)) και των τιμών που βρίσκονται από το πείραμα για τα διατομικά, τριατομικά μόρια. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο πιο πολυπλοκότερη δομή έχει το μόριο τόσο περισσότερο αποκλίνει από τη σημειακή μάζα του ιδανικού αερίου και αρχίζουν να παρουσιάζονται κβαντικά φαινόμενα στη συμπεριφορά του αερίου.

Στην παράγραφο 9.8 μελετήσαμε την αδιαβατική μεταβολή αερίου, που παριστάνεται από καμπύλες πιο απότομες από τις ισόθερμες σε διάγραμμα P - V. Επειδή $Q=0$ στην αδιαβατική μεταβολή, έχουμε $\Delta U + W = 0$. Η σχέση αυτή γράφεται n $C_v \Delta T + \Sigma P \Delta V = 0$. Από τη σχέση αυτή και με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης των αερίων παίρνουμε την εξίσωση της αδιαβατικής μεταβολής ενός αερίου μεταξύ δυο καταστάσεων 1 και 2 που είναι:

$$\boxed{P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}} \qquad (10.23)$$

και επειδή $\gamma > 1$ δικαιολογείται γιατί οι αδιαβατικές καμπύλες αερίου είναι πιο απότομες από τις ισόθερμες μεταβολές αερίου οι οποίες, μεταξύ των καταστάσεων 1 και 2, περιγράφονται όπως είδαμε από την εξίσωση

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

Αν στην αδιαβατική μεταβολή αερίου υπολογίσουμε το έργο W μεταξύ δυο καταστάσεων 1 και 2, με την βοήθεια των στοιχειωδών έργων $\Delta W = P\ \Delta V$, αποδεικνύεται ότι αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{W = \Sigma \Delta W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-\gamma}} \qquad (10.24)$$

Παράδειγμα

Το μοριακό βάρος του αζώτου είναι 28. Η ειδική θερμότητα αυτού υπό σταθερό όγκο είναι $c_v = 0,174$ cal/gr °C. Να βρεθούν οι βαθμοί ελευθερίας του μορίου του αζώτου. Δίνεται $R = 1,99$ cal/mol °C.

Λύση

Είναι $C_v = 28$ gr/mol $0,174$ cal/gr °C $= 4,87$ cal/mol °C $= \frac{f}{2}R \Rightarrow f = \frac{2C_v}{R} = 5$

Με άλλο τρόπο·
Ισχύει $C_p = C_v + R = (4,87 + 1,99)$ cal/mol °C $= 6,86$ cal/mol °C

Αλλά $C_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R$ όπου f οι βαθμοί ελευθερίας

Συνεπώς $f = 2\left(\frac{C_p}{R} - 1\right) = 2\left(\frac{6,86}{1,99} - 1\right) = 4,9 \simeq 5$

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Πως παριστάνεται η ισόχωρη μεταβολή μιας ποσότητας αερίου σε άξονες P - T;

2. Πως απεικονίζεται η καταστατική εξίσωση του ιδανικού αερίου σε άξονες PV - T;

3. Ένα μετεωρολογικό μπαλόνι περιέχει αέριο ήλιο. Στο ύψος των 20 Km η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας είναι -50 °C και η πίεση 40 mm Hg. Υποθέτοντας ότι το μπαλόνι έχει την ίδια θερμοκρασία και πίεση με το περιβάλλον, να βρεθεί ο αριθμός των mol του He που περιέχονται στο μπαλόνι αν ο όγκος αυτού είναι 90 m^3.

(Απ. 259)

4. Οι καμπύλες (α) και (β) στο σχήμα περιγράφουν τη συμπεριφορά δυο όγκων του ίδιου αερίου κάτω από συνθήκες ισόθερμης μεταβολής.

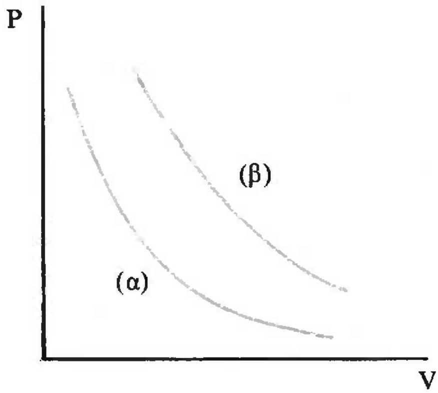
Ποια ή ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις μπορεί να εξηγήσει γιατι οι δυο καμπύλες δε συμπίπτουν αν και αναφέρονται στο ίδιο αέριο;

Α) Η μεταβολή του καθενός όγκου του αερίου γίνεται σε διαφορετική σταθερή θερμοκρασία.

Β) Οι όγκοι περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς μορίων.

Γ) Οι όγκοι περιέχουν διαφορετικές μάζες.

Δ) Οι μεταβολές που περιγράφουν οι καμπύλες δε γίνονται σύμφωνα με το νόμο του Boyle.



5. 2 gr οξυγόνου που βρίσκονται σε κανονικές συνθήκες, συμπιέζονται ισοβαρώς μέχρι ν' αποκτήσουν το μισό του αρχικού όγκου. Ζητούνται

α) η ενέργεια η οποία προσφέρθηκε μέσω του έργου W στο αέριο

β) η μεταβολή που επήλθε στη θερμοκρασία του αερίου.

Δίνεται $R = 8{,}314$ Joule/mol. ^0K

(Απ. α) 70,9 Joule β) 136,5 ^0K**)**

6. Θερμαίνοντας τα τοιχώματα ενός δοχείου που περιέχει ιδανικό αέριο, η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται. Μπορεί αυτό να ερμηνευτεί με τη βοήθεια της κινητικής θεωρίας;

7. Ένα δοχείο έχει όγκο $V = 0{,}5$ lit και περιέχει H_2 σε θερμοκρασία $\theta = 17^oC$ και πίεση $P = 10^{-3}$ mm Hg.

Να υπολογίσετε:

α) Τον αριθμό των μορίων μέσα στο δοχείο.

β) Την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του H_2, $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$, λόγω μεταφορικής κίνησης.

Δίνονται: Μοριακό βάρος $H_2 = 2$

Σταθερά Avogadro $N_A = 6\ 10^{23}$ mol^{-1}

Παγκόσμια σταθερά αερίων $R = 0{,}0821 \dfrac{\text{lit atm}}{\text{mol } ^oK} = 8{,}314 \dfrac{\text{Joule}}{\text{mol } ^oK}$

(Απ. α) $1{,}66\ 10^{16}$ β) 1900 m/sec**)**

8. Αν η πυκνότητα του οξυγόνου σε κανονικές συνθήκες είναι 1,43 Kgr/m^3, να υπολογίσετε την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων στις θερμοκρασίες $0^{o}C$, $27^{o}C$ και $127^{o}C$. Δίνεται 1 atm = $1{,}013\ 10^5\ N/m^2$.

(Απ. 461 m/sec, 483 m/sec, 558 m/sec)

9. Η θέση ενός μορίου αερίου πάνω στο φίλμ του σχήματος 10.9 έχει αποτυπωθεί σε απόσταση d από το «σημείο μηδέν» του φίλμ. Υπολογίστε την ταχύτητα του μορίου σε συνάρτηση με τα d, την ακτίνα του κυλίνδρου r και τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ω.

$$\left(\text{Απ. } \frac{2r^2\omega}{d}\right)$$

10. Σ' ένα δοχείο όγκου V υπάρχουν N μόρια ιδανικού αερίου με μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο $\overline{E}_{\kappa}$. Ζητούνται:

α) η ολική κινητική ενέργεια του αερίου
β) η θερμοκρασία του αερίου
γ) η πίεση του αερίου
δ) αν ο όγκος του αερίου διπλασιασθεί συνδέοντας το δοχείο με άλλο δοχείο ίσου όγκου που είναι κενό, τι θα συμβεί στην πίεση και τη θερμοκρασία του αερίου;

Να δοθούν οι απαντήσεις σε συνάρτηση με τα V, N, $\overline{E}_{\kappa}$ και τη σταθερά Boltzmann K,

11. Σε ένα δοχείο διαστάσεων 0,1m × 0,1m × 0,2m περιέχονται είκοσι σωματίδια τα οποία θεωρούνται σαν σφαιρικές μπάλες με μάζα 3 gr το καθένα. Τα σωματίδια κινούνται όπως ακριβώς τα μόρια του ιδανικού αερίου και κάποια χρονική στιγμή έχουν τις ακόλουθες ταχύτητες σε m/sec.

3	5	6	1	3	4	4	2	7	4
5	6	2	4	5	3	8	4	5	2

α) Φτιάξτε ένα πίνακα στον οποίο να φαίνεται πόσα σωματίδια έχουν την ίδια ταχύτητα.
β) Σχεδιάστε ένα ραβδόγραμμα που να δείχνει την κατανομή των ταχυτήτων.
γ) Με βάση τα δεδομένα του πίνακα να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινούνται τα περισσότερα από τα σωματίδια.
δ) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα των σωματιδίων.
ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$.
στ) Πόση είναι μέση κινητική ενέργεια των μορίων και πόση είναι η ολική κινητική ενέργεια;
ζ) Πόση είναι η μέση πίεση που ασκείται στα τοιχώματα του δοχείου;

(Απ. γ) 4 m/sec δ) 4,15 m/sec ε) 4,5 m/sec στ) 0,03 Joule, 0,6 Joule ζ) 202,5 N/m^2)

12. Οι ταχύτητες 11 μορίων αερίου σε m/sec είναι 1,1,2,2,2,3,3,4,4,5,6. Να βρεθούν, η μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}$ και η ταχύτητα $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$. Να συγκριθούν τα $\overline{\upsilon^2}$ και $\bar{\upsilon}^2$.

(**Απ.** 3 m/sec, 3,37 m/sec)

13. Ας θεωρήσουμε δυο θερμικά μονωμένα δοχεία ίσου όγκου, μέσα στα οποία υπάρχει ο ίδιος αριθμός μορίων αερίου υπό διαφορετικές θερμοκρασίες T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$). **Παίρνουμε το 1/3 του περιεχομένου από κάθε δοχείο και το βάζουμε** σ' ένα τρίτο θερμικά μονωμένο δοχείο ίσου όγκου με τα αρχικά. Να παρασταθούν οι κατανομές των ταχυτήτων των μορίων και για τα τρία δοχεία.

14. Ποια η φυσική σημασία της σταθεράς K του Boltzmann;

15. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα $\sqrt{\overline{\upsilon^2}}$ των μορίων ενός μονατομικού αερίου με τη βοήθεια ενός θερμομέτρου;

16. Επειδή η θερμοκρασία στην κλίμακα Kelvin σχετίζεται προς τη μέση κινητική ενέργεια των μορίων αερίου, μήπως η θεωρία της σχετικότητας με το να θέτει ανώτατο όριο ταχύτητας θέτει επίσης και ανώτατο όριο θερμοκρασίας;

17. Μια πυρηνική αντίδραση σύντηξης με δευτέριο γίνεται μόνο αν η κινητική ενέργεια του δευτέριου είναι μεγαλύτερη από $1{,}2 \ 10^{-13}$ Joule. Σε ποια θερμοκρασία αρχίζει η σύντηξη του δευτέριου;

(**Απ.** $5{,}8 \ 10^9$ °K)

18. Πότε δυο ποσότητες ιδανικού αερίου με την ίδια θερμοκρασία έχουν διαφορετικά ποσά εσωτερικής ενέργειας;

19. Ένας όγκος ξηρού αέρα που βρίσκεται σε πίεση 1×10^5 N m^{-2} και θερμοκρασία 273 °K εκτονώνεται αδιαβατικά στο τριπλάσιο του αρχικού του όγκου. Αν $C_p/C_v = \gamma = 1{,}4$, να υπολογίσετε την τελική πίεση και θερμοκρασία του αερίου.

(**Απ.** $2{,}1 \ 10^4$ N m^{-2}, 176 °K)

20. Ο αέρας που υπάρχει στον κύλινδρο, συμπιέζεται στο μισό του αρχικού του όγκου, ενώ η θερμοκρασία του παραμένει σταθερή.

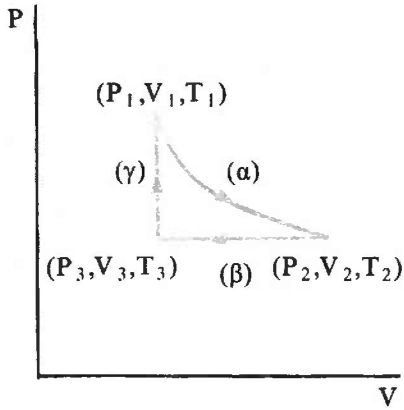


Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στην πίεση και τη μέση τιμή των τετραγώνων των ταχυτήτων των μορίων του αέρα $\overline{υ^2}$, είναι σωστή;

Α Η πίεση υποδιπλασιάστηκε και η $\overline{υ^2}$ έμεινε η ίδια.
Β Η πίεση έμεινε η ίδια και η $\overline{υ^2}$ διπλασιάστηκε.
Γ Η πίεση διπλασιάστηκε όπως και η $\overline{υ^2}$.
Δ Η πίεση διπλασιάστηκε και η $\overline{υ^2}$ έμεινε η ίδια.
Ε Η πίεση διπλασιάστηκε και η $\overline{υ^2}$ υποδιπλασιάστηκε.

21) Ας θεωρήσουμε την κυκλική αντιστρεπτή μεταβολή n mol ιδανικού αερίου, που παριστάνεται από το διάγραμμα του σχήματος. Η κυκλική αυτή μεταβολή αποτελείται: από μια ισόθερμη εκτόνωση (α) στην οποία ο όγκος του αερίου διπλασιάζεται, από μια ισοβαρή συμπίεση (β) που φέρνει το αέριο στον αρχικό όγκο και από μια ισόχωρη μεταβολή που φέρνει το αέριο στην αρχική του πίεση. Για κάθε επιμέρους μεταβολή του αερίου και για την κυκλική μεταβολή να βρεθούν η μεταβολή στην εσωτερική ενέργειά του, η ενέργεια που αποδίδεται ή απορροφάται από το περιβάλλον μέσω του έργου W και η προσφερομένη στο αέριο θερμότητα.

Δίνονται τα Cv, R, T_1.



22) Ένα mol μονατομικού αερίου που καταλαμβάνει όγκο 10 lit σε θερμοκρασία 27 °C, θερμαίνεται στους 327 °C ενώ ο όγκος του διατηρείται σταθερός. Κατόπιν το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα στην αρχική του πίεση και τέλος συμπιέζεται ισοβαρώς στις αρχικές συνθήκες.

α) Να αποδώσετε σε άξονες P - V την κυκλική μεταβολή.
β) Να υπολογίσετε τη θερμότητα που προσφέρεται στο αέριο κατά τη διάρκεια ενός κύκλου.
γ) Να υπολογίσετε το έργο W σε έναν κύκλο.
δ) Να υπολογίσετε την απόδοση αυτού του κύκλου.

Δίνεται ότι: R = 8,314 Joule/mol °K = 0,0821 lit atm/mol °K

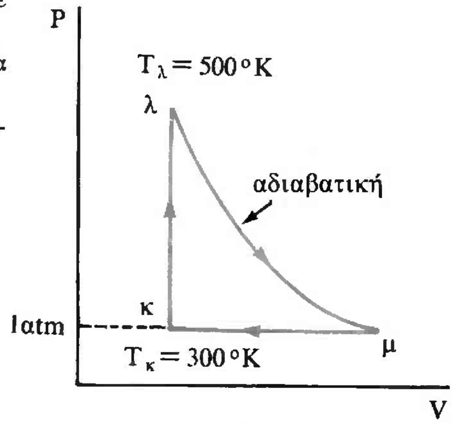
και 1 atm = 1,013 10^5 N/m^2

(Απ. β) 7201 Joule γ) 968,5 Joule δ) 13,4%)

23. Μια ιδανική θερμική μηχανή λειτουργεί σύμφωνα με τον κύκλο του σχήματος, χρησιμοποιώντας 0,2 mol ιδανικού αερίου με $\gamma = 5/3$.

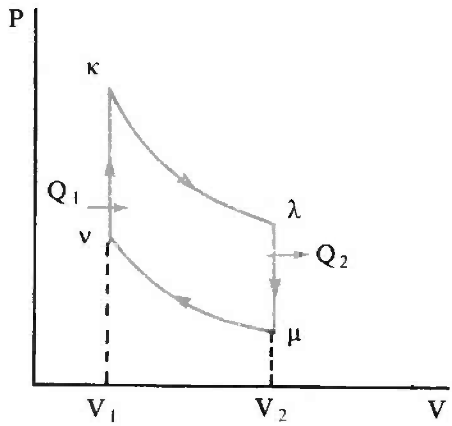
α) Βρείτε τις τιμές των P,V,T για τα σημεία κ,λ,μ του κύκλου.

β) Βρείτε την ενέργεια που αποδίδει η μηχανή στο περιβάλλον σε κάθε κύκλο.



(Απ. β) 52,7 Joule)

24. Μια αντιστρεπή μηχανή λειτουργεί σύμφωνα με τον κύκλο που δείχνεται στο σχήμα και που αποτελείται από δυο αδιαβατικές μεταβολές και δυο ισόχωρες. Να βρεθεί η μέγιστη θεωρητική απόδοση αυτής της μηχανής σε συνάρτηση με τα V_1 και V_2.



$$\left(\text{Απ. } 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right)$$

11
Ταλαντώσεις

11.1. Περιοδικές κινήσεις

Οι κινήσεις που γίνονται στη φύση μπορεί να ταξινομηθούν σε περιοδικές και μη περιοδικές. Σ' αυτό το κεφάλαιο θ' ασχοληθούμε μόνο με τις περιοδικές κινήσεις.

Μια κίνηση λέγεται περιοδική, όταν επαναλαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Έτσι για παράδειγμα περιοδικές κινήσεις είναι: η κίνηση που κάνουν τα νερά στο στενό του Ευρίπου, η κίνηση των φτερών των πουλιών, η γνωστή μας ομαλή κυκλική κίνηση, κ.τ.λ.

Όταν η περιοδική κίνηση γίνεται παλινδρομικά γύρω από μια θέση ισορροπίας ονομάζεται **ταλάντωση.**

Στις ταλαντώσεις μπορούμε να κατατάξουμε τις κινήσεις που κάνουν:

α) Οι ηχογόνες πηγές (χορδές, μεμβράνες, κώνοι μεγαφώνων κ.τ.λ.).

β) Οι οικοδομές και οι υψηλές κατασκευές κατά τη διάρκεια ενός σεισμού

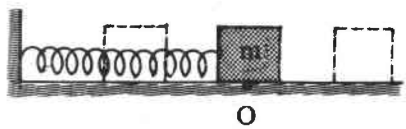
γ) Οι κρεμαστές γέφυρες μεγάλου μήκους, όταν πνέουν δυνατοί άνεμοι

δ) Τα ιόντα στο μεταλλικό πλέγμα

ε) Τα άτομα στα μόρια, όπως π.χ. το άτομο του αζώτου στο μόριο της αμμωνίας.

Ιδιαίτερα, όταν η ταλάντωση εξελίσσεται πάνω σε ευθεία γραμμή, ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση** και τέτοια κίνηση κάνει για παράδειγμα μια μάζα στερεωμένη στο άκρο ενός ελατηρίου, όταν απομακρυνθεί από τη θέση O όπου ισορροπεί και αφεθεί ελεύθερη, σχ. 11.1.

Όλες οι γραμμικές ταλαντώσεις, με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας (αμείωτες), έχουν κοινά χαρακτηριστικά όπως το πλάτος και την περίοδο. Τα κοινά αυτά χαρακτηριστικά μπορούν να περιγράψουν τις αμείωτες ταλαντώσεις ανεξάρτητα από το μέγεθος των ταλαντευόμενων σωμάτων, και από τη φύση των δυνάμεων που τις συντηρούν. Έτσι αφού μελετήσουμε τις γραμμικές ταλαντώσεις μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα γενικά για τις ταλαντώσεις που η πράξη δείχνει ότι είναι σωστά.



Σχ. 11.1

11.2. Η δύναμη στην απλή αρμονική ταλάντωση

Μια γραμμική ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{x = x_0 ημωt} \qquad (11.1)$$

ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση.**

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί μια τέτοια κίνηση δεν είναι σταθερές αλλά μεταβάλλονται περιοδικά σε συνάρτηση με το χρόνο και αποδεικνύεται ότι δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\omega t \ \text{ ή } \ \upsilon = x_0 \omega \sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (11.2)$$

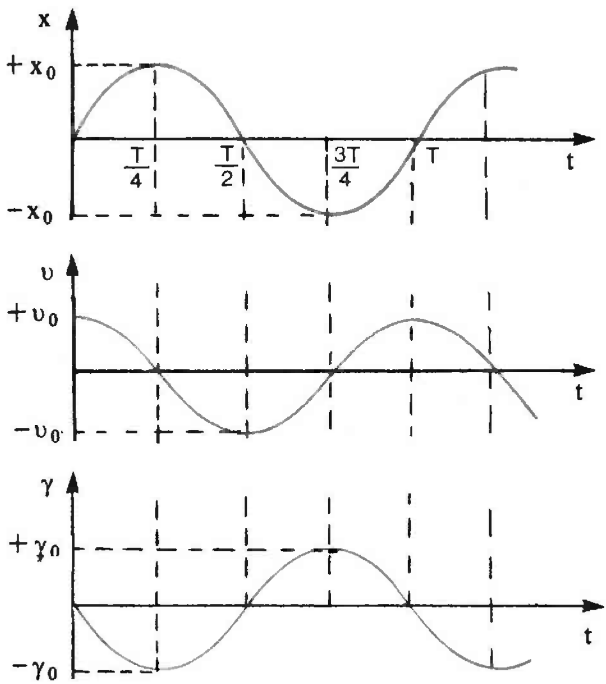
και

$$\boxed{\gamma = -\gamma_0 \eta\mu\omega t \ \text{ ή } \ \gamma = -x_0 \omega^2 \eta\mu\omega t} \qquad (11.3)$$

Στις σχέσεις αυτές x_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης, υ_0 και γ_0 η μέγιστη ταχύτητα και η μέγιστη επιτάχυνση και ω η κυκλική συχνότητα, που συνδέεται με την περίοδο T και τη συχνότητα ν με τις σχέσεις

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (11.4)$$

Οι εξισώσεις (11.1), (11.2) και (11.3) παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 11.2.



Σχ. 11.2

Από τη μελέτη των παραπάνω γραφικών παραστάσεων προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Στη θέση ισορροπίας, $x=0$, είναι $\upsilon=\upsilon_0$ και $\gamma=0$
- Στα σημεία μέγιστης απομάκρυνσης, $x=\mp x_0$, η ταχύτητα μηδενίζεται, $\upsilon=0$, ενώ η επιτάχυνση είναι $\gamma=\pm\gamma_0$
- Η ταχύτητα και η επιτάχυνση προηγούνται της απομάκρυνσης κατά $\frac{\pi}{2}$ και π αντίστοιχα. Έτσι αν $x=x_0\eta\mu\omega t$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\upsilon=\upsilon_0\eta\mu\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{11.5}$$

και

$$\gamma=\gamma_0\eta\mu(\omega t+\pi) \tag{11.6}$$

Θα πρέπει να πούμε ότι οι εξισώσεις (11.1), (11.2) και (11.3), περιγράφουν κάθε απλή αρμονική ταλάντωση για την οποία θεωρούμε ως αρχή των χρόνων τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή για $t=0$ είναι $x=0$. Αν για $t=0$ είναι $x\neq 0$, τότε υπάρχει αρχική φάση φ_0 και οι εξισώσεις που περιγράφουν την απλή αρμονική ταλάντωση γράφονται:

$$x=x_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \tag{11.7}$$

$$\upsilon=\upsilon_0\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \tag{11.8}$$

$$\gamma=-\gamma_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \tag{11.9}$$

Γνωρίζουμε ότι αν σ' ένα σώμα που ηρεμεί, ασκηθούν μια ή περισσότερες σταθερές δυνάμεις, αυτό θα κινηθεί κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης, κάνοντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Γεννιέται όμως το ερώτημα: ποια χαρακτηριστικά έχει η δύναμη ή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση;

Από το νόμο του Newton $F=m.\gamma$ και τις σχέσεις (11.3) και (11.1) προκύπτει ότι

$$\boxed{F=-m\,\omega^2x} \tag{11.10}$$

Αν το σταθερό γινόμενο $m\,\omega^2$ το συμβολίσουμε με D, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\boxed{F=-Dx} \tag{11.11}$$

Από την (11.11) συμπεραίνουμε ότι για να εκτελεί ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση πρέπει η δύναμη ή η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της κίνησής του να είναι ανάλογη με την απομάκρυνσή του. Η δύναμη F που περιγράφει η σχέση (11.11) είναι γνωστή ως **δύναμη επαναφοράς** γιατί ασκείται στο σώμα έτσι ώστε να το επιταχύνει πάντα προς την

κατεύθυνση της θέσης ισορροπίας. Η σταθερά αναλογίας D λέγεται **σταθερά επαναφοράς** και η τιμή της σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που ταλαντεύεται.

Η σταθερά επαναφοράς επηρεάζει την περίοδο του ταλαντευόμενου συστήματος. Πράγματι από τη σχέση $D = m\omega^2$ έχουμε:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}} \tag{11.12}$$

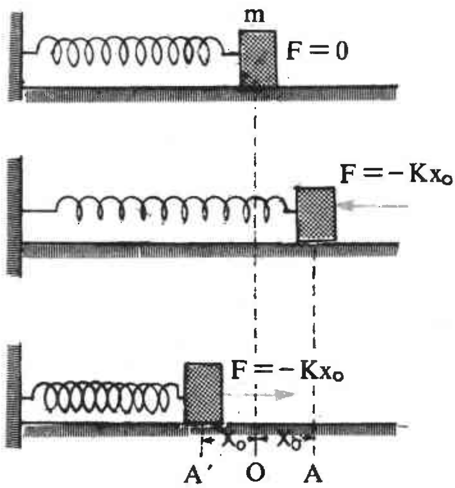
Τέλος το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (11.11) εκφράζει το γεγονός ότι η δύναμη επαναφοράς και η απομάκρυνση έχουν πάντα αντίθετη φορά.

Δυο ταλαντευόμενα συστήματα για τα οποία εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση είναι, το σύστημα ελατήριο-μάζα και το απλό εκκρεμές.

Ας θεωρήσουμε ένα «ιδανικό ελατήριο», δηλαδή ένα ελατήριο που όταν τεντώνεται ή συμπιέζεται κατά x, η δύναμη F που ασκείται απ' αυτό είναι σύμφωνα με το νόμο του Hooke,

$$F = -Kx,$$

όπου K είναι η σταθερά του ελατηρίου.

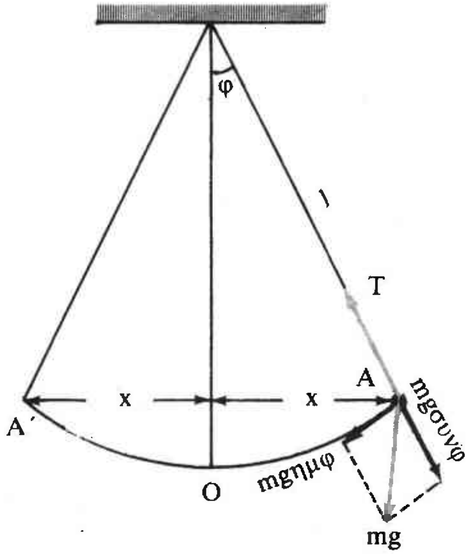


Σχ. 11.3

Το ένα άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σ' ένα ακλόνητο σημείο και στο άλλο προσδένεται ένα σώμα μάζας m, που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, σχ. 11.3. Αν απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας O κατά x_0 και το αφήσουμε ελεύθερο, αυτό θα κινηθεί μόνο με την επίδραση της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο προς τη θέση ισορροπίας O. Επειδή η δύναμη αυτή είναι ανάλογη της απομάκρυνσης, δηλαδή $F = -Dx$, όπου $D = K$, το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η περίοδος θα δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \tag{11.13}$$

Ας μελετήσουμε τώρα την ταλάντωση του σφαιριδίου του απλού εκκρεμούς σχ. 11.4. Το νήμα έχει σταθερό μήκος l και αμελητέο βάρος, ενώ η μάζα του σφαιριδίου είναι m. Αν φέρουμε το σφαιρίδιο από τη θέση ισορροπίας Ο στη θέση Α και το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί, θα εκτελέσει ταλάντωση γύρω από το Ο διαγράφοντας την καμπύλη τροχιά ΑΟΑ΄. Από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο του εκκρεμούς, η τάση του νήματος Τ και η συνιστώσα του βάρους mgσυνφ, δίνουν στο σφαιρίδιο την αναγκαία κεντρομόλο επιτάχυνση για την κίνηση πάνω στο τόξο ΑΟΑ΄. Η εφαπτομενική συνιστώσα του βάρους mgημφ είναι η μόνη δύναμη που τείνει να επαναφέρει το σφαιρίδιο στη θέση ισορροπίας, δηλαδή η δύναμη που συντηρεί την ταλάντωση. Έτσι η δύναμη η υπεύθυνη για την ταλάντωση του σφαιριδίου είναι, $F = -mg\eta\mu\varphi$.



Σχ. 11.4

Αν τώρα η γωνία φ είναι μικρή, έως 3°, τότε η καμπύλη τροχιά ΑΟΑ΄ προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τη χορδή ΑΑ΄ πάνω στην οποία θεωρούμε ότι γίνεται η κίνηση. Αλλά από το σχήμα 11.4 έχουμε ότι $\boxed{\eta\mu\varphi = \frac{x}{l}}$ και έτσι η δύναμη F που συντηρεί την ταλάντωση του σφαιριδίου παίρνει τελικά τη μορφή

$$F = -\frac{mg}{l}x$$

δηλαδή είναι ανάλογη της απομάκρυνσης. Άρα το σφαιρίδιο θα εκτελεί απλή αρμονική και η περίοδος θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (11.14)$$

Στη μέχρι τώρα μελέτη μας δεχτήκαμε ότι οι τριβές είναι αμελητέες, το ελατήριο είναι ιδανικό, η γωνία φ μικρή κ.τ.λ. Στην πράξη τέτοιες ταλαντώσεις (αμείωτες) δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθούν αφού λόγω των τριβών το πλάτος συνεχώς φθίνει και τελικά μηδενίζεται. Ένα σύστημα που θα μπορούσε να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση αποτελεί ένα πρότυπο και λέγεται **απλός αρμονικός ταλαντωτής.**

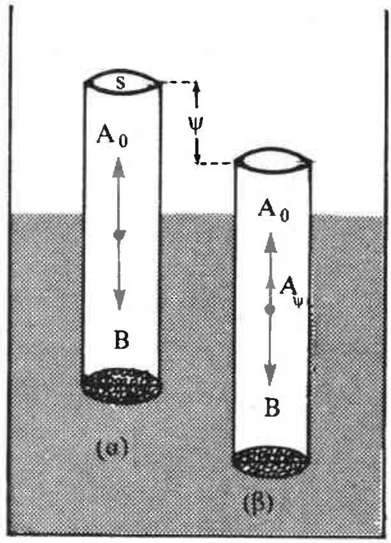
Για παράδειγμα απλός αρμονικός ταλαντωτής είναι το σύστημα ελατήριο-μάζα που περιγράψαμε, τα ταλαντευόμενα άτομα κ.τ.λ.

Παράδειγμα

Ένας μεταλλικός κύλινδρος επιπλέει με τον άξονά του κατακόρυφο μέσα σε υγρό πυκνότητας d. (Το έρμα στον πυθμένα δεν επιτρέπει την ανατροπή του). Αν πιέσουμε τον κύλινδρο κατακόρυφα, ώστε να βυθιστεί κατά ψ και κατόπιν τον αφήσουμε ελεύθερο, να δείξετε ότι θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο T. Δίνεται η μάζα m του κυλίνδρου, το εμβαδόν S της διατομής του και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Λύση

Πριν βυθίσουμε τον κύλινδρο κατά ψ αυτός ισορροπούσε υπό την επίδραση του βάρους του B και της άνωσης A_0.
Δηλαδή $B = A_0$ (1)



Όταν ο κύλινδρος βυθιστεί κατά ψ και αφεθεί ελεύθερος, θα κινηθεί προς τα πάνω με την επίδραση της συνισταμένης δύναμης

$$F = A - B \quad (2)$$

όπου $A = A_0 + A_ψ$ και $A_ψ = dgSψ$ (3)

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι η δύναμη που τείνει να επαναφέρει τον κύλινδρο στη θέση ισορροπίας του είναι

$F = A_ψ$ ή $F = dgSψ$

Επειδή η δύναμη F έχει αντίθετη φορά προς την ψ, η τελευταία σχέση γράφεται

$$F = -Dψ \quad \text{όπου} \quad D = dgS,$$

Άρα ο κύλινδρος θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο

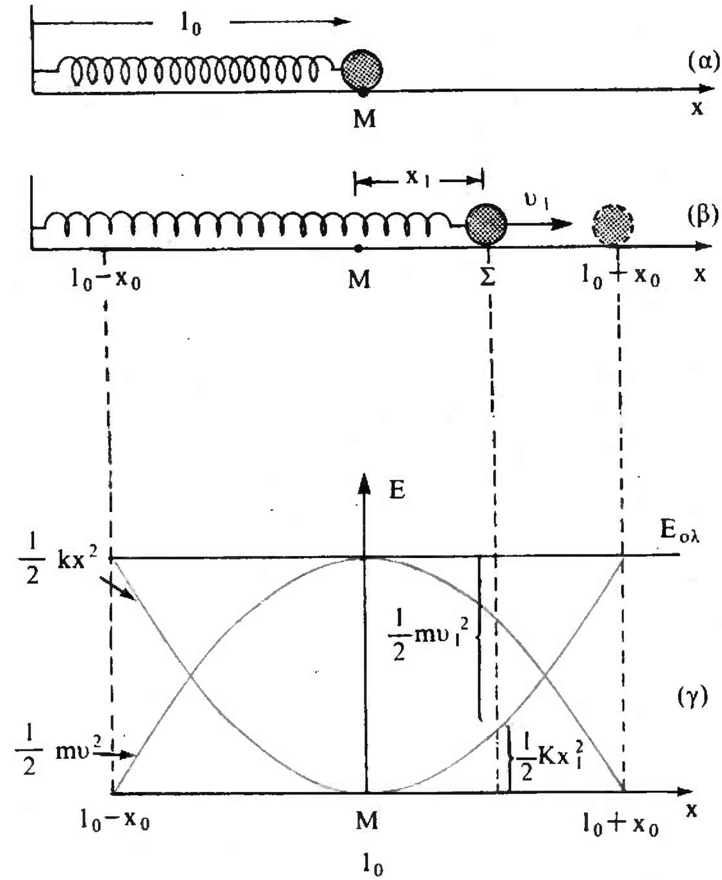
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{dgS}}$$

1985

11.3. Η ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση

Η ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση καθώς και οι μεταβολές της είναι το αντικείμενο αυτής της παραγράφου. Για να αποφύγουμε προβλήματα που είναι δυνατόν να προκύψουν κατά την εξέταση πολύπλοκων ταλαντευόμενων συστημάτων, θα εξετάσουμε το απλούστερο, που όπως είπαμε είναι το πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Ας θεωρήσουμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή του σχήματος 11.5α, όπου K η σταθερά του ελατηρίου και m η μάζα του σώματος. Στη θέση ισορροπίας Μ το



Σχ. 11.5 (α) Το σώμα ηρεμεί στη θέση ισορροπίας Μ

(β) Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και έχει απομάκρυνση x_1 και ταχύτητα υ_1.

(γ) Για απομάκρυνση x_1 η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\frac{1}{2}Kx_1^2$ και η κινητική του σώματος $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$.

Η ολική ενέργεια είναι $E_{ολ} = \frac{1}{2}Kx_0^2$.

σώμα είναι ακίνητο, ενώ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος l_0.

Ασκώντας στο σώμα δύναμη με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα x το φέρνουμε στη θέση $l_0 + x_0$. Επειδή η μάζα m είναι πρακτικά ασυμπίεστη, όλη

η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης, αποθηκεύεται στο ελατήριο με τη μορφή δυναμικής ενέργειας, δηλαδή

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} K x_0^2 \qquad (11.15)$$

Αν τώρα αφήσουμε το σώμα ελεύθερο αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους x_0 και αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας Μ, η απομάκρυνση και η ταχύτητά του θα δίνονται από τις γνωστές σχέσεις

$$x = x_0 ημωt \qquad (α)$$

και

$$υ = x_0 ωσυνωt \qquad (β)$$

Αφού δεν υπάρχουν τριβές η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή. Έτσι αν λάβουμε υπόψη μας, ότι η πρακτικά ασυμπίεστη μάζα έχει μόνον κινητική ενέργεια και το αμελητέας μάζας ελατήριο μόνο δυναμική, μπορούμε να γράψουμε για οποιαδήποτε χρονική στιγμή:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m υ^2 \qquad (11.16)$$

Η εξίσωση (11.16) σε συνδυασμό με τις (α) και (β) γράφεται

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} K x_0^2 ημ^2 ωt + \frac{1}{2} m x_0^2 ω^2 συν^2 ωt$$

Στην παραπάνω εξίσωση η ποσότητα $mω^2$ είναι ίση με τη σταθερά επαναφοράς D, που για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου K. Δηλαδή

$$K = D = mω^2$$

Έτσι, αν λάβουμε υπόψη και την τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2θ + συν^2θ = 1$ βρίσκουμε τελικά

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} m x_0^2 ω^2 \quad \text{και επειδή} \quad x_0 ω = υ_0$$

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} m υ_0^2 \qquad (11.17)$$

Από τις εξισώσεις (11.15) και (11.17) μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2} m υ_0^2 = \frac{1}{2} K x_0^2} \qquad (11.18)$$

ή

$$E_{ολ} = E_{κ(max)} = E_{Δ(max)}$$

Από τις σχέσεις (11.18) προκύπτει το συμπέρασμα, ότι η μέγιστη ταχύτητα υ_0 και το πλάτος της ταλάντωσης x_0 καθορίζονται από την ολική ενέργεια του συστήματος δηλαδή από την ενέργεια που του δώσαμε αρχικά για να το διεγείρουμε. Έτσι ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση αποκλείεται να βρεθεί έξω από τα όρια l_0+x_0, l_0-x_0 που καθορίζονται από την ολική ενέργεια του συστήματος. Το συμπέρασμα αυτό όπως και η μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντίστροφα φαίνεται στο σχήμα 11.5γ, όπου έχουν σχεδιαστεί η ολική ενέργεια, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια.

Από τη μελέτη του σχήματος καταλήγουμε σ' ένα δεύτερο συμπέρασμα, ότι δηλαδή η κινητική ενέργεια μπορεί να πάρει **οποιαδήποτε τιμή** ανάμεσα στο μηδέν και στο $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$.

Η δυναμική και η κινητική ενέργεια για κάθε χρονική στιγμή μπορεί να εκφραστούν ως συνάρτηση της ολικής ενέργειας του συστήματος. Πράγματι

$$E_\Delta = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2\eta\mu^2\omega t$$

και

$$E_K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t \ ,$$

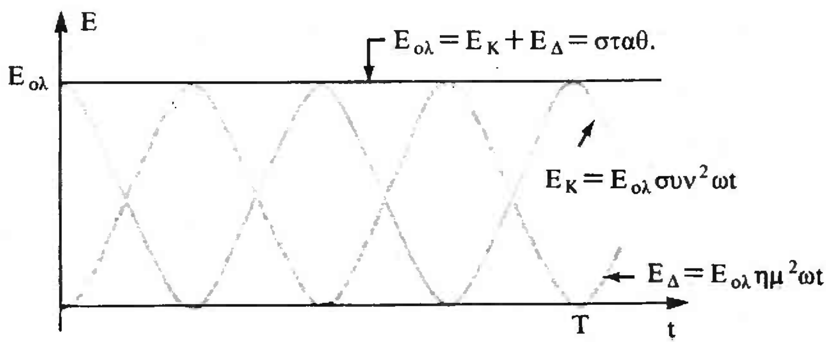
που με τη βοήθεια των (11.18) γράφονται:

$$E_\Delta = E_{o\lambda}\ \eta\mu^2\omega t \qquad (11.19)$$

και

$$E_K = E_{o\lambda}\ \sigma\upsilon\nu^2\omega t \qquad (11.20)$$

Η γραφική παράσταση των εξισώσεων (11.19) και (11.20) εικονίζεται στο σχήμα 11.6, όπου φαίνεται ότι για κάθε χρονική στιγμή το άθροισμα της



Σχ. 11.6. Γραφική παράσταση της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με το χρόνο στον απλό αρμονικό ταλαντωτή.

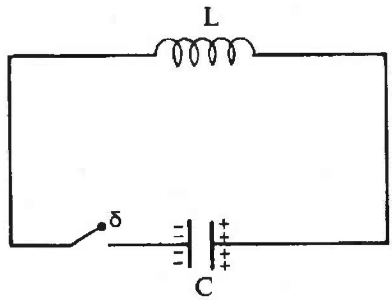
δυναμικής και της κινητικής ενέργειας είναι σταθερό και ίσο με την ολική ενέργεια του συστήματος.

Στο μηχανικό σύστημα που μελετήσαμε έχουμε περιοδική μετατροπή της δυναμικής ενέργειας σε κινητική και αντίστροφα. Αυτή η περιοδική μετατροπή της ενέργειας από μια μορφή σε άλλη είναι ένα γενικότερο χαρακτηριστικό που ισχύει για κάθε ταλαντευόμενο σύστημα όπως θα δούμε στη συνέχεια.

1993 Κύκλωμα LC

Ας θεωρήσουμε το σύστημα πυκνωτής-πηνίο, σχ. 11.7, και ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το φορτίο του πυκνωτή είναι Q_0, ενώ το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι μηδέν (ο διακόπτης δ είναι ανοικτός). Αυτή τη χρονική στιγμή η αποθηκευμένη στον πυκνωτή ηλεκτρική ενέργεια είναι

$$E_{ηλ} = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2 \qquad (11.21)$$



Σχ. 11.7

ενώ η ενέργεια στο πηνίο είναι μηδέν. Μόλις κλείσουμε το διακόπτη ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσα από το πηνίο, με αποτέλεσμα την κυκλοφορία ρεύματος στο κύκλωμα. Όσο χρόνο διαρκεί η εκφόρτιση του πυκνωτή η αποθηκευμένη σ' αυτόν ηλεκτρική ενέργεια ελαττώνεται και μετατρέπεται σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο πηνίο λόγω του αναπτυσσόμενου ρεύματος. Όταν τελικά ο πυκνωτής εκφορτιστεί, το ρεύμα που διέρχεται από το πηνίο είναι I_0 και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι

$$E_{μαγ} = \frac{1}{2}LI_0^2 \qquad (11.22)$$

Στην ιδανική περίπτωση που θεωρούμε αμελητέα την ωμική αντίσταση του κυκλώματος θα ισχύει:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2 \qquad (11.23)$$

Στη συνέχεια όλη η ενέργεια μεταφέρεται από το πηνίο πάλι στον πυκνωτή με αποτέλεσμα τη φόρτισή του με το ίδιο φορτίο Q_0, μόνο που τώρα η φόρτιση είναι αντίθετη. Ο πυκνωτής θ' αρχίσει να εκφορτίζεται πάλι και το φαινόμενο της περιοδικής μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα θα επαναλαμβάνεται. Ένα τέτοιο ταλαντευόμενο σύστημα LC, λέμε ότι εκτελεί ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις, οι οποίες

είναι σε πλήρη αναλογία με τις μηχανικές ταλαντώσεις που εκτελεί το σύστημα μάζα-ελατήριο.

Πράγματι αποδεικνύεται ότι το φορτίο στον πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$Q = Q_0 \, συνωt \quad και \quad I = I_0 \, ημωt$$

Έτσι κάθε χρονική στιγμή η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι

$$E_{ηλ} = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_0^2 \, συν^2ωt$$

και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι

$$E_{μαγ} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \, ημ^2ωt$$

Οι παραπάνω δυο σχέσεις με τη βοήθεια της (11.23) παίρνουν τελικά τη μορφή:

$$E_{ηλ} = E_{ολ} \, συν^2ωt$$

και

$$E_{μαγ} = E_{ολ} \, ημ^2ωt \qquad (11.24)$$

Από τις εξισώσεις (11.24) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ενέργεια στον πυκνωτή και στο πηνίο μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ της τιμής μηδέν και μιας μέγιστης τιμής, ενώ σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας και με την προϋπόθεση ότι το κύκλωμα δεν έχει ωμική αντίσταση, το άθροισμα των δύο ενεργειών μένει πάντα σταθερό. Καταλήγουμε δηλαδή σε συμπέρασμα ανάλογο με αυτό που ισχύει για το σύστημα ελατήριο-μάζα. Αν τώρα λάβουμε υπόψη μας ότι η ενέργεια μπορεί να αποθηκεύεται μόνο στον πυκνωτή και στο ελατήριο, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή στη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αντιστοιχίσουμε την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου στην κινητική ενέργεια του σώματος, αφού και οι δύο αυτές μορφές ενέργειας σχετίζονται με κίνηση, της μάζας στο σύστημα ελατήριο-μάζα και του φορτίου στο σύστημα πυκνωτής-πηνίο. Η αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών που περιγράφουν τα συστήματα ελατήριο-μάζα και πηνίο-πυκνωτής φαίνεται στον πίνακα της επόμενης σελίδας.

Από τον πίνακα προκύπτει ότι στη σταθερά του ελατηρίου K, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το αντίστροφο της χωρητικότητας του πυκνωτή και στη μάζα m το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. Έτσι αν στη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$,που δίνει την περίοδο του συστήματος ελατήριο-μάζα, αντιστοιχίσουμε όπου K το $\frac{1}{C}$ και όπου m το L, βρίσκουμε για την περίοδο των ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων.

μάζα-ελατήριο	πηνίο-πυκνωτής
$x = x_0 ημωt$*	$Q = Q συνωt$
$υ = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
$υ = υ_0 συνωt$*	$I = I_0 ημωt$
$E_Δ = \frac{1}{2} Kx^2$	$E_{ηλ} = \frac{1}{2}\frac{1}{C} Q^2$
$E_K = \frac{1}{2} mυ^2$	$E_{μαγ} = \frac{1}{2} LI^2$

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

Δηλαδή όπως στις μηχανικές ταλαντώσεις του συστήματος ελατήριο-μάζα, η περίοδος εξαρτάται αποκλειστικά από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος m και K, έτσι και στις ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις του συστήματος πυκνωτής-πηνίο, η περίοδος εξαρτάται μόνο από τα φυσικά του χαρακτηριστικά L και C.

Στο σχήμα 11.8 έχουν σχεδιαστεί διαδοχικά στιγμιότυπα των ταλαντώσεων πού εκτελούν τα συστήματα ελατήριο-μάζα, πηνίο-πυκνωτής και οι μετατροπές των μορφών ενέργειας που περικλείονται σ' αυτά.

Παράδειγμα

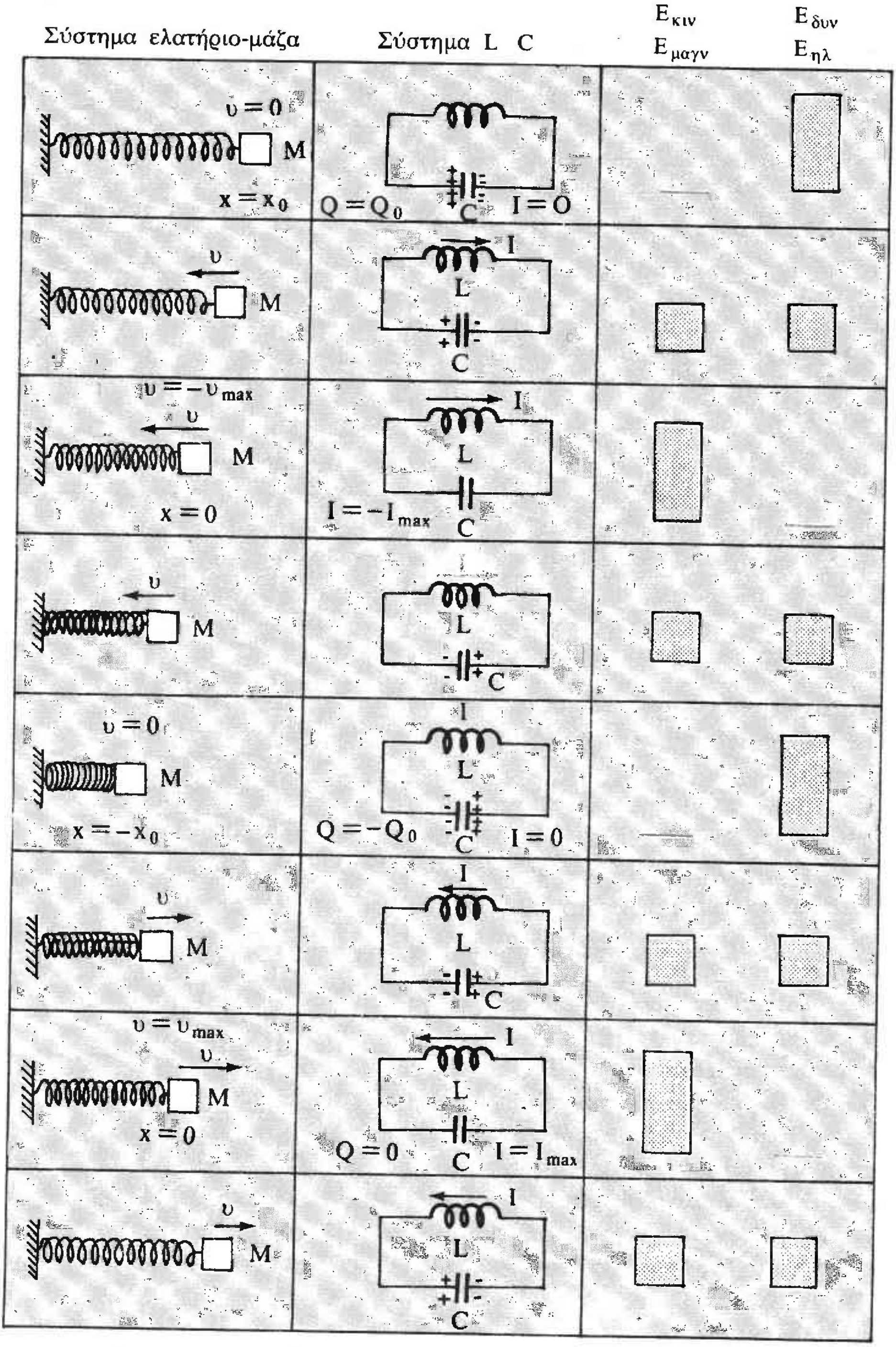
Ένα σώμα μάζας m = 20 gr εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δυο θέσεων που απέχουν 10cm και τη χρονική στιγμή μηδέν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας. Αν η ολική ενέργεια του σώματος είναι $E_{ολ} = 6{,}2 \; 10^{-5}$ Joule να βρεθεί:

α) Η σταθερά επαναφοράς D

β) Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης

γ) Η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t = 0,5 sec.

* Οι εξισώσεις $x = x_0 ημωt$ και $υ = υ_0 συνωt$ μπορούν να γραφούν αντίστοιχα $x = x_0 συνωt$ και $υ = υ_0 ημωt$ αν θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή μηδέν είναι $x = x_0$ και $υ = 0$.


Σύστημα ελατήριο-μάζα
Σύστημα L C
$E_{κιν}$
$E_{μαγν}$
$E_{δυν}$
$E_{ηλ}$
υ = 0
M
x = x₀
Q = Q₀
C
I = 0
υ
L
υ = −υ_max
x = 0
I = −I_max
υ = 0
x = −x₀
Q = −Q₀
I = 0
I
υ = υ_max
Q = 0
I = I_max

Σχ. 11.8

Λύση

α) Η ολική ενέργεια του σώματος είναι ίση με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια, δηλαδή:

$$E_{ολ} = E_{Δ(max)} \Rightarrow E_{ολ} = \frac{1}{2} D x_0^2, \text{ όπου } x_0 = \frac{10}{2} \text{ cm} = 0{,}05 \text{m}$$

Έτσι $D = \frac{2E_{ολ}}{x_0^2}$ και με αντικατάσταση

$$D \simeq 0{,}05 \text{ N/m}$$

β) Είναι $D = m\,\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ και με αντικατάσταση

$$\omega \simeq 1{,}58 \text{ rad/sec}$$

γ) Η εξίσωση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος είναι

$$x = x_0 ημωt$$

και με αντικατάσταση $x \simeq 3{,}55$ cm

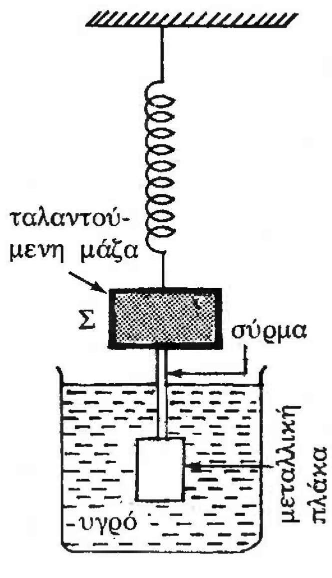
1992

11.4. Φθίνουσα ταλάντωση

Κατά τη μελέτη του απλού αρμονικού ταλαντωτή υποθέσαμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό. Στην πραγματικότητα κανένα σύστημα που ταλαντώνεται ελεύθερα, αφού δεχθεί μια αρχική διέγερση, δε διατηρεί σταθερό πλάτος ταλάντωσης, γιατί η ενέργειά του λόγω των τριβών συνέχεια μειώνεται, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να ελαττώνεται και τελικά να μηδενίζεται. Ταλαντώσεις αυτού του είδους λέγονται **φθίνουσες ταλαντώσεις.**

Οι δυνάμεις που προκαλούν τη μείωση του πλάτους μιας ταλάντωσης δεν μπορούν να προσδιοριστούν πάντοτε εύκολα. Π.χ. η αντίσταση του αέρα είναι δύσκολο να προσδιοριστεί, γιατί εξαρτάται από το σχήμα, την υφή του σώματος και την ταχύτητά του.

Πειραματικά μπορούμε να μελετήσουμε τη φθίνουσα ταλάντωση με τη διάταξη



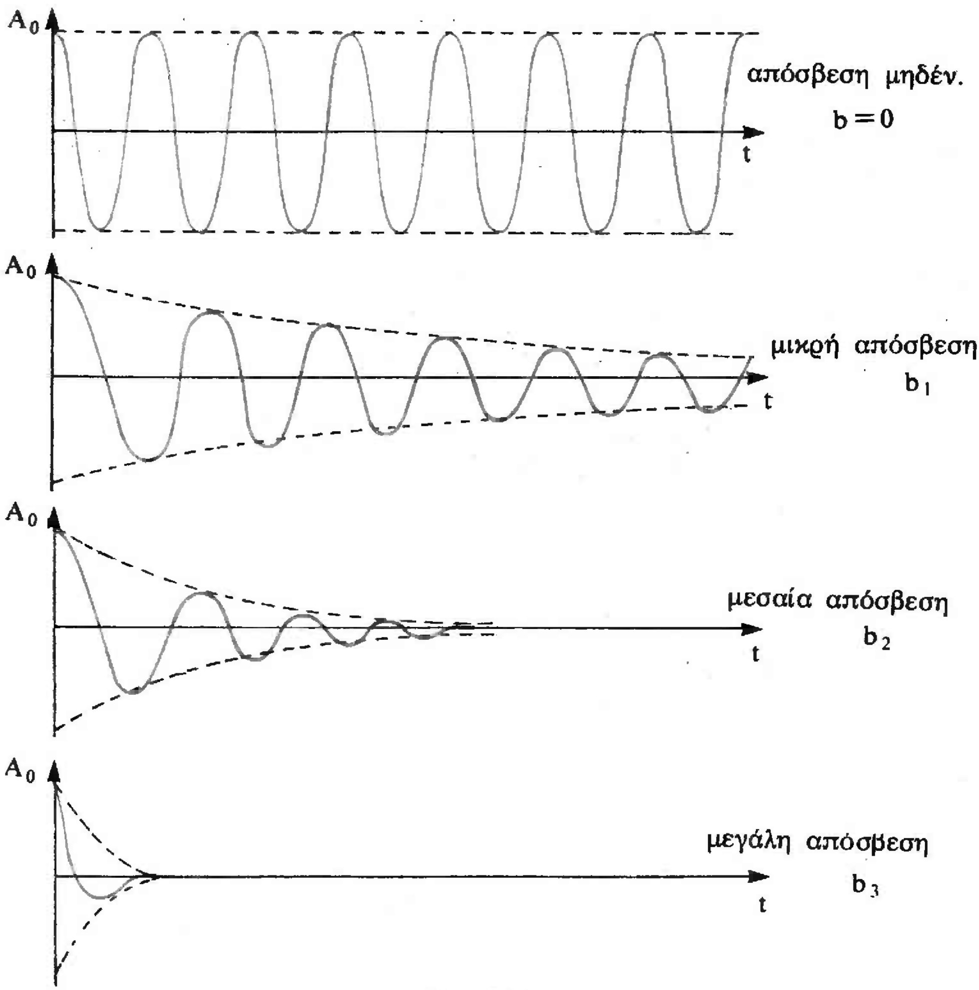
Σχ. 11.9. Διάταξη για την παραγωγή φθίνουσας ταλάντωσης.

του σχήματος 11.9. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου εξαρτάται σώμα Σ μάζας m, από το οποίο προσδένεται με λεπτό άκαμπτο σύρμα μια μεταλλική πλάκα αμελητέου όγκου, που είναι βυθισμένη σ' ένα υγρό.

Αν τραβήξουμε το σώμα Σ ελαφρά προς τα κάτω και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο, τότε αυτό θα εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση. Έχει βρεθεί πειραματικά ότι στην περίπτωση αυτή η δύναμη $\vec{F}$ που μεταβάλλει την ταλάντωση σε φθίνουσα είναι ανάλογη της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$, δηλαδή ισχύει

$$F = -b\upsilon \qquad (11.25)$$

Ο συντελεστής b λέγεται **σταθερά απόσβεσης** και εξαρτάται από τη φύση του υγρού και το κινούμενο σώμα.



Σχ. 11.10

Στο σχήμα 11.10 φαίνονται ταλαντώσεις με διαφορετική σταθερά απόσβεσης b.

Από τη μελέτη των παραπάνω καμπύλων προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

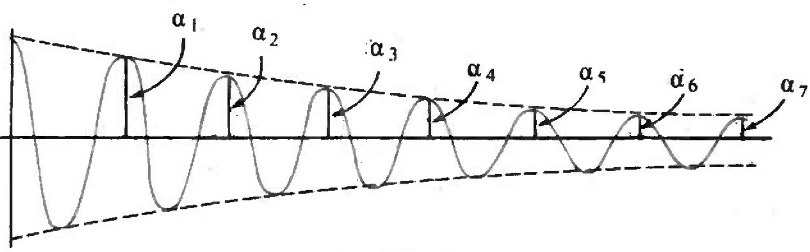
1. Το πλάτος είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου.
2. Η περίοδος για κάθε φθίνουσα ταλάντωση είναι σταθερή, και αυξάνει όταν αυξάνει το b.
3. Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος αυξάνει με τη σταθερά απόσβεσης.
4. Για μεγάλες τιμές της σταθεράς απόσβεσης η κίνηση γίνεται απεριοδική.

Ο ρυθμός με τον οποίο φθίνουν οι ταλαντώσεις παρουσιάζει μεγάλο τεχνικό ενδιαφέρον. Σε συστήματα όμως εκκρεμή, μηχανικά ρολόγια, κ.τ.λ. επιδιώκουμε να είναι ο μικρότερος δυνατός, ενώ στα συστήματα απόσβεσης κραδασμών π.χ. σύστημα ανάρτησης αυτοκινήτων, ο μέγιστος δυνατός.

Στις μεγάλες τεχνικές κατασκευές, όπως ψηλά κτίρια ή κρεμαστές γέφυρες, η απόσβεση οφείλεται στις τριβές που αναπτύσσονται ανάμεσα στα διάφορα τμήματά τους καθώς και στον τρόπο κατασκευής τους. Για να προστατευθούν οι κατασκευές αυτές από τις σεισμικές δονήσεις και τις ταλαντώσεις που προκαλούν οι ισχυροί άνεμοι, επιδιώκεται ώστε η απόσβεση να είναι μέγιστη.

Μείωση του πλάτους

Ας θεωρήσουμε τη φθίνουσα ταλάντωση του σχήματος 11.11 στην οποία έχουν σημειωθεί τα πλάτη α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, τα οποία αντιστοιχούν ένα σε κάθε περίοδο.



Σχ. 11.11

Για τα πλάτη αυτά ισχύει:

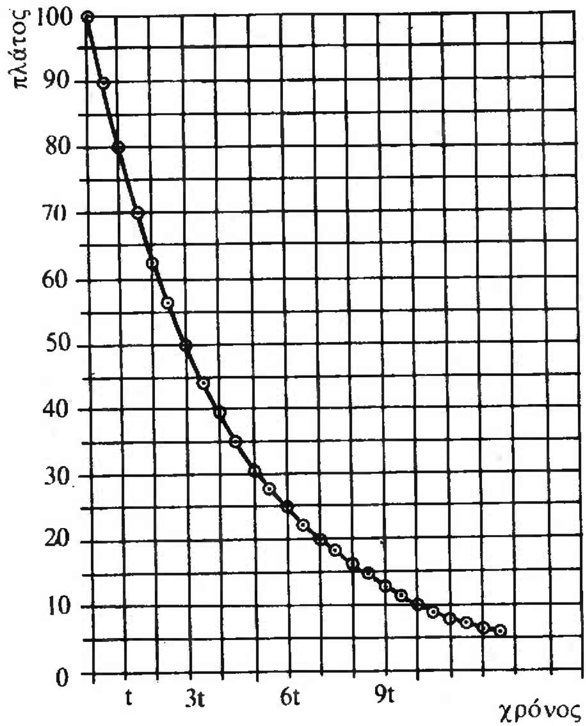
$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \cdots = \text{σταθ.}$$

Από τη σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t = nT$, όπου $n = 1,2,3...$, είναι:

$$\alpha_t = \alpha_0 e^{-\Lambda t} \tag{11.26}$$

Στην παραπάνω εξίσωση το Λ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b.

Αν αποδώσουμε γραφικά το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης που κάνει το σώμα Σ, σχ. 11.9, σε συνάρτηση με το χρόνο, θα πάρουμε μια καμπύλη της οποίας η μορφή είναι αυτή του σχήματος 11.12.



Σχ. **11.12**

Από την καμπύλη προκύπτει ότι για να μειωθεί το πλάτος από την τιμή 100 στην τιμή 50 απαιτείται χρόνος 3t. Όμοια από την τιμή π.χ. 40 στην τιμή 20 απαιτείται χρόνος πάλι 3t. Γενικά, ο χρόνος που χρειάζεται για να μειωθεί το πλάτος κατά 50% είναι ορισμένος για κάθε φθίνουσα ταλάντωση στην οποία ισχύει η εκθετική μείωση. Για την καμπύλη του σχήματος 11.12 ο χρόνος αυτός όπως φαίνεται είναι 3t.

1984

11.5. Εκθετική μείωση μεγεθών

Η εκθετική μείωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης, την οποία μελετήσαμε, είναι μια μόνο περίπτωση μεγέθους το οποίο μειώνεται εκθετικά. Στη φύση η εκθετική μείωση μεγεθών είναι συνηθισμένο φαινόμενο και

για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε ευρύτερα με αυτό.

Ας θυμηθούμε την εκφόρτιση του πυκνωτή μέσω μιας αντίστασης R. Το φορτίο σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται όπως γνωρίζουμε από τη σχέση

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Αν συγκρίνουμε τη σχέση αυτή με την (11.26), παρατηρούμε ότι είναι εντελώς ανάλογες. Η αναλογία έγκειται στο γεγονός ότι και οι δύο περιγράφουν μεγέθη που ελαττώνονται εκθετικά με το χρόνο*.

Εκτός από τις δύο περιπτώσεις εκθετικής μείωσης ενός μεγέθους με το χρόνο, που μελετήσαμε, μπορούμε να αναφερθούμε και στις **διασπάσεις των ραδιενεργών πυρήνων**. Η μελέτη θα γίνει με όμοιο τρόπο γιατί η διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων ακολουθεί νόμο εκθετικής μείωσης.

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ διαθέτουμε έναν αριθμό N_0 ραδιενεργών πυρήνων, με την πάροδο του χρόνου οι πυρήνες θα διασπώνται και ο αριθμός τους θα ελαττώνεται βαθμιαία.

Έτσι τη χρονική στιγμή t ο αριθμός N των ραδιενεργών πυρήνων που θα παραμένουν αδιάσπαστοι θα δίνεται από σχέση της μορφής

$$N = N_0 e^{-\Lambda t}$$

Η σταθερά Λ λέγεται **σταθερά διάσπασης** και εξαρτάται από το είδος των πυρήνων που διασπώνται.

Για τις περιπτώσεις που μελετήσαμε, όπου ένα μέγεθος (πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης, φορτίο εκφορτιζόμενου πυκνωτή, αριθμός πυρήνων που δεν διασπάστηκαν ακόμα), μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, ορίζεται ένα μέγεθος που λέγεται **χρόνος ημίσειας ζωής.** Ονομάζεται χρόνος ημίσειας ζωής μιας ποσότητας η οποία μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ελαττωθεί η ποσότητα αυτή στο μισό.

Αν στην εξίσωση (11.26) θέσουμε $\alpha_t = \frac{\alpha_0}{2}$ παίρνουμε $2 = e^{\Lambda t}$, από την οποία λογαριθμίζοντας βρίσκουμε

$$\ln 2 = \Lambda t \quad \text{ή} \quad t = \frac{\ln 2}{\Lambda} = \frac{0{,}693}{\Lambda}$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζεται ο χρόνος ημίσειας ζωής εφόσον η σταθερά Λ είναι γνωστή. Σε μερικές περιπτώσεις η γνώση του χρόνου ημίσειας ζωής είναι βασικής σημασίας, όπως π.χ. στην περίπτωση των ραδιενεργών υλικών.

---

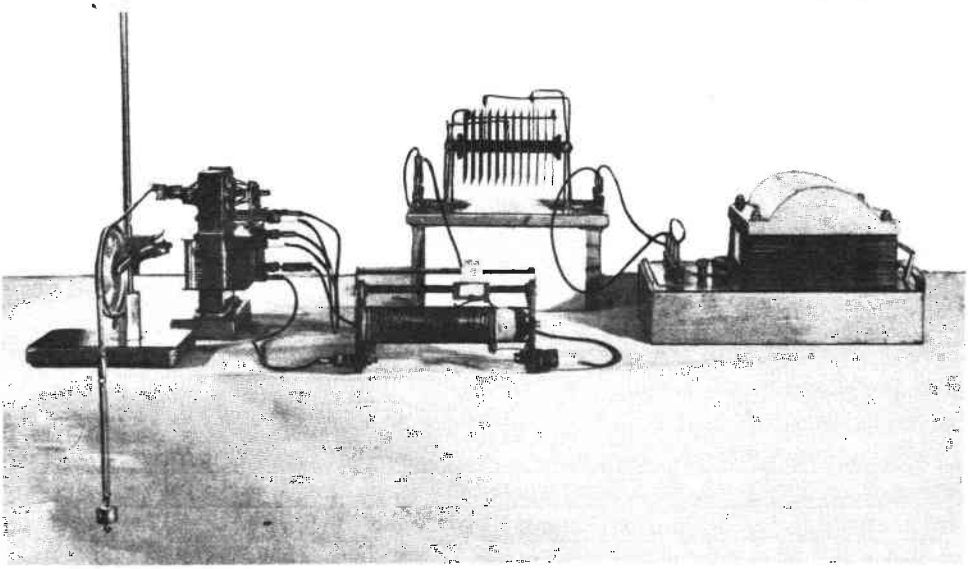
* Στην πρώτη εξίσωση ο χρόνος παίρνει τιμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου, ενώ στη δεύτερη μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Αν όμως σ' αυτή θέσουμε $t = n\tau$ όπου τ η σταθερά χρόνου, μεταξύ των δυο εξισώσεων υπάρχει πλήρης αναλογία.

11.6. Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στη διάρκεια της περιόδου μιας φθίνουσας ταλάντωσης ένα μέρος της ολικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Κατά συνέπεια η αρχική ολική ενέργεια γίνεται θερμότητα με ρυθμό που καθορίζουν οι δυνάμεις απόσβεσης. Αν θέλουμε να διατηρηθεί η αρχική ενέργεια (που εκφράζεται με το πλάτος της ταλάντωσης) σταθερή, πρέπει να προσφέρεται στο σύστημα συνεχώς ενέργεια με ρυθμό ίσο εκείνου με τον οποίο η ενέργεια του συστήματος γίνεται θερμότητα. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα που ταλαντώνεται πρέπει να διεγείρεται περιοδικά. Ταλαντώσεις που διατηρούν το πλάτος τους σταθερό με την επίδραση εξωτερικών περιοδικών δυνάμεων λέγονται **εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.**

Εμπειρία του τρόπου με τον οποίο διατηρείται αμείωτο το πλάτος μιας ταλάντωσης, έχουμε στην κούνια, όπου κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα πρέπει να δίνουμε νέα ώθηση.

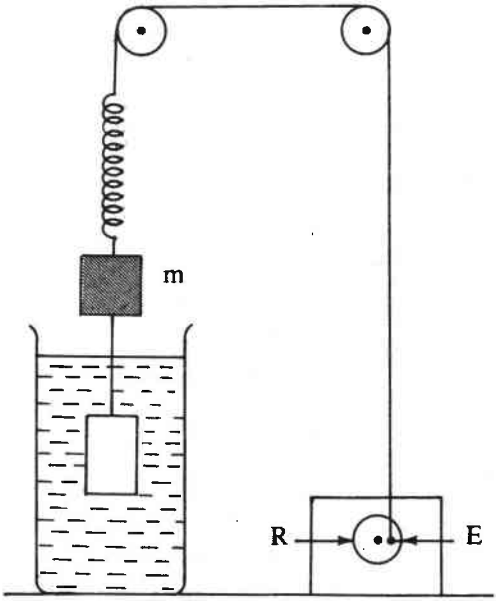
Την εξαναγκασμένη ταλάντωση στο σύστημα ελατήριο-μάζα που διεγείρεται από κινητήρα, μπορούμε να την παρατηρήσουμε με τη διάταξη του σχήματος 11.13.



Σχ. 11.13. Εξαναγκασμένη ταλάντωση με μέσα του σχολικού εργαστηρίου.

Λόγω της περιστροφής του κινητήρα στο σύστημα ασκείται περιοδική δύναμη και το αναγκάζει να εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση. Στην κίνηση του συστήματος αντιστέκονται οι διάφορες δυνάμεις τριβής που, όπως έχουμε αναφέρει, δεν μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Για το λόγο αυτό η μελέτη του φαινομένου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της διάταξης του

σχήματος 11.14, όπου η κύρια αιτία απόσβεσης είναι η αντίσταση που προβάλλει το υγρό στην κίνηση της μεταλλικής πλάκας και η οποία δίνεται από τη σχέση $F = -b\upsilon$.



Σχ. 11.14. Στο σημείο Ε του περιστρεφόμενου τροχού R προσδένεται το νήμα στο άλλο άκρο του οποίου εξαρτάται το ελατήριο, που φέρει τη μάζα και τη μεταλλική πλάκα.

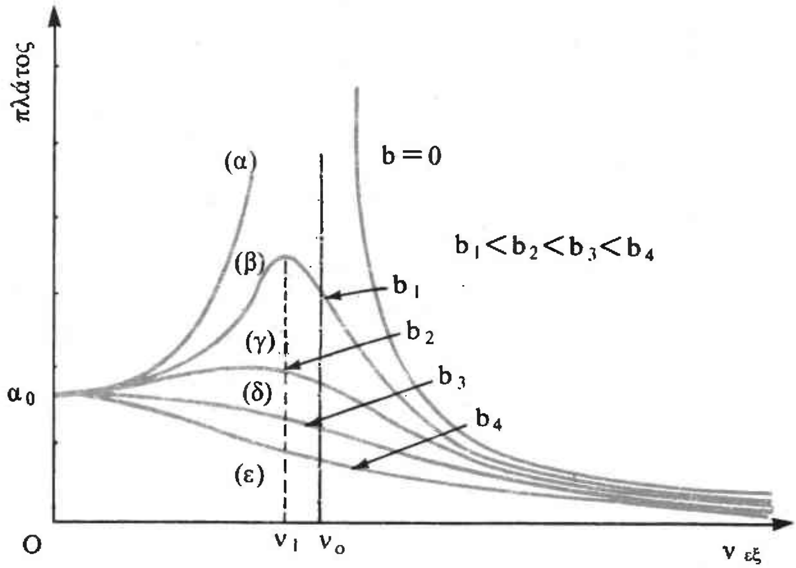
Με την επίδραση της εξωτερικής περιοδικής δύναμης το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση με εκείνη της εξωτερικής δύναμης, δηλαδή $\nu_{\varepsilon\xi}$.

Το πείραμα δείχνει ότι αυξάνοντας τη συχνότητα περιστροφής $\nu_{\varepsilon\xi}$ του τροχού μεταβάλλεται το πλάτος της ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, υπάρχει μια περιοχή τιμών της $\nu_{\varepsilon\xi}$ για την οποία η ταλάντωση έχει μεγάλο πλάτος, ενώ για συχνότητες έξω από την περιοχή αυτή το πλάτος είναι μικρό.

Αν αφαιρέσουμε το δοχείο με το υγρό και θέσουμε σε περιστροφή τον τροχό με συνεχώς αυξανόμενη συχνότητα, θα παρατηρήσουμε ότι για μια μικρή περιοχή συχνοτήτων το πλάτος γίνεται πολύ μεγάλο, ενώ για τιμές της $\nu_{\varepsilon\xi}$ έξω από την περιοχή αυτή το πλάτος γίνεται μικρό.

Αν παραστήσουμε γραφικά το πλάτος της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα $\nu_{\varepsilon\xi}$ για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b, θα πάρουμε τις καμπύλες του σχήματος 11.15.

Από τη μελέτη των καμπύλων του σχήματος συμπεραίνουμε ότι για μικρές τιμές της σταθεράς απόσβεσης, π.χ. b_1, το πλάτος γίνεται διπλάσιο εκείνου που αντιστοιχεί σε $\nu_{\varepsilon\xi}=0$, όταν η συχνότητα $\nu_{\varepsilon\xi}$ παίρνει τιμές σε μια πολύ στενή περιοχή τιμών γύρω από τη ν_1.



Σχ. 11.15

Αν η σταθερά απόσβεσης είναι μηδέν (b = 0, η περίπτωση είναι ιδανική και στην πράξη αδύνατη), το πλάτος τείνει να γίνει άπειρο (καμπύλη (α)), εφόσον η συχνότητα $\nu_{\varepsilon\xi}$ πάρει τιμές πλησίον της ν_0. Βρέθηκε ότι η συχνότητα ν_0 για την οποία το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται θεωρητικά άπειρο συμπίπτει περίπου με την **ιδιοσυχνότητα** του συστήματος. Δηλαδή με τη συχνότητα με την οποία το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις χωρίς συνεχή εξωτερική διέγερση και με μηδενική απόσβεση. Η συχνότητα αυτή εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος και για την περίπτωση του συστήματος ελατήριο-μάζα δίνεται από τον τύπο

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (11.27)$$

Η συχνότητα ν_1 γύρω από την οποία παρουσιάζεται η μεγιστοποίηση του

πλάτους είναι πολύ κοντά στη ν_0. Για λόγους απλότητας και χωρίς να γίνεται σημαντικό σφάλμα δεχόμαστε ότι η μεγιστοποίηση του πλάτους γίνεται όταν η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης τείνει να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα ν_0. Η κατάσταση που προκύπτει όταν $\nu_{\varepsilon\xi} = \nu_0$ ονομάζεται **συντονισμός**. Στην περίπτωση που η απόσβεση είναι μεγάλη (b_3 και b_4), καμπύλες (δ) και (ε), το φαινόμενο δεν παρατηρείται, ή γίνεται ελάχιστα αντιληπτό (καμπύλη (γ)).

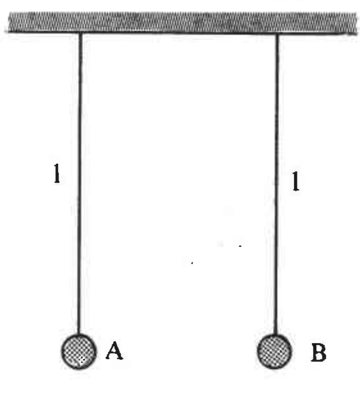
Όπως είδαμε στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το πλάτος διατηρείται σταθερό, επειδή ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα που ταλαντώνεται απορροφάει ενέργεια, είναι ίσος με το ρυθμό που η ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών. Κατά το συντονισμό η μεγιστοποίηση του πλάτους οφείλεται στο ότι η ενέργεια του συστήματος, που καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης, έχει γίνει μέγιστη και συνεπώς η απορρόφηση της ενέργειας που προσφέρεται από την εξωτερική διέγερση γίνεται μέγιστη. Αν λοιπόν δεν έχουμε επαρκείς πληροφορίες για ένα σύστημα που ταλαντώνεται αλλά βρούμε ότι αυτό συντονίζεται μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τη δομή του και τον τρόπο σύνδεσης των ταλαντευόμενων τμημάτων του. Ο συντονισμός είναι σήμερα μια πολύ χρήσιμη μέθοδος έρευνας της δομής και των ιδιοτήτων της ύλης.

11.7. Σύζευξη ταλαντώσεων

Ας θεωρήσουμε ότι δύο εκκρεμή Α και Β που τα μήκη τους είναι ίσα, στερεώνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του ίδιου στηρίγματος, σχ. 11.16.

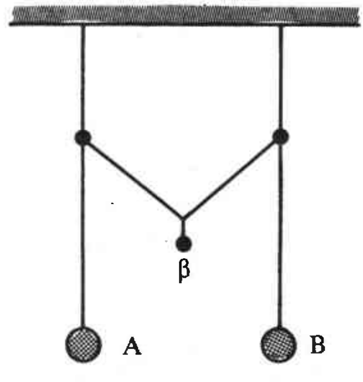
Αν διεγείρουμε ένα από τα δύο εκκρεμή σε ελεύθερη ταλάντωση, τότε το άλλο παραμένει ακίνητο, γεγονός που σημαίνει ότι τα εκκρεμή δεν μπορούν να επηρεάσουν το ένα την κατάσταση του άλλου.

Συνδέουμε τα δύο εκκρεμή με νήμα που στο μέσο του έχει προσδεθεί μικρό βάρος β, σχ. 11.17. Αν θέσουμε σε ελεύθερη ταλάντωση το εκκρεμές Α σε επίπεδο π.χ. κάθετο σ᾽ εκείνο που ορίζουν τα δύο εκκρεμή όταν είναι σε ηρεμία, παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης την οποία εκτελεί συνέχεια μειώνεται.



Σχ. 11.16

ενώ συγχρόνως το δεύτερο εκκρεμές αρχίζει να ταλαντώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης την οποία εκτελεί συνέχεια αυξάνεται. Όταν το πλάτος της ταλάντωσης του Α εκκρεμούς μηδενιστεί τότε του Β γίνεται μέγιστο. Στη συνέχεια το πλάτος του Β αρχίζει να μειώνεται ενώ του Α αρχίζει να αυξάνεται. Όταν το πλάτος του Β γίνει μηδέν τότε του Α γίνεται μέγιστο κ.ο.κ. Το φαινόμενο αυτό που ονομάζεται **σύζευξη** συνεχίζεται μέχρις ότου τα εκκρεμή λόγω τριβών σταματήσουν να ταλαντώνονται.



Σχ. 11.17

Όπως είναι γνωστό η ενέργεια ενός σώματος που ταλαντώνεται είναι ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους. Κατά συνέπεια η μείωση του πλάτους της ταλάντωσης του ενός εκκρεμούς με ταυτόχρονη αύξηση του πλάτους του άλλου, σημαίνει ότι μεταφέρεται ενέργεια από το πρώτο στο δεύτερο και αντίστροφα. Η μεταφορά της ενέργειας γίνεται μέσω του νήματος και του βάρους β.

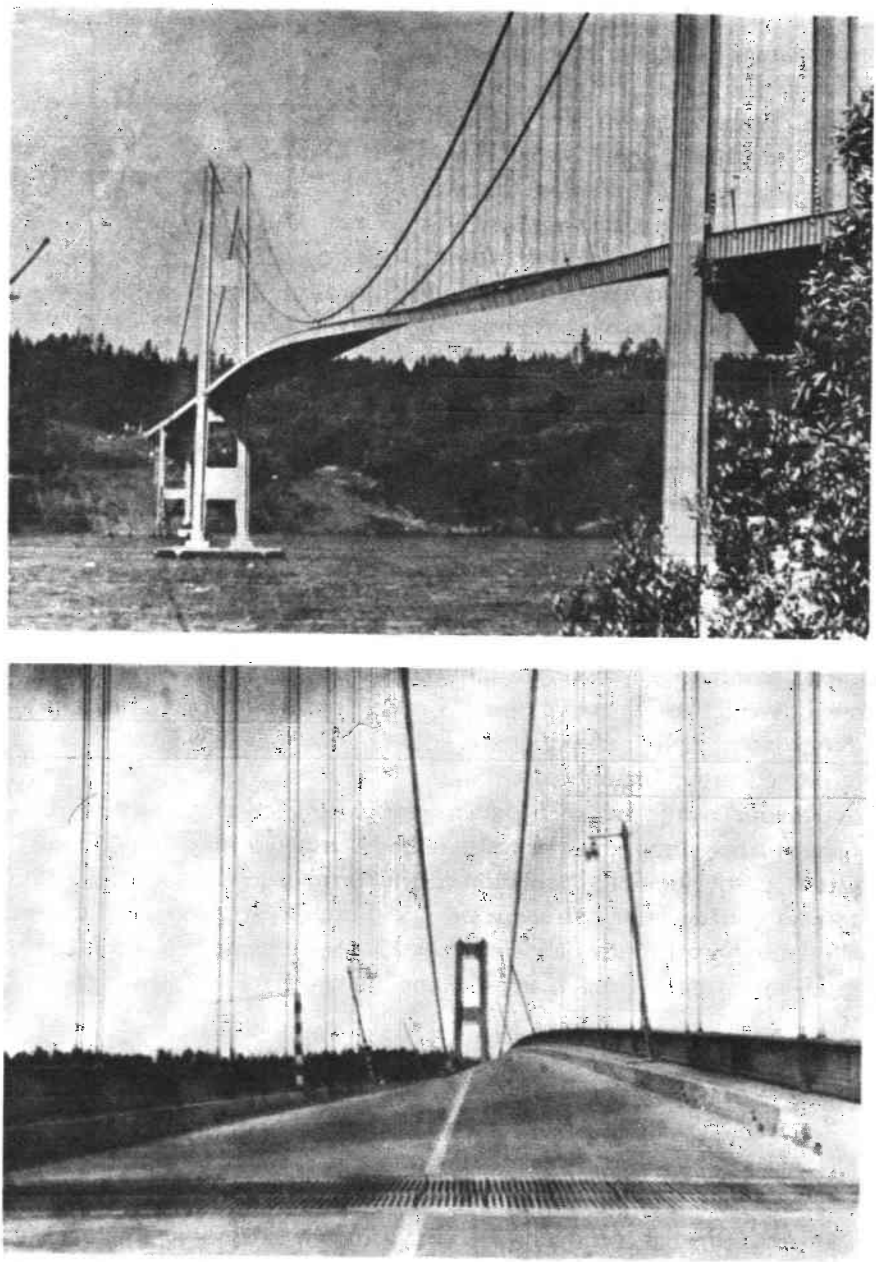
Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η σύζευξη έγινε μεταξύ δύο συστημάτων τα οποία έχουν την ίδια ιδιοσυχνότητα. Αν συζεύξουμε συστήματα με διαφορετικές ιδιοσυχνότητες, τότε η μεταφορά ενέργειας δεν είναι πλήρης και το φαινόμενο είναι πολύπλοκο.

Το φαινόμενο της σύζευξης είναι γενικό και παρατηρείται σε όλα τα συστήματα που μπορούν να ταλαντωθούν και να αλληλεπιδράσουν με ανταλλαγή ενέργειας. Π.χ. σύζευξη ως γνωστό έχουμε μεταξύ των δύο ηλεκτρικών κυκλωμάτων στο φαινόμενο της αμοιβαίας επαγωγής, στο μετασχηματιστή, στην εκπομπή και λήψη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων όπου η κεραία του πομπού και η κεραία του δέκτη είναι συζευγμένες κ.τ.λ.

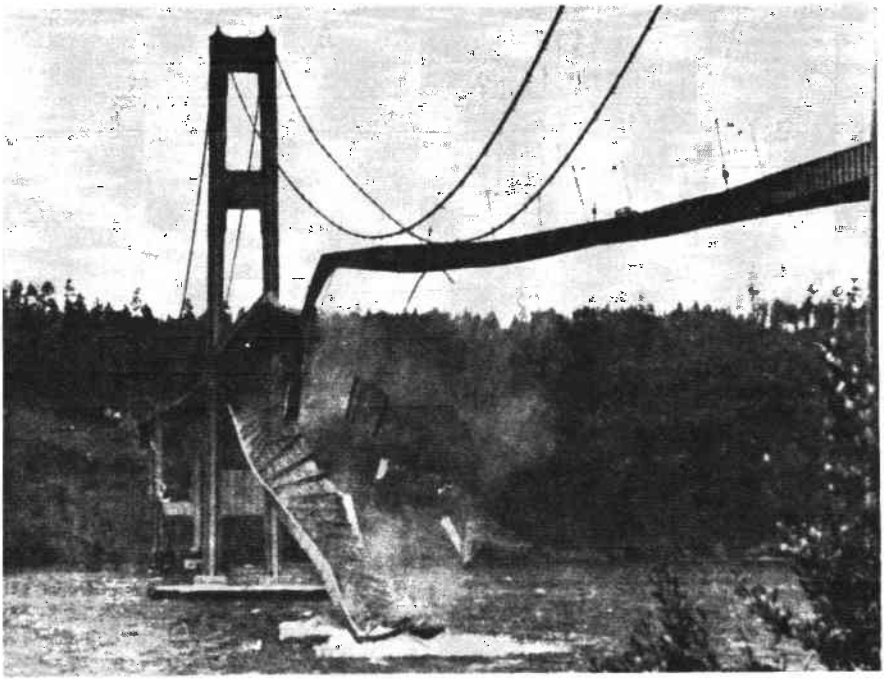
Ο συντονισμός ως μέθοδος έρευνας

11.8. Μελέτη μηχανικών κατασκευών

Οι μεγάλες μηχανικές κατασκευές, π.χ. πύργοι μετάδοσης ραδιοτηλεοπτικών προγραμμάτων ή κρεμαστές γέφυρες μεγάλου μήκους, είναι δυνατόν με την επίδραση του ανέμου να εκτελέσουν εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αν κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης ταλάντωσης παρουσιαστεί το φαινόμενο του συντονισμού, το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο με αποτέλεσμα την παραμόρφωση ή την καταστροφή των κατασκευών. Ένα τέτοιο παράδειγμα



Σχ. 11.18. Από τις πρώτες ημέρες της κατασκευής της, η γέφυρα ταλαντεύονταν με την επίδραση ασθενών ανέμων με τρόπο που θύμιζε λίκνισμα χωρίς όμως να καταστρέφεται.

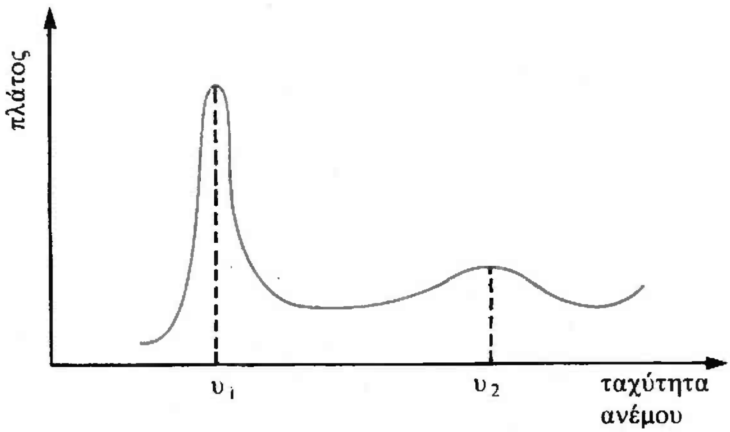


Σχ. 11.19. Τέσσερις μήνες μετά την κατασκευή της, άνεμοι ταχύτητας 19 m/sec αύξησαν το πλάτος της ταλάντωσης της γέφυρας (συντονισμός) με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

είναι η καταστροφή της κρεμαστής γέφυρας του ποταμού Tacoma στις ΗΠΑ σχ. 11.18 και 11.19 και της seven bridge στην Αγγλία. Σήμερα όλες οι μεγάλες κατασκευές αυτού του είδους σχεδιάζονται έτσι, ώστε να αποφεύγεται το φαινόμενο του συντονισμού. Συγκεκριμένα τόσο στο σχήμα, όσο και στην υπόλοιπη μηχανική σχεδίαση, λαμβάνεται υπόψη η επίδραση που μπορεί να έχει ο άνεμος στην ταλάντωση της κατασκευής. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι περίπου η εξής:

Έστω ότι πρέπει να εξεταστεί η συμπεριφορά στον άνεμο ενός πύργου σαν αυτούς που στηρίζουν τη γέφυρα του σχήματος 11.19. Με βάση τα σχέδια κατασκευάζεται σε μικρογραφία και με κάθε δυνατή λεπτομέρεια ένας τέτοιος πύργος, με υλικά που επιλέγονται, ώστε η συμπεριφορά της μικρογραφίας να είναι σχεδόν ίδια με αυτή του πραγματικού πύργου και τοποθετείται σε σήραγγα, όπου στερεώνεται κατάλληλα. Στη σήραγγα διοχετεύεται ρεύμα άερα του οποίου η ταχύτητα και η ροή ελέγχονται και μπορούν να αλλάζουν κατά βούληση. Με ειδικές διατάξεις μπορεί να καταγραφεί κάθε στιγμή το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί η μικρογραφία σε συνάρτηση με την ταχύτητα του ρεύματος του αέρα που διοχετεύεται στη σήραγγα. Με τη διαδικασία αυτή παίρνονται καμπύλες όπως αυτή του

σχήματος 11.20. Από την καμπύλη προκύπτει ότι το πλάτος γίνεται μέγιστο για δυο ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$ του ανέμου. Στην ταχύτητα $υ_1$ γίνεται μέγιστο το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί ο πύργος μπρός-πίσω και στην $υ_2$ το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί ο πύργος γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του.



Σχ. 11.20

Μέ βάση τις ταχύτητες των ανέμων που συνήθως πνέουν στην περιοχή όπου πρόκειται να εγκατασταθεί ο πύργος, βρίσκεται αν αυτός κινδυνεύει από συντονισμό ή όχι. Στην περίπτωση που η μελέτη με τη μικρογραφία δείξει ότι πράγματι ο πύργος διατρέχει κίνδυνο, μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητά του αλλάζοντας π.χ. την κατανομή της μάζας του και έτσι αποκλείουμε την περίπτωση συντονισμού. Η μέθοδος αυτή με κατάλληλη διαφοροποίηση εφαρμόζεται για τη μελέτη της συμπεριφοράς που παρουσιάζουν στον άνεμο οι πύργοι εκπομπής και αναμετάδοσης, οι υψηλές καμινάδες, οι πτέρυγες των αεροπλάνων κ.τ.λ.

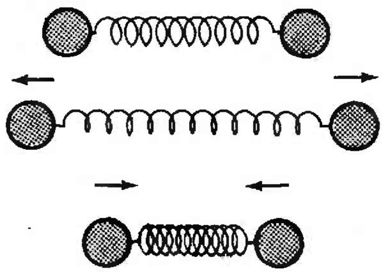
11.9. Ο συντονισμός ως μέθοδος έρευνας της δομής της ύλης

Το φαινόμενο του συντονισμού μπορεί να παρατηρηθεί όχι μόνο σε απλά συστήματα, π.χ. ελατήριο-μάζα, αλλά και σε πολύπλοκα τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν από το πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

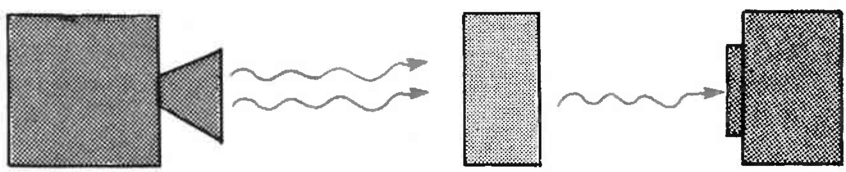
Επίσης είναι δυνατό να παρατηρηθεί σε πλήθος από όμοια συστήματα τα οποία περιγράφονται ικανοποιητικά από το πρότυπο του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Έτσι το φαινόμενο του συντονισμού μπορεί να παρατηρηθεί σ' ένα αέριο από διατομικά μόρια σε χαμηλή πυκνότητα. Τα άτομα στα μόρια

αυτά μπορεί να θεωρηθεί ότι ταλαντώνονται με τον ίδιο τρόπο που ταλαντώνονται δυο μάζες συνδεμένες με ένα σκληρό ελατήριο, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.21.

Αν σ' ένα τέτοιο αέριο προσπέσει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που έχει μήκος κύματος στην περιοχή του υπέρυθρου φωτός, τότε τα μόρια εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση απορροφώντας ένα μέρος από την προσφερόμενη ενέργεια. Μεταβάλοντας την συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι δυνατό να συντονισθούν τα ταλαντευόμενα άτομα οπότε η απορρόφηση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας γίνεται μέγιστη. Αν χρησιμοποιηθούν κατάλληλες ανιχνευτικές διατάξεις είναι δυνατό να μετρηθεί η ακτινοβολία που δεν απορροφήθηκε από το αέριο και έτσι να προσδιοριστεί σε ποια ακριβώς συχνότητα της προσπίπτουσας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας εμφανίστηκε ο συντονισμός. Η πειραματική διάταξη που χρησιμο-



Σχ. 11.21



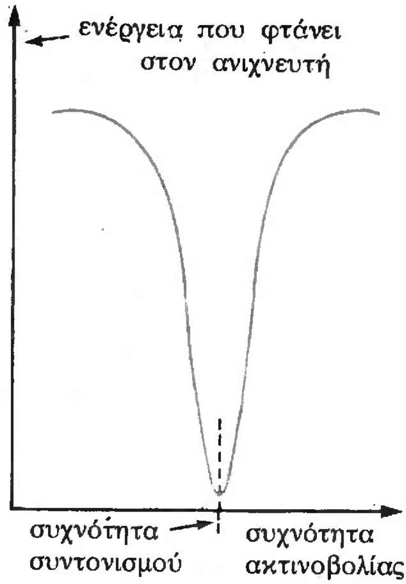
Σχ. 11.22

ποιείται για την παρατήρηση του φαινομένου αποδίδεται στο σχ. 11.22, ενώ στο σχ. 11.23 εικονίζεται η μεταβολή της ενέργειας που φτάνει στην ανιχνευτική διάταξη σε συνάρτηση με τη συχνότητα της ακτινοβολίας. Από την καμπύλη του σχήματος 11.23, μπορεί να προσδιοριστεί με μεγάλη ακρίβεια η συχνότητα συντονισμού και έτσι να μάθουμε την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης των ατόμων του αερίου. Επειδή η συχνότητα συντονισμού για το σύστημα ελατήριο-μάζες εξαρτάται από τις μάζες και το πόσο σκληρό είναι το ελατήριο, κατ' αναλογία η συχνότητα συντονισμού για το διατομικό μόριο θα εξαρτάται από τις μάζες των ατόμων και το είδος του χημικού δεσμού που υπάρχει μεταξύ τους. Έτσι με τη βοήθεια μεθόδων όπως αυτή που περιγρά-

ψαμε, μπορεί να καθοριστεί το είδος του χημικού δεσμού μεταξύ των ατόμων.

Κατά την παραπάνω μελέτη αγνοήσαμε τα άλλα είδη κίνησης του εκτελεί το μόριο, όπως π.χ. περιστροφή και μεταφορά και για το λόγο αυτό υπήρχε μια μόνο συχνότητα συντονισμού. Στην πράξη η μέθοδος που περιγράψαμε είναι περισσότερο πολύπλοκη αφού υπάρχουν και άλλες συχνότητες μεγάλης απορρόφησης.

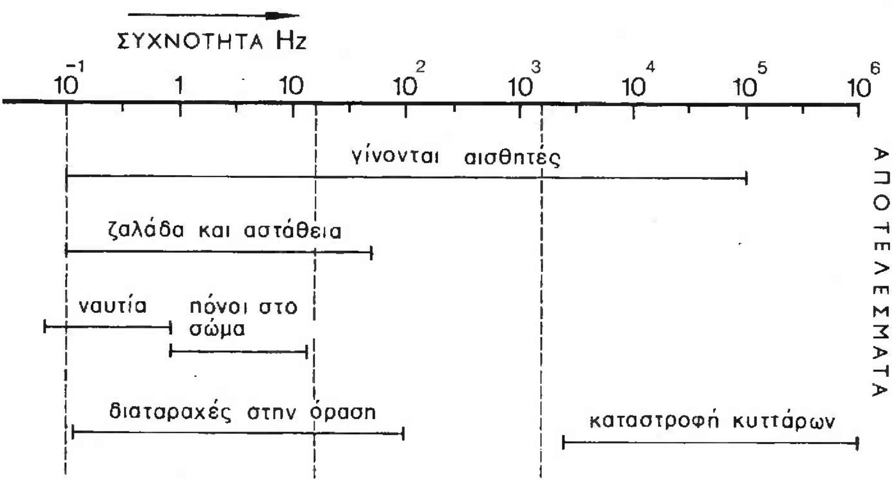
Επιπλέον η απορρόφηση σχετίζεται και με τον τρόπο που αλληλεπιδρά η ακτινοβολία με την ύλη, γεγονός που μπορεί να ερμηνεύσει μόνο η κβαντική φυσική.



Σχ. 11.23

11.10. Τα αποτελέσματα των ταλαντώσεων στον ανθρώπινο οργανισμό

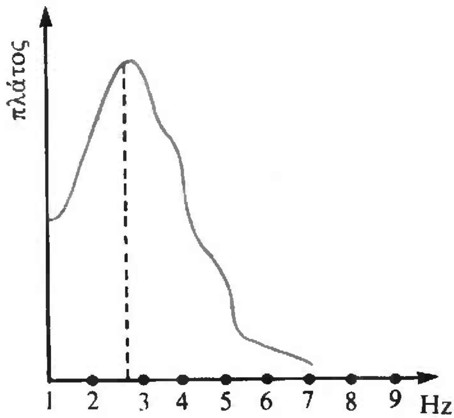
Όταν η μηχανή ενός αυτοκινήτου λειτουργεί, τα διάφορα τμήματά της (π.χ έμβολα) εκτελούν γρήγορες παλινδρομικές κινήσεις (ταλάντωση). Οι



κινήσεις αυτές μεταφέρονται στα άλλα τμήματα του οχήματος, αφού όλα στηρίζονται στον ίδιο σκελετό, με αποτέλεσμα ο επιβάτης να δονείται. Ακόμη περισσότερες δονήσεις δέχονται οι χειριστές των αεροσυμπιεστών (κομπρεσέρ) ή άλλων αντίστοιχων μηχανημάτων. Τα αποτελέσματα των δονήσεων αυτών στον ανθρώπινο οργανισμό μελετήθηκαν και είναι σημαντικά. Στον προηγούμενο πίνακα δίνονται ενδεικτικά τα αποτελέσματα των δονήσεων στον ανθρώπινο οργανισμό σε σχέση με τη συχνότητά τους.

Οι περισσότερο σημαντικές επιδράσεις των δονήσεων στο ανθρώπινο σώμα οφείλονται στο φαινόμενο του συντονισμού. Στο σχήμα 11.24 εικονίζεται το πλάτος της ταλάντωσης των κοιλιακών τοιχωμάτων του επιβάτη ενός αυτοκινήτου σε συνάρτηση με τη συχνότητα δόνησης του καθίσματος.

Επειδή τα αποτελέσματα του συντονισμού για τον επιβάτη ενός οχήματος ή το χειριστή κάποιου μηχανήματος που προκαλεί δονήσεις είναι δυσάρεστα, καταβάλλεται πάντα προσπάθεια αποφυγής του συντονισμού. Για παράδειγμα οι αεροσυμπιεστές σχεδιάζονται έτσι, ώστε η συχνότητα των δονήσεων που προκαλούν να είναι διαφορετική από την ιδιοσυχνότητα των χεριών του χειριστή.



Σχ. 11.24

Σύνθεση ταλαντώσεων

11.11. Γενικά

Όταν ένα σώμα αναγκάζεται να εκτελέσει ταυτόχρονα δυο ή περισσότερες ταλαντώσεις, τότε η κίνηση που θα κάνει τελικά είναι η συνισταμένη αυτών των ταλαντώσεων. Για παράδειγμα η μεμβράνη του αυτιού μας κάνει απλή αρμονική ταλάντωση όταν τη διεγείρει ένας απλός ήχος. Όταν όμως ακούμε διαφορετικούς ήχους η κίνηση της μεμβράνης είναι η συνισταμένη των κινήσεων που προκαλεί χωριστά ο καθένας ήχος. Επίσης τα ηλεκτρόνια στον καθοδικό σωλήνα του παλμογράφου, αν εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση και στα δυο ζεύγη πλακιδίων απόκλισης, εκτελούν μια κίνηση που είναι η συνισταμένη δυο ταλαντώσεων κάθετων μεταξύ τους. Η συνισταμένη κίνη-

ση εξαρτάται από τις διευθύνσεις, τις συχνότητες, τα πλάτη και τις φάσεις των αρχικών ταλαντώσεων. Ο προσδιορισμός της συνισταμένης κίνησης λέγεται **σύνθεση ταλαντώσεων** και γίνεται με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος που μελετήσαμε στην παράγραφο 7.5.

Το περιστρεφόμενο διάνυσμα αποτελεί ένα καλό πρότυπο για τη μελέτη της σύνθεσης των ταλαντώσεων γιατί έτσι αποφεύγουμε τη χρησιμοποίηση των νόμων της μηχανικής που θα οδηγούσε σε πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς. Το περιστρεφόμενο διάνυσμα δίνει όλα τα χαρακτηριστικά της απλής αρμονικής ταλάντωσης που παριστάνει. Συγκεκριμένα το μήκος του δίνει το πλάτος της ταλάντωσης και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του την κυκλική της συχνότητα.

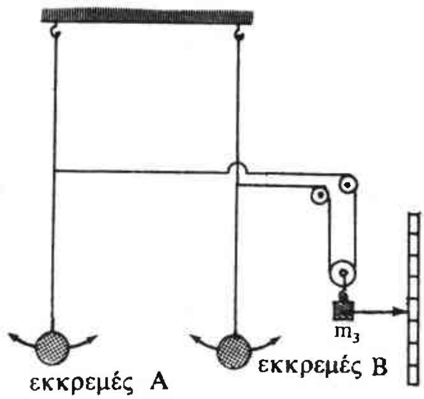
1995

11.12. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση και ίσες συχνότητες

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, σχ. 11.25, που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και ότι οι δυο ταλαντώσεις έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω, διαφορετικά πλάτη α και β και διαφορά φάσης φ. Οι εξισώσεις των απομακρύνσεων για τις δυο ταλαντώσεις είναι αντίστοιχα:

$$\psi_1 = \alpha\eta\mu\omega t \quad \text{και} \quad \psi_2 = \beta\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Οι δυο ταλαντώσεις μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια των αντίστοιχων περιστρεφόμενων διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, σχ. 11.26.



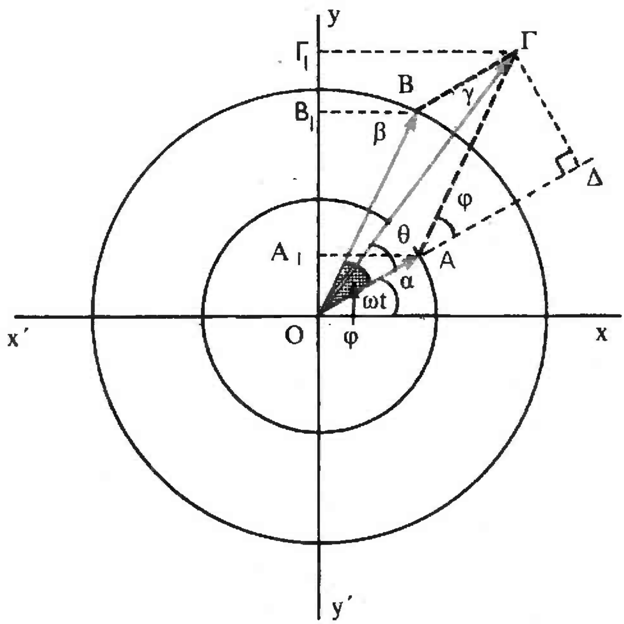
Σχ. 11.25. Η ταλάντωση που εκτελεί το σώμα m_3 είναι σύνθεση των ταλαντώσεων των εκκρεμών Α και Β, όταν εκτρέπονται από τη θέση ισορροπίας τους.

Αν συνθέσουμε τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$, προκύπτει ένα νέο διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$, που η προβολή του $O\Gamma_1 = \psi_{o\lambda}$ πάνω στον ημιάξονα ΟΥ είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των προβολών $OA_1 = \psi_1$ και $OB_1 = \psi_2$ των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ πάνω στον ίδιο ημιάξονα. Δηλαδή

$$\psi_{o\lambda} = \psi_1 + \psi_2$$

Επομένως το περιστρεφόμενο διάνυσμα $\vec{O\Gamma} = \vec{OA} + \vec{OB}$ περιγράφει την κίνηση που εκτελεί το σώμα και η οποία είναι το αποτέλεσμα των δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που παριστάνουν τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

Το διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ έχει σταθερό μήκος γ και στρέφεται γύρω από το Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, αφού ολόκληρο το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ



Σχ. 11.26

στρέφεται χωρίς να μετασχηματίζεται. Έτσι αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{O\Gamma}$, αυτή θα είναι χρονικά σταθερή και θα ισχύει:

$$O\Gamma_1 = \psi_{o\lambda} = \gamma\eta\mu(\omega t + \theta)$$

Δηλαδή η συνισταμένη κίνηση που περιγράφει το διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ είναι απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους γ, κυκλικής συχνότητας ω και φάσης $\omega t + \theta$

Το πλάτος γ της συνισταμένης ταλάντωσης και η γωνία θ υπολογίζονται με τη βοήθεια του σχήματος 11.26 και είναι:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (11.28)$$

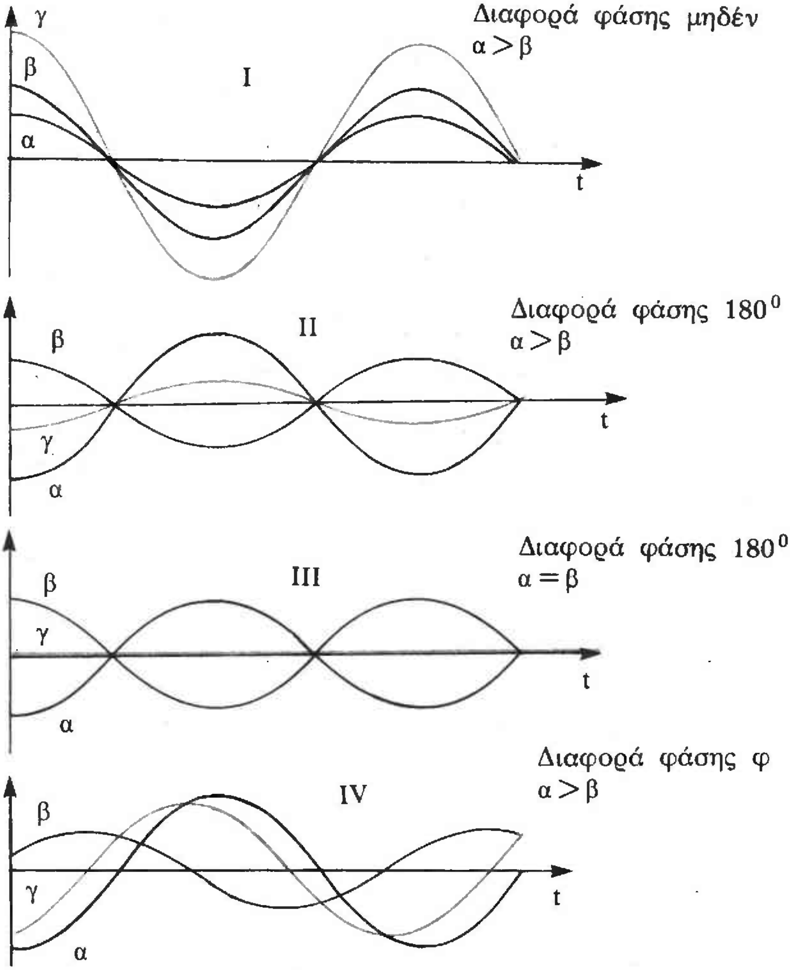
και

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\Gamma\Delta}{OA + A\Delta} = \frac{\beta\eta\mu\varphi}{\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (11.29)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις εξισώσεις (11.28) και (11.29) το πλάτος γ της συνισταμένης ταλάντωσης και η γωνία θ καθορίζονται από τα πλάτη α και β των συνιστωσών ταλαντώσεων και από τη διαφορά φάσης φ ανάμεσά τους.

Έτσι π.χ. αν $\alpha = \beta$ και $\varphi = \pi$ τότε $\gamma = 0$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 11.27 III όπου έχουν σχεδιαστεί η ψ_1, η ψ_2 και η $\psi_{ολ}$ για διάφορες τιμές των α, β και φ.

Γενικεύοντας μπορούμε να υποστηρίξουμε, **ότι η σύνθεση απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης και συχνότητας που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, δίνει μια νέα απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας ίσης με αυτή των συνιστωσών ταλαντώσεων.**



Σχ. 11.27. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας και διεύθυνσης για διάφορες τιμές των πλατών α και β και της γωνίας φ.

Παράδειγμα

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Αν οι δυο ταλαντώσεις έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/sec, πλάτη $\alpha = 3$cm και $\beta = 4$cm διαφορά φάσης $\varphi = 0°$ και αρχική φάση 0° να βρείτε την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης. Ποια η απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t=0,5 sec;

Λύση

Η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι

$$y = \gamma\eta\mu(\omega t + \theta) \qquad (\alpha)$$

Αλλά $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\varphi}$ και με αντικατάσταση

$$\gamma = 7\text{cm}$$

Επίσης $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta\eta\mu\varphi}{\alpha + \beta\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{4\cdot 0}{3 + 4\cdot 1} = 0 \Rightarrow \theta = 0°$

Έτσι η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι

$$y = 7\eta\mu\frac{\pi}{3}t$$

Για την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0,5$ sec έχουμε:

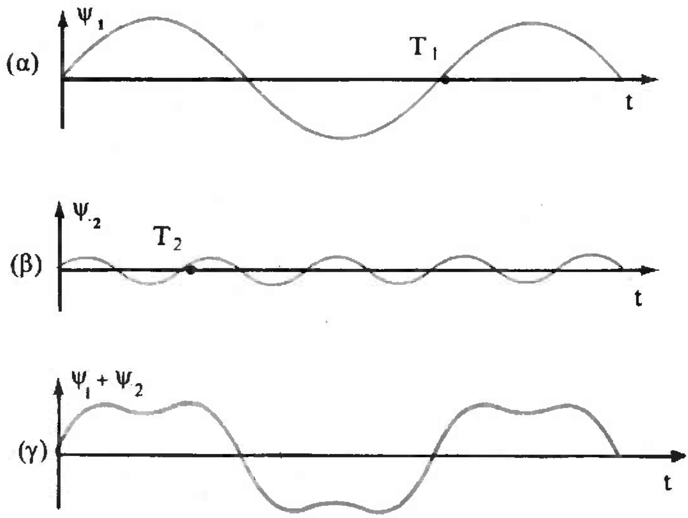
$$y = 7\eta\mu\frac{\pi}{3}\frac{1}{2}\text{ cm} = 7\eta\mu\frac{\pi}{6}\text{ cm} \Rightarrow y = 3,5\text{ cm}$$

1985/1998

11.13. Σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση και διαφορετική συχνότητα

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται πάνω στην ίδια ευθεία και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η μορφή της συνισταμένης κίνησης που εκτελεί τελικά το σώμα εξαρτάται από τη σχέση ανάμεσα στις κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 των δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων. Έτσι για παράδειγμα αν $\omega_2 = 3\omega_1$, οπότε $\nu_2 = 3\nu_1$, ή $T_1 = 3T_2$ η συνισταμένη κίνηση είναι η ταλάντωση του σχήματος 11.28 γ, η οποία σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων προκύπτει από την πρόσθεση των απομακρύνσεων του σώματος που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Η συνισταμένη κίνηση είναι μια περιοδική κίνηση όχι όμως αρμονική.

Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο, **δηλαδή η σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, που οι συχνότητες τους είναι η μια ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης δίνει μια νέα περιοδική κίνηση, όχι όμως αρμονική.**



Σχ. 11.28

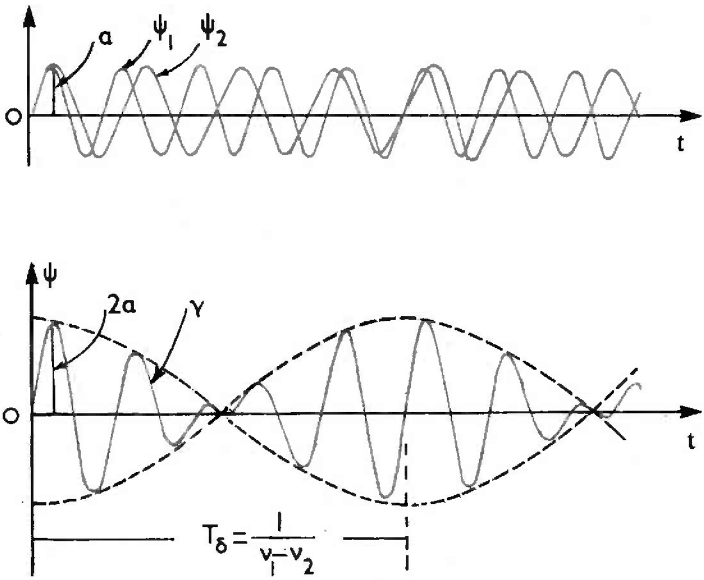
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν το ίδιο πλάτος α και των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Δυο τέτοιες ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\psi_1 = \alpha\eta\mu\omega_1 t \quad \text{και} \quad \psi_2 = \alpha\eta\mu\omega_2 t \quad (\omega_1 \simeq \omega_2)$$

Αν τις παραπάνω εξισώσεις τις παραστήσουμε γραφικά και λάβουμε υπόψη μας, ότι κάθε χρονική στιγμή, η απομάκρυνση ψ της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $\psi = \psi_1 + \psi_2$, προκύπτει η καμπύλη γ που φαίνεται στο σχήμα 11.29.

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει στο σχήμα το αποτέλεσμα της σύνθεσης δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, που οι συχνότητές τους διαφέρουν πολύ λίγο, είναι μιά περιοδική όχι αρμονική κίνηση της οποίας η συχνότητα είναι **σχεδόν** ίση με τις συχνότητες των συνιστωσών ταλαντώσεων. Η περιοδική αυτή κίνηση ονομάζεται **διακρότημα** και το πλάτος της μεταβάλλεται αργά μεταξύ των τιμών 0 και 2α. Τα συμπεράσματα

στα οποία καταλήξαμε μετά το γραφικό σχεδιασμό της συνισταμένης κίνησης, μπορούν να προκύψουν και από θεωρητική μελέτη κατά την οποία πάντως



Σχ. **11.29**

δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το περιστρεφόμενο διάνυσμα λόγω των διαφορετικών συχνοτήτων.

Η εξίσωση της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \alpha(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t)$$

ή

$$\psi = 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t\cdot\eta\mu\,\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t \qquad (11.30)$$

Επειδή όμως οι κυκλικές συχνότητες διαφέρουν λίγο, η μέση τιμή τους $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ θα είναι περίπου ίση με αυτές, δηλαδή

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \simeq \omega_1 \simeq \omega_2 \quad \text{ή} \quad \bar{\nu} \simeq \nu_1 \simeq \nu_2 \qquad (11.31)$$

Στην εξίσωση (11.30) ο παράγοντας συν $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ t μεταβάλλεται πολύ αργά με το χρόνο σε σχέση με τον παράγοντα ημ $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ t και κατά συνέπεια μπορούμε να επιλέξουμε το 2αcυν $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ t σαν πλάτος της συνισταμένης

ταλάντωσης που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο και παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 2α. Τέλος όπως προκύπτει από την εξίσωση (11.31) η συνισταμένη ταλάντωση έχει συχνότητα περίπου ίση με τη συχνότητα των συνιστωσών ταλαντώσεων. Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μεγίστων τιμών του πλάτους λέγεται περίοδος του διακροτήματος T_δ.

Κάθε χρονική στιγμή t οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν διαφορά φάσης

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega_1 t - \omega_2 t$$

Σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος T_δ η παραπάνω διαφορά φάσης γράφεται

$$\Delta\varphi = \omega_1 T_\delta - \omega_2 T_\delta \qquad (11.32)$$

Αλλά από το σχήμα 11.29 προκύπτει, ότι για $t = T_\delta$ είναι $\Delta\varphi = 2\pi$

Έτσι η εξίσωση (11.32) γράφεται:

$$\omega_1 T_\delta - \omega_2 T_\delta = 2\pi \Rightarrow 2\pi\nu_1 T_\delta - 2\pi\nu_2 T_\delta = 2\pi \Rightarrow \boxed{T_\delta = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2}}$$

ή

$$\boxed{\nu_\delta = \nu_1 - \nu_2} \qquad (11.33)$$

Δηλαδή η συχνότητα ν_δ των διακροτημάτων είναι ίση με τη διαφορά των συχνοτήτων των συνιστωσών ταλαντώσεων.

11.14. Εφαρμογή του διακροτήματος στη μέτρηση ακουστών συχνοτήτων

Τα διακροτήματα μπορεί να γίνουν εύκολα αισθητά στα ακουστικά κύματα με το ακόλουθο πείραμα. Στο ένα σκέλος ενός διαπασών στερεώνουμε ένα μικρό κομμάτι πλαστελίνης.

Αν κτυπήσουμε σε ακλόνητο σώμα το διαπασών και το πλησιάσουμε στο αυτί μας μπορούμε να ακούσουμε έναν ήχο που διαδοχικά αυξομειώνεται. Η αυξομείωση αυτή οφείλεται στο ότι το σκέλος του διαπασών που έχει την πλαστελίνη παράγει απλό ήχο που έχει συχνότητα λίγο μικρότερη από αυτή που παράγει το άλλο σκέλος. Η μεμβράνη του αυτιού εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση των δύο ηχητικών κυμάτων, δηλαδή η κίνησή της είναι όμοια με αυτή που κάνει σώμα όταν εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης που οι συχνότητές τους διαφέρουν ελάχιστα. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων του ήχου που ακούμε, είναι ίσο με την περίοδο του διακροτήματος.

Με τη βοήθεια μιας γεννήτριας ακουστών ήχων και ενός μεγαφώνου μπορούμε να παράγουμε απλούς ήχους των οποίων τη συχνότητα, που μπορούμε να μεταβάλλουμε, τη γνωρίζουμε από τον κατασκευαστή. Θέλουμε να μετρήσουμε τη συχνότητα ν ενός άλλου απλού ήχου με τη βοήθεια της γεννήτριας. Μεταβάλλουμε αργά τη συχνότητα $\nu_{\gamma\varepsilon\nu}$ της γεννήτριας και για μια

τιμή αυτής αρχίζουμε να ακούμε ένα μόνο ήχο, που προέρχεται από τη συμβολή* των δυο απλών ήχων και του οποίου η ένταση μεταβάλλεται με το χρόνο. Δηλαδή δημιουργείται διακρότημα και κατά συνέπεια η ζητούμενη συχνότητα ν του απλού ήχου έχει τιμή σχεδόν ίση με αυτή της γεννήτριας.

$$\text{Έτσι} \quad \nu \simeq \nu_{\gamma\varepsilon\nu}$$

Αν T_δ είναι ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μέγιστων του ήχου που ακούμε, η συχνότητα του διακροτήματος είναι $\nu_\delta = \frac{1}{T_\delta}$ και συνδέεται με τις συχνότητες $\nu_{\gamma\varepsilon\nu}$ της γεννήτριας και ν του απλού ήχου με τη σχέση:

$$\nu = \nu_{\gamma\varepsilon\nu} \pm \nu_\delta$$

Έτσι αν π.χ. $T_\delta = 10sec$ και $\nu_{\gamma\varepsilon\nu} = 1000$ Hz τότε η άγνωστη συχνότητα είναι

$$\nu = \left(1000 \pm \frac{1}{10}\right) \text{Hz} = (1000 \pm 0{,}1)\,\text{Hz},$$

δηλαδή η ακρίβεια με την οποία προσδιορίστηκε η άγνωστη συχνότητα είναι πάρα πολύ μεγάλη.

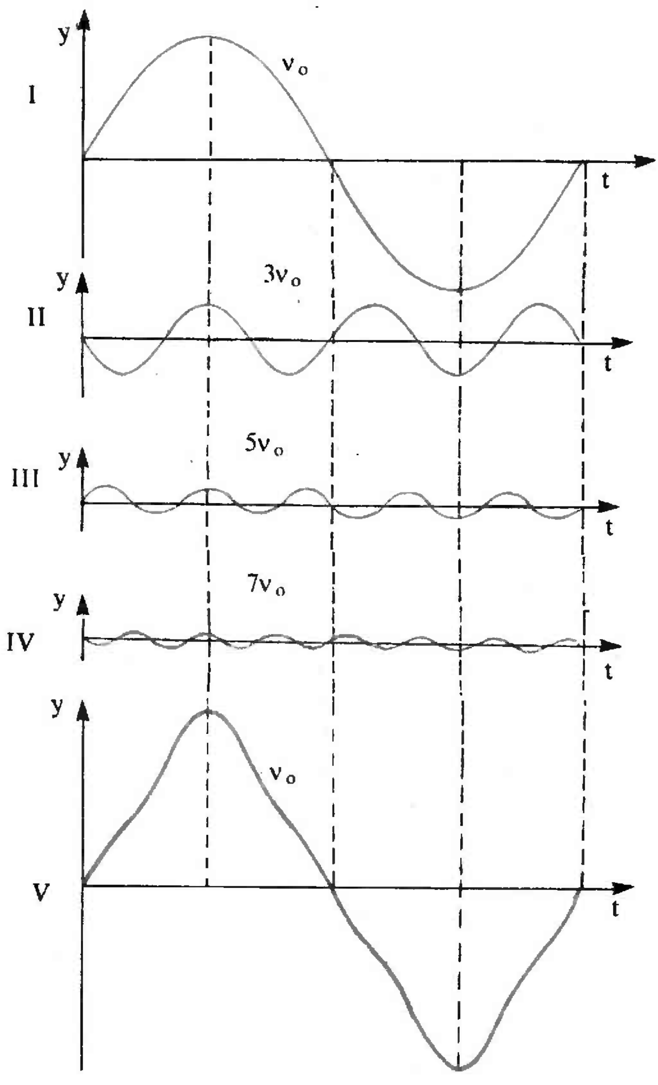
11.15. Ανάλυση περιοδικών κινήσεων κατά Fourier

Στην παράγραφο 11.13 είδαμε ότι η σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους είναι η μια ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης, δίνει μια νέα ταλάντωση όχι όμως αρμονική. Γενικότερα το αποτέλεσμα της σύνθεσης πολλών απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια μιας συχνότητας ν_o, είναι μια νέα ταλάντωση (όχι αρμονική) με συχνότητα πάλι ν_o. Στο σχήμα 11.30 η περιοδική κίνηση (ν) έχει συχνότητα ν_o και έχει προκύψει από τη σύνθεση των απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν συχνότητες ν_o, $3\nu_o$, $5\nu_o$ και $7\nu_o$.

Ό Γάλλος μαθηματικός J. Fourier (1748-1830) έδειξε ότι με αντίστροφη διαδικασία κάθε περιοδική κίνηση συχνότητας ν_o μπορεί να αναλυθεί σε μεγάλο αριθμό απλών αρμονικών ταλαντώσεων που οι συχνότητές τους είναι ακέραια πολλαπλάσια της ν_o. Έτσι στο σχήμα 11.30 η περιοδική κίνηση V αναλύεται στις απλές αρμονικές ταλαντώσεις ν_o, $3\nu_o$, $5\nu_o$, $7\nu_o$.

* Όταν δυο ήχοι συναντιούνται σ' ένα σημείο του χώρου (στο παράδειγμά μας το σημείο αυτό είναι το αυτί) τότε λέμε ότι οι δυο ήχοι συμβάλλουν.

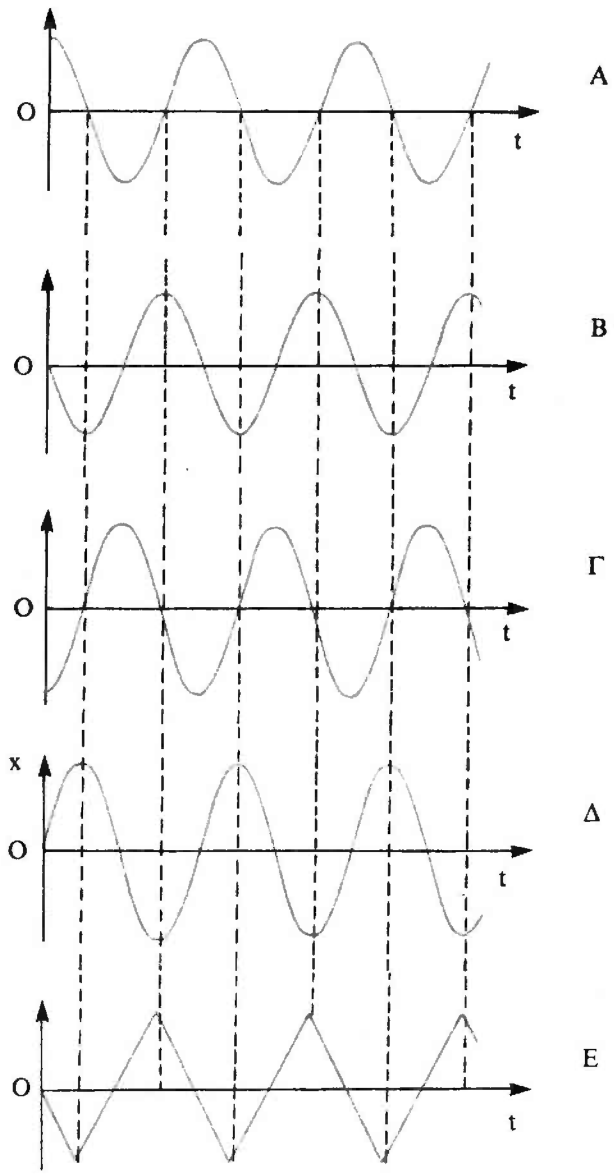
Η συχνότητα ν_o της περιοδικής κίνησης ονομάζεται θεμελιώδης ή πρώτη αρμονική και οι συχνότητες των απλών αρμονικών ταλαντώσεων $2\nu_o$, $3\nu_o$ ... ονομάζονται αντίστοιχα δεύτερη αρμονική, τρίτη αρμονική κ.τ.λ.



Σχ. 11.30

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

1. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι η καμπύλη Δ.



Ποιά από τις υπόλοιπες καμπύλες αποδίδει τη μεταβολή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο;

(Απ. A, B)

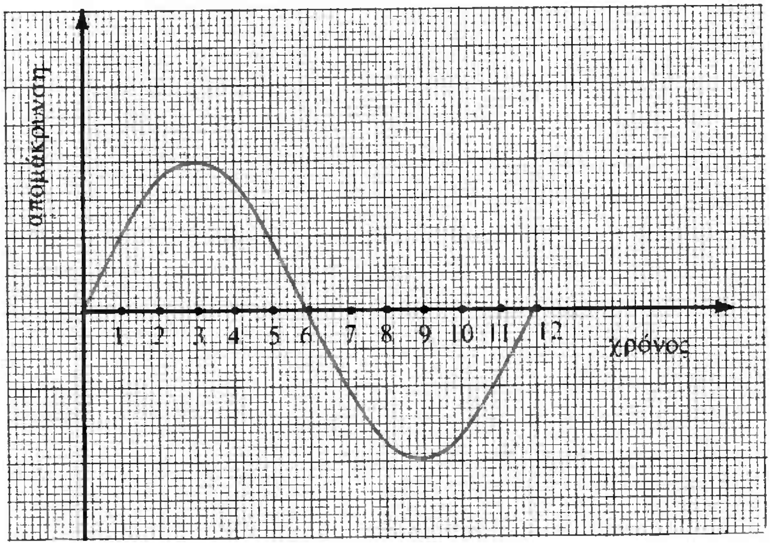
2. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση φαίνεται στο σχήμα.

Α) Ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν;

Β) Ποιες χρονικές στιγμές η ταχύτητα είναι μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή;

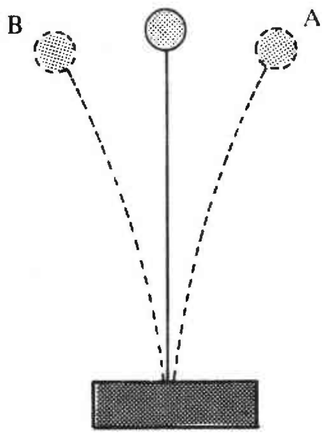
Γ) Ποιες χρονικές στιγμές η επιτάχυνση είναι μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή;

Δ) Ποιες χρονικές στιγμές η επιτάχυνση είναι μηδέν;



3. Μια λεπτή ατσάλινη ράβδος στερεώνεται κατακόρυφα σε ακλόνητο στήριγμα με το ένα άκρο της, ενώ στο άλλο υπάρχει στερεωμένη μια μικρή σφαίρα μάζας m = 200gr. Για να απομακρύνουμε τη σφαίρα κατά 10cm προς τη μία πλευρά, θέση Α, απαιτείται δύναμη 4Ν. Όταν η σφαίρα αφεθεί ελεύθερη εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.
Σε πόσο χρόνο θα έλθει στη θέση Β;

(Απ. 0,22 sec)



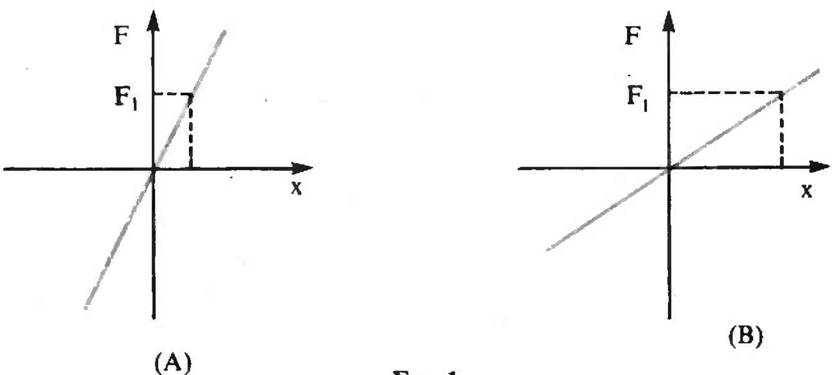
4. Από το ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται σε ακλόνητο σημείο, εξαρτάται σώμα μάζας $m = 1{,}5kgr$ και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $x = 2cm$. Στη συνέχεια αφαιρείται το σώμα και από το ελατήριο εξαρτάται άλλο σώμα άγνωστης μάζας m_x. Το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση πλάτους $x_0 = 10^{-1}$ m. Αν η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2$ sec, να υπολογιστούν:

α) η σταθερά K του ελατηρίου
β) η μάζα m_x του σώματος
γ) η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος που ταλαντώνεται

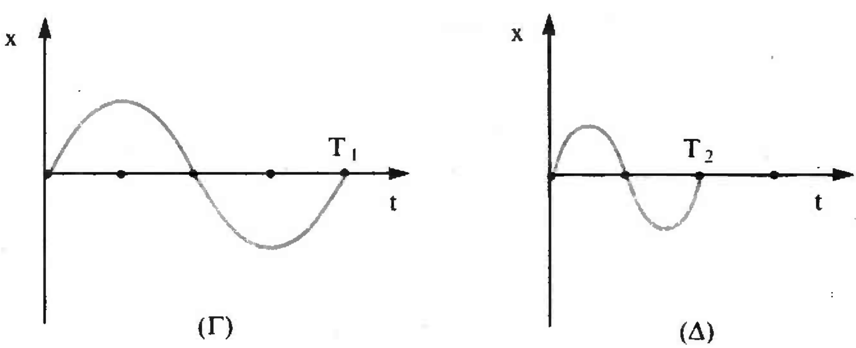
$$(g = 9{,}81 \ m/sec^2, \ \pi^2 \simeq 10)$$

(**Απ.** α) 735,7 N/m, β) 73,6 Kgr γ) $1m/sec^2$)

5. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η δύναμη επαναφοράς μπορεί να μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x όπως δείχνουν οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα 1. Για κάθε γραφική παράσταση F − x του σχήματος 1 να βρείτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση x − t του σχήματος 2.



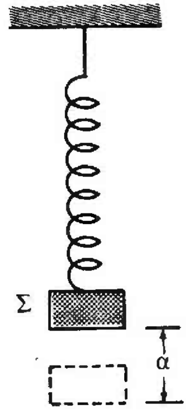
Σχ. 1



Σχ. 2

(**Απ.** B → Γ, A → Δ)

6. Στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι μόνιμα στερεωμένο, εξαρτάται σώμα Σ. Αν στη συνέχεια το σώμα απομακρυνθεί προς τα κάτω κατά α και αφεθεί κατόπιν ελεύθερο θεωρούμε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους α.



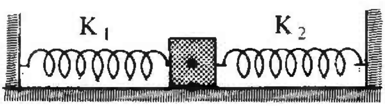
α) Αν ο χρόνος που απαιτείται για να κινηθεί το σώμα από τη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης μέχρι τη θέση ισορροπίας είναι t, ποιος θα ήταν ο αντίστοιχος χρόνος αν το πλάτος της ταλάντωσης ήταν διπλάσιο.

β) Θεωρείστε σαν χρονική στιγμή μηδέν, τη στιγμή που το σώμα Σ περνάει από τη θέση ισορροπίας και βρείτε τη σχέση που συνδέει κάθε χρονική στιγμή την ταχύτητα του σώματος όταν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους α με την ταχύτητα, αν το πλάτος ήταν 2α. Αποδώστε γραφικά στο ίδιο διάγραμμα τις δυο ταχύτητες.

γ) Ποια σχέση συνδέει τις τιμές της επιτάχυνσης για κάθε χρονική στιγμή, για πλάτη ταλάντωσης α και 2α;

δ) Χρησιμοποιώντας την απάντηση στο ερώτημα γ μπορείτε να βρείτε σχέση μεταξύ των αντίστοιχων τιμών της δύναμης για κάθε χρονική στιγμή και για πλάτη ταλάντωσης α και 2α;

7. Ένα σώμα μάζας m ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά και το αφήσουμε ελεύθερο, να δείξετε ότι για μικρή απομάκρυνση x θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Ποια σχέση δίνει την περίοδο της απλής αμονικής ταλάντωσης; Αν η αρχική απομάκρυνση γίνει μεγαλύτερη θα μεταβληθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος;

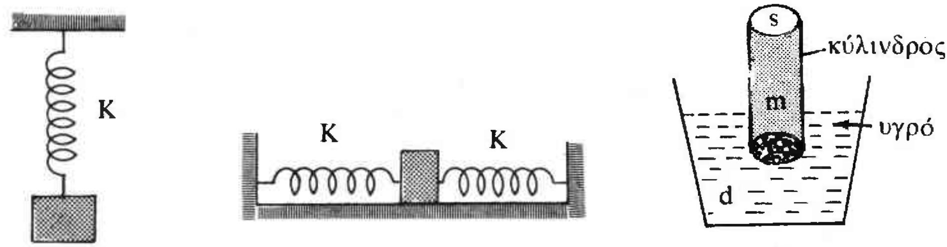


0

(Απ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K_1 + K_2}}$, ναι)

8. Στο σχήμα φαίνονται τρία μηχανικά συστήματα τα οποία είναι δυνατόν αν διεγερθούν κατάλληλα να εκτελέσουν απλές αρμονικές ταλαντώσεις πάνω στη γη. Υποθέτουμε ότι τα τρία αυτά συστήματα μεταφέρονται κάπου στο διάστημα όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας τόσο από την έλξη της γης όσο και από οποιοδήποτε άλλο

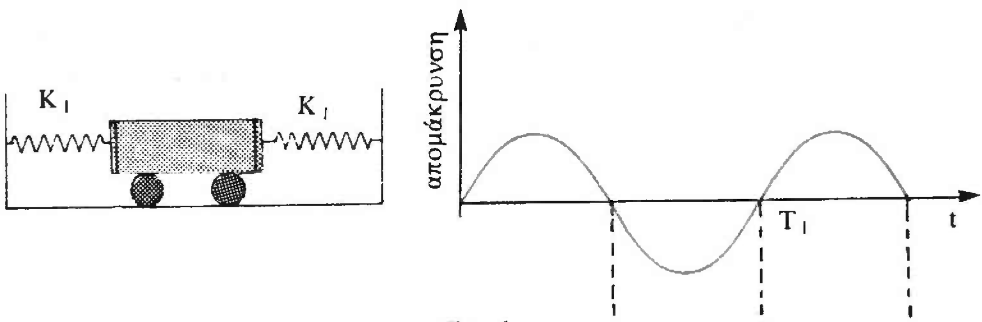
πλανήτη είναι μηδέν. Ποιο από τα συστήματα, αν υπάρχει κάποιο, θα μπορούσε να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση;



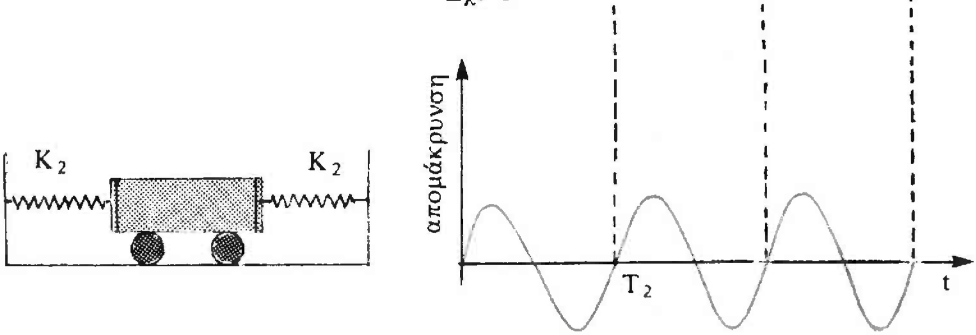
α β γ

(**Απ.** α και β)

9. Στο σχήμα 1 φαίνεται ένα μικρό όχημα δεμένο με δυο όμοια ελατήρια σταθεράς K_1 και δίπλα η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο όταν το όχημα τεθεί σε ταλάντωση. Στο σχήμα 2 φαίνεται το ίδιο όχημα, με διαφορετικά ελατήρια σταθεράς K_2. Δίπλα είναι σχεδιασμένη πάλι η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο όταν το σύστημα τεθεί πάλι σε ταλάντωση. Όπως φαίνεται από τα σχήματα είναι $T_1 = 2T_2$.



Σχ. 1



Σχ. 2

α) Ποια από τις σταθερές των ελατηρίων K_1 και K_2 είναι μεγαλύτερη;

β) Ποια σχέση συνδέει τις μέγιστες ταχύτητες υ_{01} και υ_{02} των δύο οχημάτων, αν αυτά εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση του ίδιου πλάτους x_0;

γ) Ποια σχέση συνδέει τις επιταχύνσεις γ_1 και γ_2 των δυο οχημάτων σε δυο θέσεις που απέχουν εξίσου από τη θέση ισορροπίας;

δ) Όπως γνωρίζουμε η δύναμη συνδέεται με τη μάζα και την επιτάχυνση με τη σχέση $F = m\gamma$ ενώ με την επιμήκυνση και τη σταθερά του ελατηρίου με τη σχέση $F = Kx$. Με τη βοήθεια αυτών των δυο σχέσεων και την απάντηση στην ερώτηση (γ), βρείτε σχέση ανάμεσα στις σταθερές K_1 και K_2 των δυο ελατηρίων.

(**Απ.** α) $K_1 < K_2$ β) $\upsilon_{02} = 2\upsilon_{01}$ γ) $\gamma_2 = 4\gamma_1$ δ) $K_2 = 4K_1$)

10) Αν η περίοδος της ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι T, ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

$T \propto D^2$, $T^2 \propto D$, $T \propto \frac{1}{D^2}$, $T^2 \propto \frac{1}{D}$ (το σύμβολο $\propto$ σημαίνει ανάλογο).

Πως πρέπει να μεταβληθεί η μάζα του ταλαντωτή για να διπλασιαστεί η περίοδός του; Ποια από τις επόμενες σχέσεις ανάμεσα στην περίοδο και τη μάζα του ταλαντωτή είναι σωστή;

$T^2 \propto m$, $T \propto m^2$, $T^2 \propto \frac{1}{m}$, $T \propto \frac{1}{m^2}$

(**Απ.** $T^2 \propto \frac{1}{D}$, $m_x = 4m$, $T^2 \propto m$)

11) Η μάζα σ' έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή κινείται από τη θέση ισορροπίας στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης που είναι 5 cm σε χρόνο 1 sec. Να υπολογίσετε:

α) την περίοδο
β) την κυκλική συχνότητα ω
γ) την μέγιστη ταχύτητα
δ) την μέγιστη επιτάχυνση

(**Απ.** α) 4sec β) $\frac{\pi}{2}$ rad/sec γ) $\frac{5\pi}{200}$ m/sec δ) $\frac{5\pi^2}{400}$ m/sec^2)

12) Ένα σώμα μάζας $m = 0{,}1$ Kgr εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και διέρχεται από δυο σημεία που απέχουν $x_1 = 6$cm και $x_2 = 8$cm από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητες $\upsilon_1 = 24$cm/sec και $\upsilon_2 = 16$cm/sec αντίστοιχα. Να βρεθούν:

α) Η σταθερά επαναφοράς D
β) Η κυκλική συχνότητα ω
γ) Το πλάτος της ταλάντωσης x_o

(**Απ.** α) 8/7 N/m β) 3,38 rad/sec γ) 9,3 cm)

13) Ένα σώμα μάζας $m = 200$ gr, εκτελέί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 0{,}25$ sec.

α) Πόσο είναι το μέτρο της απομάκρυνσης της μάζας m, όταν η δύναμη επαναφοράς είναι F = 8N;

β) Πόση είναι στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή;

γ) Αν η δυναμική ενέργεια σ' αυτή τη θέση είναι το μισό της ολικής ενέργειας, ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης; ($\pi^2 \simeq 10$)

(**Απ.** α) 6,25 cm β) 0,25 Joule γ) 8,8 cm)

14. Ένα ιδανικό ελατήριο είναι κατακόρυφο, στερεωμένο με το ένα του άκρο από ακλόνητο σημείο, ενώ στο άλλο του άκρο υπάρχει σώμα μάζας m. Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας κατά x_0 και αφεθεί ελεύθερο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ν. Κατόπιν επαναλαμβάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία αντικαθιστώντας το σώμα με άλλο μάζας 2m. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

1.α) Η ενέργεια του συστήματος ελατήριο-μάζα είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις
β) Η συχνότητα και στις δυο περιπτώσεις είναι ίδια
2.α) Η ενέργεια του συστήματος στην πρώτη περίπτωση είναι μικρότερη
β) Η συχνότητα στην πρώτη περίπτωση είναι μικρότερη.
3.α) Η ενέργεια στην πρώτη περίπτωση είναι μικρότερη
β) Η συχνότητα στην πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερη.
4.α) Η ενέργεια και στις δυο περιπτώσεις είναι ίδια
β) Η συχνότητα στην πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερη.

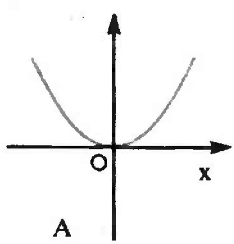
(**Απ.** σωστή είναι η 4)

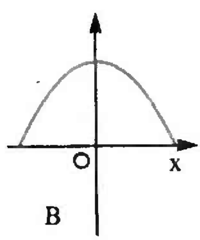
15) Εάν το πλάτος x_0 της ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή υποδιπλασιαστεί, ποιες μεταβολές συμβαίνουν:

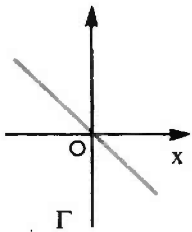
α) Στην περίοδο;
β) Στη μέγιστη ταχύτητα;
γ) Στην ολική ενέργεια;
δ) Στη μέγιστη επιτάχυνση;

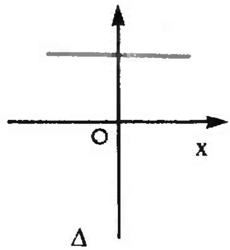
16) Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν τη μεταβολή κάποιας παραμέτρου ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση,σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x.

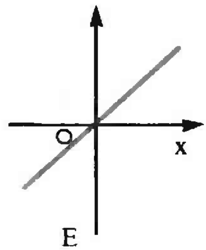
Ποια από αυτές αποδίδει τη μεταβολή:











α) Της επιτάχυνσης
β) Της δυναμικής ενέργειας
γ) Της κινητικής ενέργειας
δ) Της ολικής ενέργειας

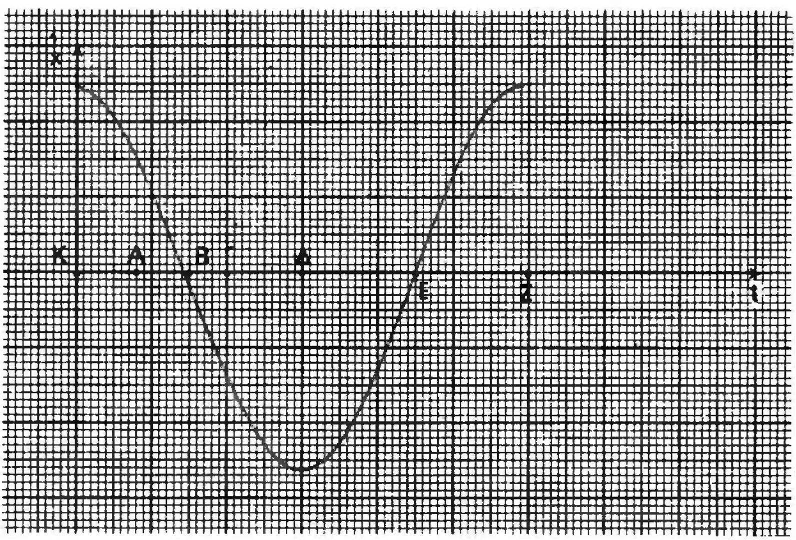
17) Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για την οποία τη χρονική στιγμή μηδέν είναι $x = x_0$ και η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι αυτή που εικονίζεται στο σχήμα.

α) Τοποθετείστε τις ταχύτητες που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές Α,Β,Γ,Δ. έτσι ώστε αρχίζοντας από τη μεγαλύτερη να καταλήξετε στη μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή.

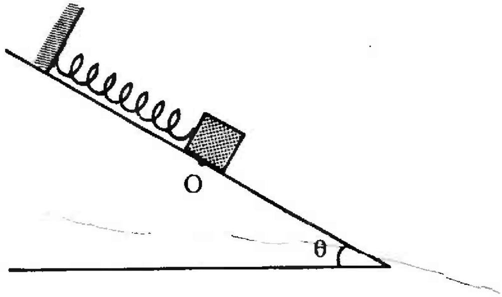
β) Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στις ταχύτητες που αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές Β και Ε, καθώς και στις χρονικές στιγμές Δ και Ζ;

γ) Σε ποιες από τις χρονικές στιγμές Κ έως Ζ ή γ είναι μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή;

δ) Να εκφράσετε τα χρονικά διαστήματα ΚΒ, ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, ΒΕ και ΔΖ ως συνάρτηση της περιόδου Τ.



18) Ένα σώμα μάζας m ισορροπεί πάνω σ' ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο με τη βοήθεια ελατηρίου σταθεράς K όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν το σώμα απομακρυνθεί λίγο από τη θέση ισορροπίας O και κατόπιν αφεθεί ελεύθερο, δείξτε ότι θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και βρείτε την περίοδο T.



$\left(\textbf{Απ.}\ 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\right)$

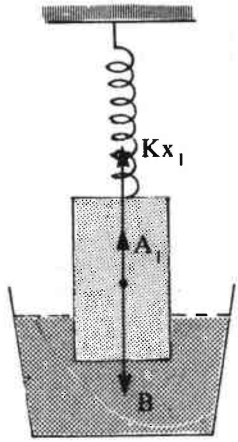
19) Κύλινδρος βάρους B και διατομής S εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς K, το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο.

Το κάτω άκρο του κυλίνδρου βυθίζεται σε υγρό ειδικού βάρους ε. Εκτρέπουμε τον κύλινδρο κατακόρυφα προς τα κάτω ώστε να βυθιστεί λίγο περισσότερο στο υγρό και τον αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να δειχτεί ότι ο κύλινδρος θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β) Να βρεθεί η περίοδος T της ταλάντωσης.

Δίνεται το g και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.



$\left(\textbf{Απ.}\ 2\pi\sqrt{\frac{B}{g(K+\varepsilon S)}}\right)$

20) Η απομάκρυνση x σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $x = x_0 ημωt$. Αν η τριβή F που αντιστέκεται στην ταλάντωση είναι $F = -bυ$ όπου b η σταθερά απόσβεσης, να βρεθεί η ενέργεια που πρέπει να προσφέρεται μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης, ανά κύκλο, για να διατηρείται αμείωτη η ταλάντωση.

(**Απ.** $\pi b x_0^2 \omega$)

21) Όταν σε ένα αυτοκίνητο εισέρχονται τέσσερις επιβάτες συνολικής μάζας 360 Kgr, τότε τα ελατήρια του συστήματος ανάρτησης συμπιέζονται κατά 4cm. Η συνολική μάζα συμπεριλαμβανομένων και των επιβατών που υποβαστάζεται από το σύστημα ανάρτησης είναι 900 Kgr. Αν υποθέσουμε ότι η συμπίεση των ελατηρίων είναι ανάλογη προς τη δύναμη που τα συμπιέζει, υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης του αυτοκινήτου, όταν οι επιβάτες είναι μέσα $g=10$ m/sec^2.

(**Απ.** 0,628 sec)

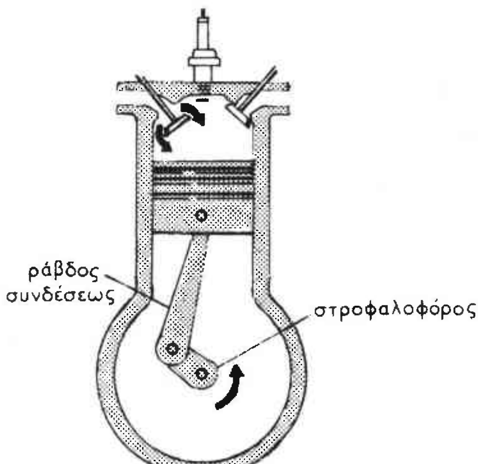
22) Το έμβολο μιας μηχανής αυτοκινήτου, όταν το όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα, μπορεί να θεωρηθεί ότι κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η μάζα του εμβόλου είναι 0,7 Kgr και αυτό συνδέεται με το στροφαλοφόρο μέσω ελαφριάς άκαμπτης μεταλλικής ράβδου. Η απόσταση του άκρου της ράβδου από τον άξονα του στροφαλοφόρου είναι 50mm και ο στροφαλοφόρος εκτελεί 3600 περιστροφές ανά πρώτο λεπτό.

1) Υπολογίστε με τη βοήθεια του σχήματος το πλάτος της ταλάντωσης του εμβόλου.

2) Γράψτε την έκφραση της απομάκρυνσης του εμβόλου από το μέσο της διαδρομής του.

3) Υπολογίστε την μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια της διαδρομής του εμβόλου.

4) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της δύναμης που επιταχύνει το έμβολο κατά τη διάρκεια της διαδρομής.



23) Σε κάποια πόλη ο ήλιος ανατέλει στις 6 το πρωί, φτάνει στο ζενίθ στις 12 το μεσημέρι και δύει στις 6 το απόγευμα. Η θερμοκρασία είναι $15^{o}C$ κατά την ανατολή και τη δύση του ήλιου και το μεσημέρι φτάνει στους $25^{o}C$. Δεχόμαστε κατά

προσέγγιση ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας από την ανατολή ως τη δύση είναι μισός κύκλος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης.
Με βάση την προσέγγιση αυτή:

α) Σχεδιάστε τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε συνάρτηση με το χρόνο, από την ανατολή ως τη δύση και γράψτε την εξίσωση που την περιγράφει.

β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 9 π.μ.;

γ) Αν κάποιος τύπος μέλισσας βγαίνει για συλλογή τροφής, όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι μεγαλύτερη η ίση από 17°C, πόσες ώρες την ημέρα θα συλλέγει τροφή αυτή η μέλισσα;

(Απ. β) 22°C γ) 10h 24 min)

24) Ο χημικός δεσμός στο μόριο του HCl μπορεί να θεωρηθεί σαν «ελατήριο» που στα άκρα του είναι στερεωμένες οι μάζες των ιόντων του H και του Cl. Η μάζα του ιόντος του Cl (και για τα δυο ισότοπα ^{35}Cl ή ^{37}Cl) είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του H. Συνεπώς η πολύ μεγαλύτερη αδράνειά του μας επιτρέπει να δεχθούμε ότι το ιόν του Cl μένει ακίνητο, ενώ το ιόν του H κινείται μέσω του «ελατηρίου» που τα συνδέει. Η κίνηση του ιόντος του H είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Πειραματικά βρέθηκε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του ιόντος του H είναι $\nu = 3{,}0910^{13}$Hz. Με βάση τα παραπάνω:

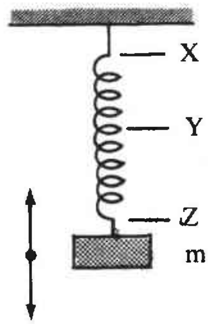
α) σχεδιάστε το πρότυπο του μορίου.

β) υπολογίστε τη σταθερά του «ελατηρίου».

γ) πόσο θα μεταβληθεί η συχνότητα ταλάντωσης, αν το H αντικατασταθεί από το ισότοπό του δευτέριο.

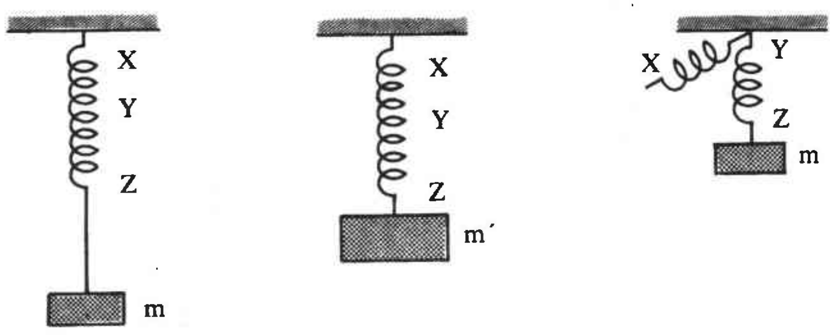
Δίνεται η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1{,}7\ 10^{-27}$Kgr

25) Ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας ν_o κρεμασμένο από ελατήριο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το ίδιο ελατήριο χρησιμοποιείται στα ακόλουθα πειράματα:

Στο πείραμα (1) στο σημείο Z δένεται μη εκτατό νήμα και στο άκρο του εξαρτιέται πάλι το σώμα m.



Στο πείραμα (2) από το ίδιο ελατήριο εξαρτιέται σώμα μεγαλύτερης μάζας m'. Στο πείραμα (3) το ελατήριο στερεώνεται με το μέσο του Υ από το ακλόνητο στήριγμα και στο άκρο Ζ κρέμεται πάλι το σώμα μάζας m. Σε ποιο από τα τρία πειράματα η συχνότητα ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από ν_o;

26) Σώμα μάζας 0,2 Kgr δένεται στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος που έχει μήκος $l = 0,65$m και του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτρέπεται κατά 0,25 m από την κατακόρυφο και αφήνεται ελεύθερο.

α) Πόση είναι η αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος.

β) Πόση είναι η μέγιστη ταχύτητα του σώματος και που εμφανίζεται;

γ) Υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης θεωρώντας ότι αυτή είναι απλή αρμονική με τους εξής τρόπους.

1) Χρησιμοποιώντας τη σχέση.

$$\upsilon^2 = \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

και αντικαθιστώντας τη μέγιστη ταχύτητα που υπολογίσατε

II) Χρησιμοποιώντας τον τύπο

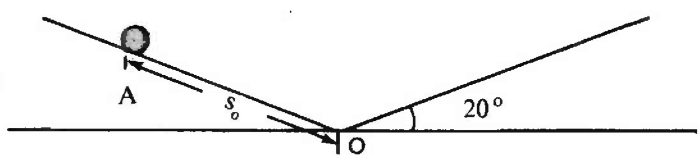
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Εξηγείστε τη διαφορά στα δυο αποτελέσματα.
Δίνεται $g = 9,8$ m/sec^2 και ότι το νήμα έχει σταθερό μήκος.

(**Απ.** α) 9,8 10^{-2}Joule β) 0,99 m/sec
γ) I. 1,585 sec II. 1,617 sec)

27) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα τοποθετείται σε απόσταση $s_o = 98$ mm από την κοινή αρχή Ο δυο κεκλιμένων επιπέδων που σχηματίζουν γωνίες 20° με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν τριβές, τι είδους κίνηση θα εκτελέσει η σφαίρα όταν αφεθεί ελεύθερη; Υπολογίστε την περίοδο αυτής της κίνησης. Εξηγείστε γιατί η κίνηση της σφαίρας δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνεται $g = 9,8$ m/sec^2.



12
Κύματα

12.1. Γενικά

Κύμα ονομάζεται κάθε διαταραχή που μεταφέρει ενέργεια και ορμή με ορισμένη ταχύτητα που λέγεται ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Όπως γνωρίζουμε για να παραχθεί ένα κύμα απαιτείται μια πηγή η οποία να εκτελεί ταλαντώσεις. Στην περίπτωση που οι ταλαντώσεις αυτές είναι απλές αρμονικές το παραγόμενο κύμα λέγεται **αρμονικό κύμα.**

Τα κύματα διακρίνονται σε δυο* βασικές κατηγορίες: Σε εκείνα που μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και λέγονται **μηχανικά κύματα** και σε αυτά που μεταφέρουν ενέργεια ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και λέγονται **ηλεκτρομαγνητικά κύματα.** Τα μηχανικά κύματα διαδίδονται σε υλικά μέσα, ενώ τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται και στο κενό με ταχύτητα $c = 3 \ 10^8$ m/sec όση είναι η ταχύτητα του φωτός.

Εκείνο που πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα είναι ότι κατά τη διάδοση του μηχανικού κύματος μεταφέρεται μηχανική ενέργεια από σημείο σε σημείο του μέσου χωρίς να γίνεται μεταφορά ύλης. Δηλαδή τα μόρια του μέσου παραμένουν στη θέση τους και ταλαντώνονται γύρω από τη θέση της ισορροπίας τους, ενώ η ενέργεια και η ορμή τους μεταφέρονται από το ένα μόριο στο άλλο.

Τα αποτελέσματα των πιο γνωστών μορφών κυμάτων φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Κατηγορία κυμάτων	Φύση της διαταραχής	Πιθανό αποτέλεσμα
Υδατηρά	Τα μόρια του νερού κάνουν περιοδική κίνηση	Ένα σώμα που επιπλέει στο νερό ταλαντώνεται
Ηχητικά	Τα μόρια του αέρα σχηματίζουν πυκνώματα και αραιώματα	Το διάφραγμα ενός μικροφώνου ταλαντώνεται
Σεισμικά	Εγκάρσια κίνηση του υλικού του φλοιού της γης	Καταρρέουν οι οικοδομές
Ηλεκτρομαγνητικά	Περιοδική μεταβολή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου	Διεγείρουν τον αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού

Όπως είναι γνωστό η ταχύτητα υ του κύματος συνδέεται με τη συχνότητα

* Σήμερα είναι υπό έρευνα και τα κύματα βαρύτητας που δεν ανήκουν στις δυο παραπάνω κατηγορίες.

ν και το μήκος κύματος λ με τη σχέση

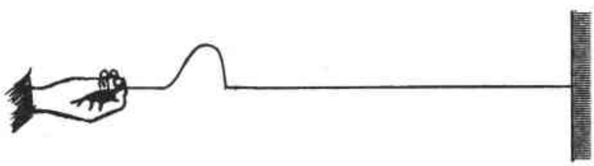
$$\boxed{\upsilon = \lambda \ \nu} \qquad (12.1)$$

Η συχνότητα του κύματος αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της πηγής η οποία εκτελεί τις ταλαντώσεις και δεν εξαρτάται από το μέσον μέσα στο οποίο γίνεται η διάδοση του κύματος. Έτσι αν ένα κύμα αλλάζει μέσον διάδοσης τότε θα μεταβληθεί η ταχύτητά του και όπως προκύπτει από τη σχέση (12.1) θα αλλάξει το μήκος κύματος λ.

Τα μηχανικά κύματα διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

Α. Γραμμικά κύματα

Τα κύματα αυτά διαδίδονται μόνο σε μια κατεύθυνση. Π.χ. αν το ελεύθερο άκρο ενός σχοινιού, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο, το κινήσουμε απότομα κάθετα προς το νήμα και το επαναφέρουμε στην αρχική θέση του, τότε κατά μήκος του σχοινιού διαδίδεται ένα κύμα, σχ. 12.1.



Σχ. 12.1

Β. Επιφανειακά κύματα

Αν στην επιφάνεια ενός υγρού που ηρεμεί προκαλέσουμε μικρή διαταραχή τότε δημιουργούνται κύματα που με μορφή συγκεντρικών κύκλων διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ορισμένη ταχύτητα. Τα κύματα αυτά λέγονται επιφανειακά κύματα, σχ. 12.2.

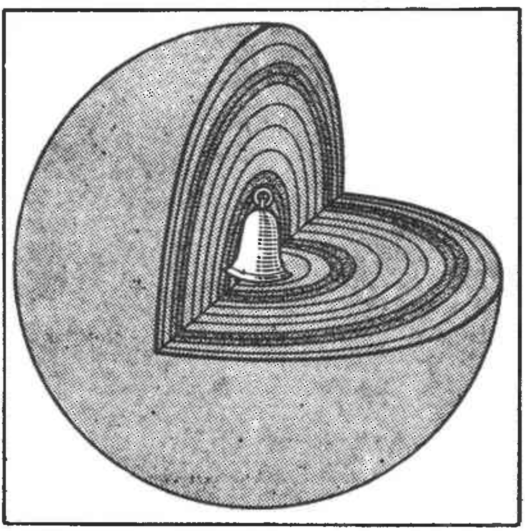


Σχ. 12.2 Επιφανειακά κύματα.

Γ. Κύματα χώρου

Τα κύματα που διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις ενός υλικού μέσου ονομάζονται κύματα χώρου.

Το κύμα π.χ. που δημιουργείται από την κρούση του κουδουνιού είναι κύμα χώρου, σχ. 12.3.

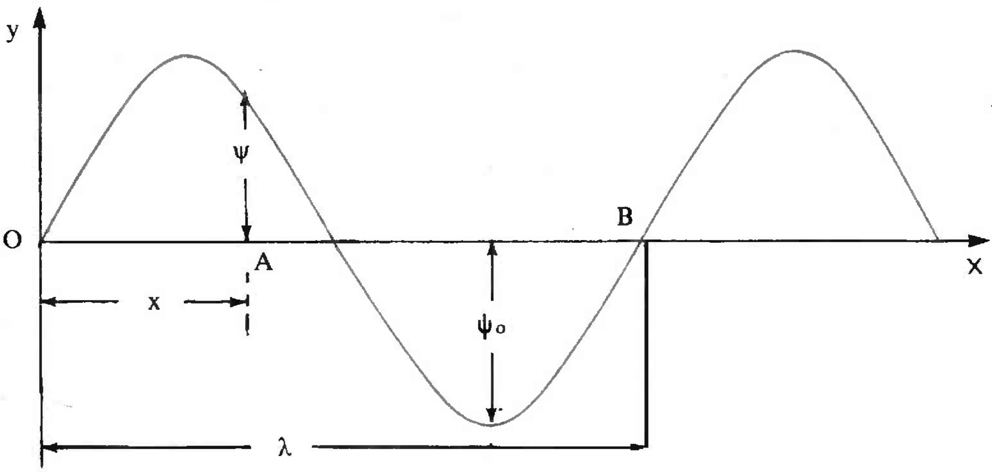


Σχ. 12.3. Ηχητικά κύματα που διαδίδονται στο χώρο.

12.2. Εξίσωση του αρμονικού κύματος

Όπως αναφέραμε, για να δημιουργηθεί ένα κύμα θα πρέπει η πηγή να εκτελεί ταλαντώσεις. Έστω ότι το σημείο Ο (σχ. 12.4) είναι μια πηγή κυμάτων και ότι αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας ν.

Η απομάκρυνση του Ο από τη θέση της ισορροπίας θα είναι της μορφής $y = y_o ημωt$, όπου y_o το πλάτος της ταλάντωσης, ωt η φάση και $ω = 2πν$ η κυκλική συχνότητα.



Σχ. 12.4

Αν το κύμα που παράγεται διαδίδεται προς τα δεξιά, τότε η φάση ενός σημείου Α του μέσου, που βρίσκεται σε απόσταση x από την πηγή, θα υστερεί της φάσης της πηγής κατά γωνία φ. Η απομάκρυνση y του σημείου Α θα δίνεται από τη σχέση

$$y = y_o ημ(ωt - φ)$$

ή

$$y = y_o ημ\left(\frac{2π}{T}t - φ\right) \tag{12.2}$$

Όπως όμως είναι γνωστό η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Ο και Β, τα οποία απέχουν απόσταση λ, είναι 2π. Κατά συνέπεια η διαφορά φάσης φ μεταξύ των σημείων Ο και Α, τα οποία απέχουν απόσταση x, θα είναι:

$$φ = 2π\frac{x}{λ} \tag{12.3}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (12.2) παίρνουμε

$$y = y_o \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

ή

$$\boxed{y = y_o \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)} \quad (12.4)$$

Η σχέση (12.4) αποτελεί την εξίσωση του αρμονικού κύματος. Η φάση του κύματος $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ είναι συνάρτηση τόσο του χρόνου t όσο και της απόστασης x από την πηγή. Επειδή $\nu = \frac{1}{T}$ και $\nu = \frac{\upsilon}{\lambda}$ η σχέση αυτή γράφεται και με τη μορφή

$$y = y_o \eta\mu \frac{2\pi}{\lambda} (\upsilon t - x) \quad (12.5)$$

Αν το κύμα διαδίδεται αντίθετα, δηλαδή από το Α προς το Ο, τότε η (12.4) γράφεται

$$y = y_o \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (12.6)$$

Από τη σχέση (12.4) προκύπτει ότι η εξίσωση του αρμονικού κύματος περιέχει δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, το χρόνο t και την απόσταση x από την πηγή.

Για να μελετήσουμε την απομάκρυνση y που έχουν τα διάφορα σημεία του μέσου σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t, γράφουμε την εξίσωση (12.4) ως εξής:

$$y = y_o \eta\mu 2\pi \left(\kappa - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (12.7)$$

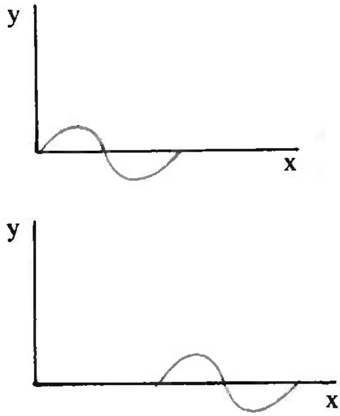
όπου $\kappa = \frac{t}{T}$ = σταθερό.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η απομάκρυνση y των διαφόρων σημείων του μέσου, είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της απόστασης x των σημείων αυτών από την πηγή. Στο σχήμα 12.5 φαίνονται οι θέσεις των σημείων του μέσου, τα οποία βρίσκονται στον άξονα x, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή και αποτελούν το **στιγμιότυπο** του κύματος. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή το στιγμιότυπο είναι μετατοπισμένο προς τα δεξιά.

Για να μελετήσουμε την απομάκρυνση y που έχει ένα ορισμένο σημείο του μέσου, που βρίσκεται σε απόσταση x, τις διάφορες χρονικές στιγμές, γράφουμε την εξίσωση (12.4) ως εξής:

$$y = y_o \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \Lambda \right) \qquad (12.8)$$

όπου $\Lambda = \frac{x}{\lambda}$ = σταθερό.



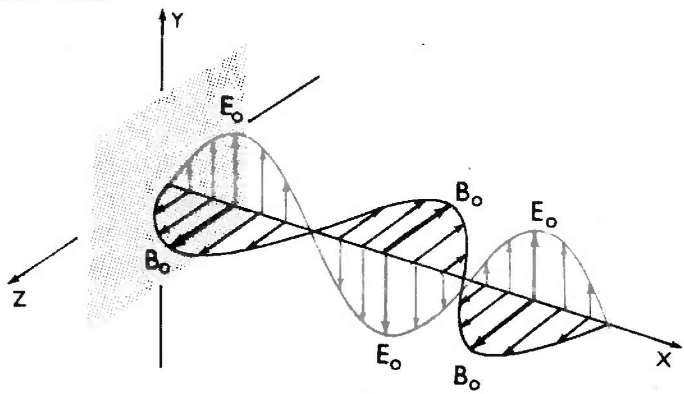
στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1

στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 ($t_2 > t_1$)

Σχ. 12.5

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η απομάκρυνση y ενός σημείου του μέσου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 8.10 το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται από ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό και ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Ένα στιγμιότυπο αρμονικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος φαίνεται στην εικόνα 12.6.



Σχ. 12.6

Από την εικόνα φαίνεται ότι τα δύο κύματα, ηλεκτρικό και μαγνητικό, είναι εγκάρσια και ότι αν συγκριθούν με το μηχανικό κύμα του σχ. 12.4 υπάρχουν μεταξύ τους τυπικές αναλογίες. Έτσι π.χ. στο μηχανικό κύμα μεταβάλλεται η απομάκρυνση με την απόσταση ενώ στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό κύμα μεταβάλλεται η ένταση του πεδίου. Άρα σε πλήρη αναλογία με τη σχέση 12.4 μπορούμε να γράψουμε για τις εξισώσεις των δύο κυμάτων.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_o ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$$

$$B = B_o ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right)$$

Στην πρώτη εξίσωση $\mathcal{E}$ είναι το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\mathcal{E}_o$ το πλάτος της και στη δεύτερη B είναι το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής και B_o το πλάτος της.

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος

$$y = y_o ημ\left(1000πt - \frac{100π\ x}{17}\right)$$

Να υπολογιστούν

α) το μήκος του κύματος
β) η ταχύτητα του κύματος
γ) η συχνότητα ν της πηγής που παράγει το κύμα.
δ) η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων τα οποία απέχουν 2m.

Λύση

α) Από τη σύγκριση της παραπάνω εξίσωσης με την (12.5) προκύπτουν

$$1000π = \frac{2π}{λ}\ υ \quad (α) \quad και \quad \frac{100π}{17} = \frac{2π}{λ} \quad (β)$$

Από την εξίσωση (β) έχουμε: $λ = 0{,}34m$

β) Αντικαθιστώντας την τιμή του λ στην εξίσωση (α) προκύπτει για την ταχύτητα υ

$$υ = \frac{1000\ 0{,}34}{2}\ m/sec$$

$$υ = 170\ m/sec$$

γ) η συχνότητα ν θα υπολογιστεί από τη σχέση $\nu = \frac{\upsilon}{\lambda}$ ή $\nu = \frac{170\,m/sec}{0{,}34\,m}$ ή $\nu = 500$ Hz.

δ) Όταν δύο σημεία του μέσου απέχουν ένα μήκος κύματος παρουσιάζουν διαφορά φάσης 2π, κατά συνέπεια όταν η απόσταση είναι 2m η διαφορά φάσης φ θα είναι:

$\varphi = 2\pi \frac{2}{0{,}34}$ rad ή $\varphi = 11{,}76\ \pi$ rad.

12.3. Ένταση του κύματος 1994

Η ενέργεια που δίνει η πηγή μιας διαταραχής μεταφέρεται μέσω του κύματος στο χώρο. Για να υπολογίσουμε την ενέργεια αυτή ορίζουμε το φυσικό μέγεθος που λέγεται **ένταση του κύματος.**

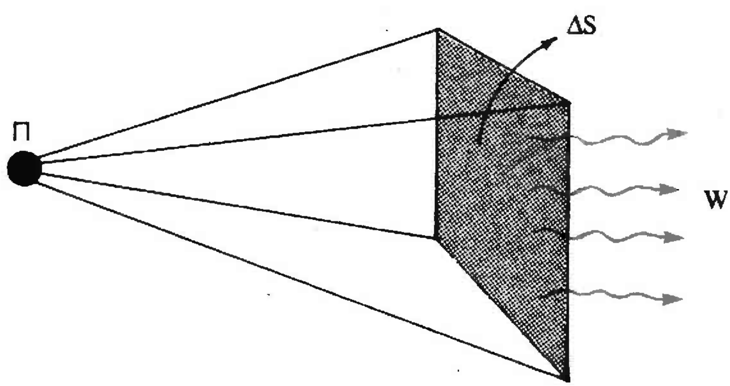
Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού ΔS, σχ. 12.7, κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και κατά συνέπεια και στην ταχύτητά του. Αν σε χρόνο Δt διέρχεται από το ΔS ενέργεια κύματος W, τότε ορίζουμε ως ένταση I του κύματος την ποσότητα

$$I = \frac{W}{\Delta S\ \Delta t} \qquad (12.9)$$

ή

$$I = \frac{P}{\Delta S}$$

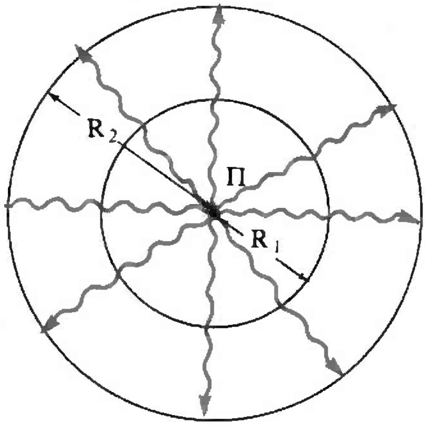
όπου P είναι η ισχύς του κύματος. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η μονάδα έντασης είναι το 1 Watt/m^2.



Σχ. 12.7

Η ένταση του κύματος μειώνεται όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή. Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ της έντασης και της απόστασης σκεπτόμαστε ως εξής. Θεωρούμε μια σημειακή πηγή Π, σχ. 12.8, που παράγει κύματα τα οποία διαδίδονται στο χώρο. Από τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R_1 διέρχεται σε χρόνο Δt ενέργεια W.

Είναι φανερό ότι η ίδια ενέργεια W θα περάσει μέσω του κύματος στον ίδιο χρόνο Δt και από τη σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R_2.



Σχ. 12.8

Η ένταση I_1 και I_2 του κύματος σε απόσταση R_1 και R_2 από τη πηγή θα είναι αντίστοιχα:

$$I_1 = \frac{W}{4\pi R_1^2 \Delta t} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{W}{4\pi R_2^2 \Delta t}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \qquad (12.10)$$

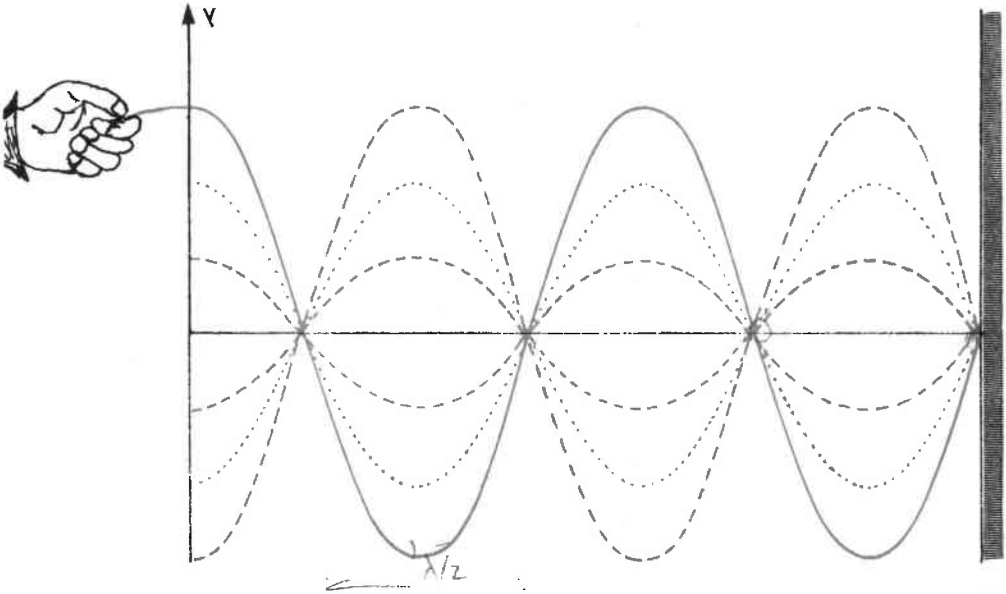
Από τη σχέση (12.10) φαίνεται ότι η ένταση του κύματος μεταβάλλεται αντίστροφα ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τη πηγή που παράγει το κύμα.

1996

12.4. Στάσιμα κύματα

Αν το ελεύθερο άκρο του σχοινιού του σχ. 12.1 το μετακινούμε πάνω-κάτω με σταθερή συχνότητα, τότε θα δημιουργηθεί κατά μήκος του σχοινιού μια διαταραχή, σχ. 12.9, της οποίας η μορφή εξηγείται ως εξής. Με την κίνηση του

ελεύθερου άκρου διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού προς τα δεξιά ένα κύμα το οποίο ανακλάται στο ανένδοτο άκρο του τοίχου και επιστρέφει προς τα αριστερά. Το προς τα αριστερά κινούμενο κύμα, λόγω ανάκλασης, συναντάται με το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά, ένεκα της κίνησης του χεριού. Η συνάντηση (συμβολή) αυτών των δυο όμοιων κυμάτων δημιουργεί τη διαταραχή του σχ. 12.9 η οποία λέγεται **στάσιμο κύμα.**



Σχ. 12.9. Στάσιμο κύμα

Δηλαδή στάσιμο κύμα είναι το αποτέλεσμα της συμβολής δυο κυμάτων που έχουν την ίδια ταχύτητα, την ίδια συχνότητα, το ίδιο πλάτος και διαδίδονται πάνω στην ίδια διεύθυνση αλλά κατά αντίθετες φορές.

Για να βρούμε την εξίσωση που περιγράφει το στάσιμο κύμα σκεπτόμαστε ως εξής:

Το προς τα δεξιά κινούμενο κύμα, σύμφωνα με τη σχέση (12.4), περιγράφεται από την εξίσωση

$$y_1 = y_o \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \tag{12.11}$$

Το προς τα αριστερά κινούμενο κύμα, που προέρχεται από ανάκλαση, περιγράφεται από την εξίσωση

$$y_2 = y_o \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \tag{12.12}$$

με το ίδιο πλάτος y_o και την ίδια περίοδο T.

Τα δυο κύματα συναντώνται (συμβάλλουν) και το αποτέλεσμα της συμβολής είναι η απομάκρυνση y να δίνεται από το άθροισμα των απομακρύνσεων των δυο κυμάτων, δηλαδή

$$y = y_1 + y_2 \qquad (12.13)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (12.11), (12.12) και την τριγωνομετρική ταυτότητα.

$$ημα + ημβ = 2ημ\left(\frac{α+β}{2}\right) συν\left(\frac{α-β}{2}\right)$$

η σχέση (12.13) δίνει

$$\boxed{y = 2y_o συν2π\frac{x}{λ}\, ημ\frac{2π}{T}t} \qquad (12.14)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει το στάσιμο κύμα. Κάθε σημείο του σχοινιού ταλαντώνεται ημιτονοειδώς ως προς το χρόνο με πλάτος $2y_o συν2π\frac{x}{λ}$ που εξαρτάται από τη θέση του σημείου αυτού, δηλαδή από την απόσταση x από την πηγή του κύματος (δηλαδή το χέρι μας). Υπάρχουν σημεία πάνω στο σχοινί που είναι ακίνητα και λέγονται **δεσμοί** και σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $2y_o$ και λέγονται **κοιλίες**. Τα άλλα σημεία του σχοινιού ταλαντώνονται με πλάτος μεταξύ 0 και $2y_o$. Π.χ. δεσμοί είναι τα σημεία που ικανοποιούν τη σχέση

$$2y_o συν2π\frac{x}{λ} = 0$$

από την οποία παίρνουμε

$$2π\frac{x}{λ} = (2n+1)\frac{π}{2}$$

ή

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{λ}{4}} \qquad n = 0,1,2,...$$

Δηλαδή κάθε σημείο του σχοινιού που απέχει από το χέρι μας περιττό αριθμό $\frac{λ}{4}$ είναι δεσμός.

Το κύμα που περιγράψαμε ήταν ένα γραμμικό εγκάρσιο στάσιμο κύμα. Αλλά στάσιμα κύματα μπορούν να παρατηρηθούν και σε άλλες περιπτώσεις όπως π.χ. σε διαμήκη σαν τον ήχο.

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για το κύμα στην παράγραφο 12.1, το στάσιμο κύμα επειδή έχει την ενέργειά του εντοπισμένη σε περιορισμένο χώρο και δε τη μεταφέρει, γι' αυτό καταχρηστικώς ονομάζεται κύμα.

Ασκήσεις

1) Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y = y_0 ημ(ωt - kx)$.

α) Βρείτε τη σχέση που συνδέει το k με το μήκος κύματος λ.

β) Αν $y_0 = 1\ 10^{-7}$ m, $ω = 6{,}6\ 10^3 sec^{-1}$ και $k = 20\ m^{-1}$, υπολογίστε την ταχύτητα του κύματος και τη μέγιστη ταχύτητα ενός σωματιδίου του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

(**Απ.** α) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ β) 330 m/sec, $6{,}6\ 10^{-4}$ m/sec)

2) Ένα μικρό κομμάτι φελλού σε μια δεξαμενή με νερό ταλαντεύεται πάνω κάτω υπό την επίδραση επιφανειακού κύματος το οποίο δεχόμαστε ότι είναι εγκάρσιο με εξίσωση

$$y = 10\ ημπ(2t - 0{,}01x),$$

όπου τα x και y εκφράζονται σε cm και το t σε sec.

α) Υπολογίστε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα του κύματος.

β) Υπολογίστε τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα την οποία αποκτά ο φελλός.

(**Απ.** α) 10 cm, 1 sec, 200 cm, 200 cm/sec β) 62,8 cm/sec)

3) Μια μικρή πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων Π εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα μήκους κύματος λ τα οποία ανιχνεύονται από μια κατακόρυφη κεραία Κ. Η κεραία συνδέεται με κατάλληλο όργανο που δίνει ενδείξεις για την ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας α) Αρχικά η απόσταση κεραίας - πηγής (ΚΠ), είναι ίση με d. Όταν η απόσταση ΚΠ διπλασιαστεί η ένδειξη του οργάνου είναι το 1/4 της αρχικής. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

β) Ποια περιμένετε να είναι η ένδειξη του οργάνου αν η απόσταση ΚΠ γίνει ίση με 3d;

γ) Μια μεταλλική επιφάνεια που ανακλά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τοποθετείται πίσω από την κεραία με το επίπεδό της κάθετο στο επίπεδο κεραίας - πηγής. Βρίσκεται ότι καθώς η μεταλλική επιφάνεια κινείται αργά απομακρυνόμενη από την κεραία, το όργανο δίνει διαδοχικές ενδείξεις μέγιστης και ελάχιστης έντασης. Με λίγα λόγια εξηγείστε πού οφείλεται αυτό.

δ) Αν η απόσταση που πρέπει να μετακινηθεί η μεταλλική επιφάνεια, ώστε να έχουμε δύο διαδοχικές ενδείξεις ελάχιστης έντασης είναι 1,5 cm, *πόση είναι η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος; Δίνεται* $c = 3\ 10^8$ m/sec.

13
Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας



Albert Einstein (1879-1955)

Ο Einstein υπήρξε ο γίγαντας της επιστημονικής διανόησης των τελευταίων αιώνων σφραγίζοντας τον αιώνα μας με τις θεωρίες του (αιώνας του ατόμου).

Γεννημένος το 1879 στο Ουλμ της Γερμανίας είχε μια συνηθισμένη παιδική ηλικία. Μέχρι τα εννιά του χρόνια δεν μπορούσε να μιλήσει με ευχέρεια. Το περιβάλλον του δεν έβλεπε μέλλον σ' αυτόν.

Απεχθανόταν την αυστηρή πειθαρχία και την αυθεντικότητα του τρόπου διδασκαλίας των γερμανικών σχολείων της εποχής εκείνης. Μέσα στην τάξη είχε μια αδιάφορη παρουσία με διαλυτική επιρροή που έκανε τους καθηγητές του να του ζητούν να εγκαταλείψει το σχολείο, πράγμα που έκανε στα 15 χρόνια του.

Από τα 15 του χρόνια άρχισε μόνος του να ασχολείται με ενδιαφέρον με τη γεωμετρία την άλγεβρα και το λογισμό.

Το 1900 αποφοίτησε από το ομοσπονδιακό ινστιτούτο τεχνολογίας της Ζυρίχης χωρίς καμμιά ιδιαίτερη διάκριση.

Η χαμηλή ακαδημαϊκή του επίδοση τον εμπόδισε να βρει μια καλή δουλειά. Μετά από μια περίοδο χωρίς ικανοποίηση και κατά την οποία προσπαθούσε να εξοικονομήσει τα προς το ζην παραδίνοντας μαθήματα, βρήκε μια θέση στο Ελβετικό γραφείο ευρεσιτεχνιών της Βέρνης. Μια θέση αζήτηση με χαμηλό μισθό και μικρό ενδιαφέρον. Εκεί όμως είχε αρκετό χρόνο στη διάθεσή του για να αφοσιωθεί στις επιστημονικές του ανησυχίες.

Το 1905 σε ηλικία 26 ετών, ο Einstein απογειώθηκε επιστημονικά, δημοσιεύοντας τρεις εργασίες του πάνω στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, την κίνηση Brown και την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Το 1916 δημοσίευσε τη γενική θεωρία της σχετικότητας που είναι ακόμα και σήμερα πεδίο έρευνας της επιστημονικής κοινότητας. Το 1921 πήρε το βραβείο Nobel όχι για τη σχετικότητα! αλλά για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Ο Einstein πίστευε ότι τη φύση κυβερνούν νόμοι απλοί και ότι ο κόσμος διέπεται από αρμονία και δεν είναι γέννημα της τύχης. «Δεν μπορώ να πιστέψω», έλεγε, «πως ο Θεός παίζει ζάρια με τον κόσμο». Αυτή η απλότητα ήταν φανερή και στην προσωπική του ζωή από τα ρούχα που φόραγε μέχρι τη συμπεριφορά του. Εβραίος την καταγωγή και ένθερμος φίλος της δημοκρατικής διακυβέρνησης, κυνηγήθηκε από τους Ναζί και το 1933 μετανάστευσε στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Φιλειρηνιστής στη φύση του ασχολήθηκε με τα μεγάλα προβλήματα της εποχής μας, όπως η παγκόσμια ειρήνη και τα οξύτατα πολιτικοκοινωνικά προβλήματα. Στα τελευταία του χρόνια ασχολήθηκε ανεπιτυχώς με τη μεγάλη ιδέα του της ενοποίησης των φυσικών δυνάμεων.

«Newton, *συγχώρεσέ με*»

Einstein

Γενικά

Στις αρχές του εικοστού αιώνα έγιναν δυο κοσμογονικές αλλαγές (άλματα) στην πορεία της φυσικής με τρομερές συνέπειες στη ζωή και στη σκέψη. Η μια επαναστατική αλλαγή ήταν το αποτέλεσμα της συστηματικής εργασίας πολλών και προικισμένων επιστημόνων (Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg, Dirac, Born κ.ά.) και προκάλεσε την ανάπτυξη της κβαντικής φυσικής της οποίας βασική αρχή είναι ότι μερικά μεγέθη στη φύση παίρνουν όχι συνεχείς αλλά διάκριτες τιμές.

Το δεύτερο άλμα στη φυσική, που προηγήθηκε χρονικά του πρώτου, αποτελεί η θεωρία της σχετικότητας καί είναι τελικά έργο ενός μόνον ανθρώπου, του Albert Einstein. Η θεωρία της σχετικότητας είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρώπινου νου δια μέσου των αιώνων και εμφανίστηκε με τη μορφή της «ειδικής θεωρίας της σχετικότητας»* και της «γενικής θεωρίας της σχετικότητας».

* Η θεωρία αυτή δημοσιεύθηκε σε γερμανικό περιοδικό το 1905 με τον τίτλο "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Περί της ηλεκτροδυναμικής κινουμένων σωμάτων).

Κριτήριο ορθότητας κάθε φυσικής θεωρίας είναι η πειραματική επαλήθευση. Κάθε θεωρία που ερμηνεύει μια σειρά φυσικών φαινομένων γίνεται αποδεκτή, ενώ κάθε άλλη που αντιβαίνει στο πείραμα απορρίπτεται ή αναθεωρείται. Η κλασική φυσική (αυτή που διδαχτήκαμε ως τώρα στα σχολεία) είναι η χθεσινή αλήθεια, που σήμερα αποτελεί μια προσέγγιση, γιατί σε μερικά φαινόμενα δίνει σχεδόν ακριβείς απαντήσεις ενώ σε άλλα οι απαντήσεις της αποκλίνουν πολύ από την πραγματικότητα. Η νεώτερη φυσική είναι αυτή που σήμερα πιστεύουμε ότι ερμηνεύει τη φύση, δηλαδή η σημερινή αλήθεια. Η κβαντική θεωρία μαζί με τη θεωρία της σχετικότητας οριοθετούν την κλασική από τη νεώτερη φυσική. Είναι δυο ξεχωριστές θεωρίες που τα αποτελέσματα της μιας μπορεί να μελετηθούν ερήμην της άλλης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν σε συντομία τα συμπεράσματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας η οποία επιβεβαιώνεται καθημερινά. Σήμερα **όλα** τα πειράματα και τα συμπεράσματα από τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης στους μεγάλους σύγχρονους επιταχυντές, επαληθεύουν την ορθότητα της θεωρίας αυτής. Ο Einstein κάποτε είπε «δεν υπάρχει αριθμός πειραμάτων που να μπορεί να βεβαιώσει ότι έχω δίκαιο, αλλά ένα μόνο πείραμα μπορεί να αποδείξει ότι έχω άδικο». Μέχρι σήμερα αυτό το μοναδικό πείραμα δεν έχει βρεθεί.

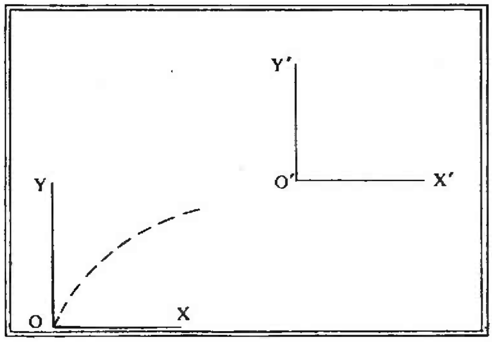
Η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι ακόμη μια ανοικτή θεωρία βαρύτητας (δηλαδή βρίσκεται ακόμη σε εξέλιξη) με πολλά ερωτηματικά, που δεν έχει ακόμη επιβεβαιωθεί σ' όλα της τα σημεία και γι' αυτό θα αναφέρουμε μόνο δυο λόγια γι' αυτήν.

Η θεωρία του Einstein όχι μόνο οδήγησε σε παράδοξα συμπεράσματα που φαίνονταν να παραβιάζουν την κοινή λογική, αλλά άλλαξε ριζικά τις αντιλήψεις μας για το χώρο και χρόνο. Η κύρια δυσκολία στην κατανόηση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας δεν είναι η μαθηματική της επεξεργασία. Είναι μάλλον η απροθυμία μας να απορρίψουμε βαθειά εδραιωμένες ιδέες για το χώρο και το χρόνο. Μεγαλώσαμε χρησιμοποιώντας έννοιες της κλασικής φυσικής για να εξηγήσουμε τα φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω μας και είναι δύσκολο να αναθεωρήσουμε τέτοιες ιδέες. Βέβαια η κλασική θεώρηση δεν μπορεί να ληφθεί τελείως λανθασμένη επειδή κατά θαυμαστό τρόπο εξηγεί την καθημερινή εμπειρία μας. Η κλασική θεώρηση είναι μόνο μια καλή προσέγγιση της φύσης, γιατί υπάρχουν φαινόμενα που για να εξηγηθούν απαιτείται να αναθεωρήσουμε τις παληές αντιλήψεις μας.

13.1. Συστήματα αναφοράς

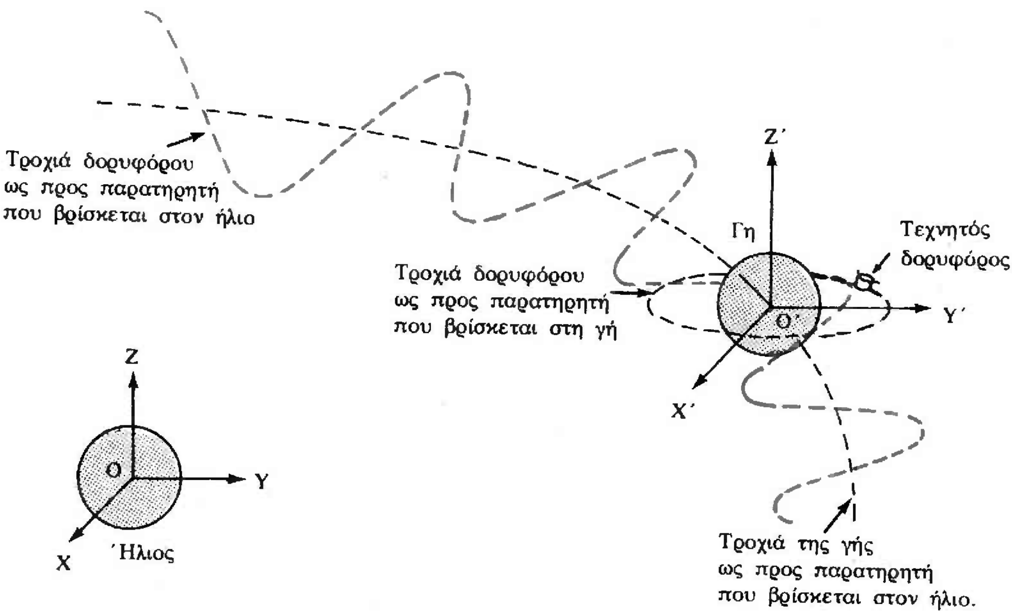
Γνωρίζουμε ότι οι μετρήσεις διαφόρων φαινομένων ή πειραμάτων, γίνονται από έναν παρατηρητή ο οποίος και αποτελεί το σύστημα αναφοράς των

μετρήσεων. Γενικότερα το εργαστήριο που βρίσκεται ο παρατηρητής μπορεί να θεωρηθεί και αυτό σύστημα αναφοράς των μετρήσεων, όπως επίσης και η γη πάνω στην οποία βρίσκεται το εργαστήριο. Η κατάλληλη εκλογή του συστήματος αναφοράς διευκολύνει πολύ τη μελέτη ενός φαινομένου. Για παράδειγμα αν από ένα σημείο Ο του εργαστηρίου, σχ. 13.1, βληθεί ένα σώμα, οι μετρήσεις μπορεί να γίνουν είτε ως προς το σύστημα xOy είτε ως προς το σύστημα x΄O΄y΄. Η εκλογή του συστήματος xOy είναι πιο κατάλληλη γιατί οδηγεί σε απλούστερες εκφράσεις των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση.



Σχ. 13.1

Δυο συστήματα αναφοράς μπορούν να κινούνται το ένα ως προς το άλλο με οποιονδήποτε τρόπο. Π.χ. ένας παρατηρητής στη σελήνη και ένας



Σχετικές κινήσεις συστημάτων αναφοράς

παρατηρητής στη γη αποτελούν δυο συστήματα αναφοράς που κινούνται το ένα ως προς το άλλο κατά πολύπλοκο τρόπο.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα σώμα κινείται ως προς ένα σύστημα αναφοράς Ο χωρίς την επίδραση δύναμης. Τότε αυτό θα κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή ισχύει η αρχή της αδράνειας. Ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς Ο΄, που κινείται ως προς το Ο με σταθερή ταχύτητα, το σώμα θα κινείται πάλι ευθύγραμμα και ισοταχώς, δηλαδή θα ισχύει και ως προς αυτό το σύστημα η αρχή της αδράνειας. Δυο τέτοια συστήματα αναφοράς που το ένα κινείται ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα καλούνται **αδρανειακά συστήματα** και είναι αυτά τα συστήματα με τα οποία ασχολείται η ειδική θεωρία της σχετικότητας. Ένα σύστημα αναφοράς που ως προς έναν παρατηρητή είναι ακίνητο, μπορεί να κινείται ως προς έναν άλλο παρατηρητή. Π.χ το βαγόνι ενός τρένου, στο οποίο βρίσκεται ένας παρατηρητής, είναι ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς γι' αυτόν, ενώ για έναν εξωτερικό παρατηρητή κινείται. Το σύστημα αναφοράς που είναι ακίνητο ως προς τον παρατηρητή λέγεται **σύστημα ηρεμίας** αυτού.

13.2. Αιτήματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας θεμελιώνεται πάνω σε δυο αιτήματα.

α) Αίτημα της σχετικότητας που αναφέρει τα εξής. Οι νόμοι της φυσικής που προκύπτουν απο μετρήσεις ενός φαινομένου από δυο παρατηρητές είναι **ίδιοι**, αν οι παρατηρητές βρίσκονται σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Έτσι αν ένας παρατηρητής Α βρίσκει ότι μεταξύ της δύναμης $\vec{F}$ και της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ ενός σώματος, ισχύει η σχέση $\vec{F} = m\,\vec{\alpha}$, ο παρατηρητής Α΄ που κινείται ως προς τον Α με σταθερή ταχύτητα θα βρει μια ίδια σχέση $\vec{F}' = m\vec{\alpha}'$.

β) Αίτημα του Einstein

Η ταχύτητα c του φωτός στο κενό είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται πάνω σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

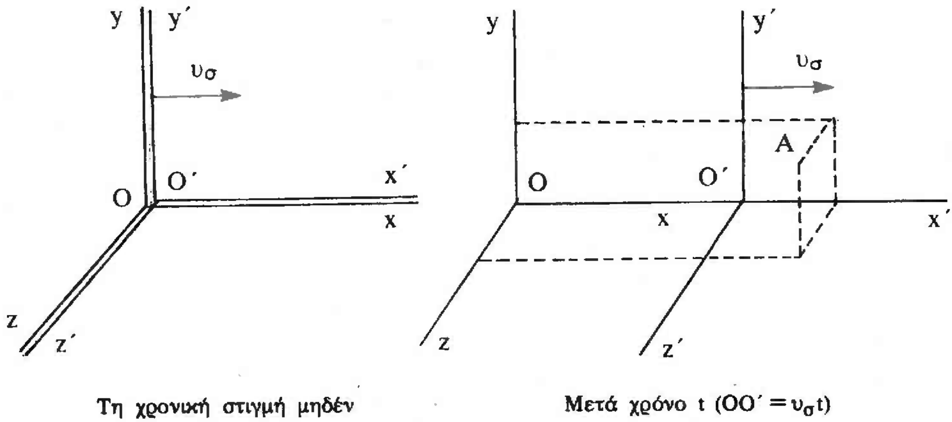
Το πρώτο από αυτά τα αιτήματα που εξασφαλίζει την ισοδυναμία των δυο συστημάτων αναφοράς είναι βασικό και στην κλασική μηχανική.

13.3. Μετασχηματισμοί Galileo

Ας θεωρήσουμε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς Οxyz και Ο΄x΄y΄z΄, σχ. 13.2, με παράλληλους άξονες που κινούνται με σταθερή σχετική*

* Η διαφορά των ταχυτήτων των δυο συστημάτων είναι $\vec{\upsilon}_{\sigma}$.

ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$ το ένα ως προς το άλλο, παράλληλη προς τον άξονα των x.



Σχ. 13.2

Ένα φαινόμενο που συμβαίνει στη θέση A, σχ. 13.2 και αρχίζει τη χρονική στιγμή t, λέμε ότι αποτελεί ένα σημειογεγονός A ή απλά γεγονός A. Το γεγονός αυτό έχει συντεταγμένες {x,y,z,t} ως προς το σύστημα αναφοράς 0xyz και {x′,y′,z′,t′} ως προς το σύστημα αναφοράς O′x′y′z′.

Οι χωρικές συντεταγμένες {x,y,z} και {x′,y′,z′} του γεγονότος A ως προς τα δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς του σχ. 13.2, συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} z' &= z \\ y' &= y \\ x' &= x - \upsilon_\sigma t \end{aligned} \qquad (13.1)$$

γιατί $x' = x - OO' = x - \upsilon_\sigma t$

Η βασική υπόθεση της κλασικής φυσικής είναι ότι και οι χρονικές συντεταγμένες t και t′ του ίδιου γεγονότος ως προς τα δυο συστήματα, είναι ίσες. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$t' = t \qquad (13.2)$$

Οι εξισώσεις (13.1) και (13.2) λέμε ότι αποτελούν μαζί τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Galileo.

$$\boxed{\begin{aligned} z' &= z \\ y' &= y \\ x' &= x - \upsilon_\sigma t \\ t' &= t \end{aligned}} \qquad (13.3)$$

Μέσω των εξισώσεων αυτών συσχετίζονται οι μετρήσεις x,y,z,t ενός φαινομένου από έναν παρατηρητή O, με τις μετρήσεις x′,y′,z′,t′ του ίδιου φαινομένου από έναν άλλο παρατηρητή O′, που κινείται ως προς τον O με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$.

Αυτοί οι μετασχηματισμοί στους οποίους στηρίζεται η κλασική φυσική μπορεί να φαίνονται προφανείς αλλά είναι σημαντικό να εκτιμήσουμε τις βαθειές συνέπειες που υποκρύπτουν. Ο χώρος x,y,z και ο χρόνος t είναι **απόλυτος** με την εξής έννοια. Η απόσταση μεταξύ δυο σημείων είναι η ίδια και για τους δυο παρατηρητές και η χρονική διάρκεια ενός φαινομένου είναι επίσης ίδια και για τους δυο παρατηρητές O και O′.

Πράγματι ας θεωρήσουμε δυο γεγονότα A_1 και A_2 με συντεταγμένες, ως προς το σύστημα αναφοράς Oxyz, $\{x_1,y_1,z_1,t_1\}$ και $\{x_2,y_2,z_2,t_2\}$ αντίστοιχα. Τότε οι συντεταγμένες αυτών των γεγονότων ως προς το σύστημα αναφοράς O′x′y′z′ θα είναι αντίστοιχα $\{x_1',y_1',z_1',t_1'\}$ και $\{x_2',y_2',z_2',t_2'\}$. Οι αποστάσεις μεταξύ των γεγονότων θα είναι, ως προς το σύστημα αναφοράς Oxyz,

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

και ως προς το σύστημα αναφοράς O′x′y′z′

$$\Delta x' = x_2' - x_1'$$

$$\Delta y' = y_2' - y_1'$$

$$\Delta z' = z_2' - z_1'$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

Από τις εξισώσεις (13.3) εύκολα φαίνεται ότι ισχύουν

$$\Delta x = \Delta x'$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta t = \Delta t'$$

Αν επομένως δοθούν στους δυο παρατηρητές μετροταινίες που έχουν το ίδιο μήκος, αυτές θα έχουν πάντα το ίδιο μήκος ανεξάρτητα από τη σχετική κίνηση των παρατηρητών και κατά συνέπεια οι διαστάσεις ενός σώματος παραμένουν ίδιες για τους δυο παρατηρητές. Ομοίως αν τα ρολόγια των δυο παρατηρητών συγχρονισθούν αρχικά, θα συμφωνούν πάντοτε ανεξάρτητα από τη σχετική τους κίνηση. Η καθημερινή κοινή εμπειρία μας για το χώρο και το χρόνο περιέχεται στους μετασχηματισμούς Galileo και εκφράζεται τυπικά απ' αυτούς, σχέσεις (13.3).

Αν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ παράλληλη προς τον άξονα x, σχ. 13.2, ως προς το σύστημα αναφοράς Oxyz, τότε ως προς το σύστημα αναφοράς O΄x΄y΄z΄ θα κινείται με ταχύτητα υ' που βρίσκεται ως εξής. Από τη σχέση $x' = x - \upsilon_\sigma t$ παίρνουμε $\frac{x'}{t} = \frac{x}{t} - \upsilon_\sigma$ και επειδή $t' = t$ η σχέση αυτή γράφεται $\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} - \upsilon_\sigma$. Δηλαδή

$$\upsilon' = \upsilon - \upsilon_\sigma \tag{13.4}$$

Αυτή είναι η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες ενός σώματος, ως προς δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

13.4. Μετασχηματισμοί Lorentz

Το 1887 οι Michelson και Morley έκαναν ένα πείραμα που έμεινε σταθμός στην ιστορία της φυσικής. Η συσκευή που χρησιμοποίησαν οι Michelson και Morley ήταν μια απλή ευαίσθητη συσκευή με την οποίαν μετρούσαν τη συμβολή του φωτός (ένα συμβολόμετρο). Αν ίσχυαν οι μετασχηματισμοί του Galileo, σχέσεις (13.3), το συμβολόμετρο έπρεπε να δείξει φαινόμενα συμβολής. Δεν έδειξε όμως τίποτα. Κατεβλήθησαν πολλές προσπάθειες και πολλά γράφτηκαν για να εξηγήσουν το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος. Η λύση δόθηκε από τον Einstein όταν απέδειξε ότι το αρνητικό αποτέλεσμα οφειλόταν στο ότι η εξήγηση του φαινομένου γινόταν κατά τον κλασικό τρόπο, δηλαδή υπέθεταν ότι η ταχύτητα του φωτός σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς ικανοποιεί τη σχέση (13.4) και επομένως είναι διαφορετική σ' αυτά τα συστήματα. Το γεγονός αυτό και άλλα πολλά μας πείθουν για την αδυναμία των μετασχηματισμών Galileo να περιγράψουν τη φύση.

Η πειραματική μαρτυρία και η εξονυχιστική ανάλυση των εννοιών του χώρου και του χρόνου οδήγησαν τον Einstein να αντικαταστήσει τους μετασχηματισμούς Galileo με τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Lorentz που συσχετίζουν τις μετρήσεις x,y,z,t και x΄,y΄,z΄,t΄ ενός φαινομένου από δυο παρατηρητές με ομαλή σχετική κίνηση.

$$\boxed{\begin{aligned} z' &= z \\ y' &= y \\ x' &= \gamma(x - \upsilon_\sigma t) \\ t' &= \gamma(t - x\upsilon_\sigma/c^2) \end{aligned}} \tag{13.5}$$

Αναφερόμαστε πάντοτε σε μετρήσεις ως προς τα συστήματα αναφοράς του σχ. 13.2. Το γ παριστάνει την ποσότητα $1\big/\sqrt{1 - \frac{\upsilon_\sigma^2}{c^2}}$, όπου c η ταχύτητα

του φωτός στο κενό που ισούται με $c = 3\ 10^8 m/sec$. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου όπου παρουσιάζεται το γράμμα γ θα εννοούμε την ποσότητα

$$\boxed{\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{13.6}$$

η οποία για $\upsilon \neq 0$ είναι πάντοτε μεγαλύτερη της μονάδας. Οι μετασχηματισμοί Lorentz, σχέσεις (13.5), διαφέρουν βασικά από τους μετασχηματισμούς Galileo στην έκφραση του χρόνου. Δηλαδή στις σχέσεις (13.3) ο χρόνος είναι απόλυτος $t' = t$ για τα δυο συστήματα αναφοράς Oxyz και O΄x΄y΄z΄. Ο χρόνος «τρέχει» το ίδιο γρήγορα και για τους δυο παρατηρητές. Στους μετασχηματισμούς Lorentz ο χρόνος είναι σχετικός. Σχετίζεται και με την ταχύτητα υ_σ του παρατηρητή και με τη θέση x αυτού. Ο χρόνος t και ο χώρος αλληλοεμπλέκονται, δεν είναι διακεκριμένες έννοιες, αλλά μαζί αποτελούν το χωρόχρονο.

Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών (13.5) μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα υ΄ ενός σώματος ως προς τον παρατηρητή O΄, σχ. 13.2, αν ξέρουμε την ταχύτητά του υ ως προς τον παρατηρητή O. Υποθέτοντας χάριν απλότητας ότι το σώμα κινείται παράλληλα προς τον άξονα x έχουμε

$$\upsilon' = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - \upsilon_\sigma t)}{\gamma(t - x\upsilon_\sigma/c^2)} = \frac{\frac{x}{t} - \upsilon_\sigma}{1 - \frac{x}{t}\frac{\upsilon_\sigma}{c^2}}$$

ή

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - \upsilon_\sigma}{1 - \frac{\upsilon\upsilon_\sigma}{c^2}} \tag{13.7}$$

Αν υποθέσουμε ότι μια ακτίνα φωτός κινείται κατά τον άξονα x του σχήματος (13.2) με ταχύτητα c, τότε ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς O΄ θα μέτραγε σαν ταχύτητα φωτός την υ΄ η οποία σύμφωνα με την κλασική σχέση (13.4) θα είναι ίση προς

$$\upsilon' = c - \upsilon_\sigma$$

δηλαδή $\upsilon' < c$. Κατά το αίτημα του Einstein η ταχύτητα υ΄ της ακτίνας πρέπει να είναι ίση με c διότι αυτό δείχνει το πείραμα. Η εξίσωση (13.7) πράγματι δίνει

$$\upsilon' = \frac{c - \upsilon_\sigma}{1 - \frac{c\upsilon_\sigma}{c^2}} = \frac{c - \upsilon_\sigma}{c - \upsilon_\sigma}c = c$$

Κοιτάζοντας τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Galileo, σχέσεις (13.3) και τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz, σχέσεις (13.5) βλέπουμε ότι για μικρές ταχύτητες υ_σ του συστήματος O΄x΄y΄z΄ ως προς το Oxyz, δηλαδή για

$\upsilon_\sigma \ll c$, οι σχέσεις (13.5) τείνουν να πάρουν τη μορφή των σχέσεων (13.3) διότι

$$\lim_{\upsilon_\sigma \to 0} \gamma = \lim_{\upsilon_\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_\sigma^2}{c^2}}} = 1$$

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{\upsilon_\sigma \to 0} (\text{Μετασχηματισμοί Lorentz}) = \text{Μετασχηματισμοί Galileo}$$

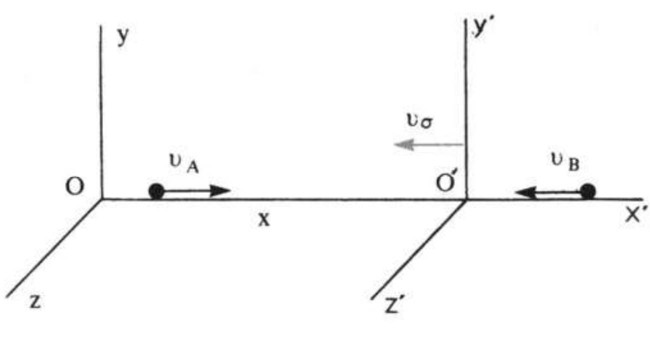
Έτσι για $\upsilon_\sigma \ll c$ οι μετασχηματισμοί Galileo είναι μια άριστη προσέγγιση των μετασχηματισμών Lorentz που περιγράφουν επακριβώς τα φυσικά φαινόμενα και στις μικρές και στις μεγάλες ταχύτητες. Επομένως η κλασική μηχανική του Newton είναι μια καλή (πρώτη) προσέγγιση των νόμων που κυβερνούν τον κόσμο, όταν οι ταχύτητες είναι πολύ μικρές σε σχέση με την ταχύτητα c του φωτός.

Παράδειγμα

Δυο σώματα Α και Β κινούνται στην ίδια ευθεία με αντίθετες ταχύτητες μέτρου $\upsilon_A = \upsilon_B = 0{,}5c$ (όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό). Ποια η σχετική ταχύτητα των δυο σωμάτων;

Λύση

Στο σύστημα O΄x΄y΄z΄ το σώμα Β είναι σε ηρεμία. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα



αυτό πλησιάζει προς το Oxyz με ταχύτητα $-0{,}5c$, δηλαδή $\upsilon_\sigma = -0{,}5c$. Έτσι το σώμα Α που έχει ταχύτητα 0,5c στο σύστημα Oxyz, στο σύστημα O΄x΄y΄z΄ θα έχει ταχύτητα

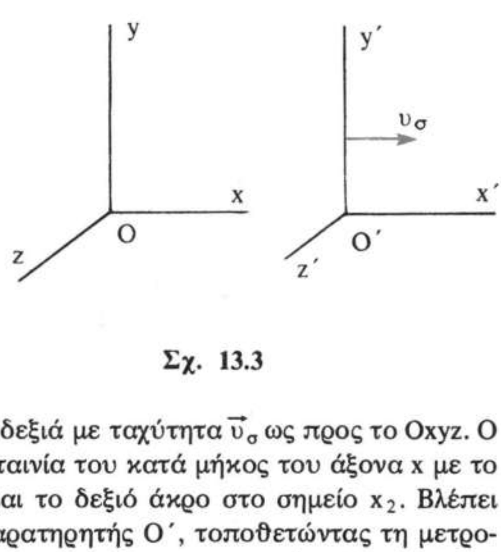
$$\upsilon_A' = \frac{\upsilon_A - \upsilon_\sigma}{1 - \frac{\upsilon_A \upsilon_\sigma}{c^2}} = \frac{0{,}5c + 0{,}5c}{1 + \frac{0{,}5c\ 0{,}5c}{c^2}} = 0{,}8c$$

Αν ίσχυαν οι μετασχηματισμοί Galileo, τότε η σχετική ταχύτητα των δυο σωμάτων θα ήταν, σύμφωνα με τη σχέση (13.4), c.

Χρονικά διαστήματα και αποστάσεις στη σχετικότητα

13.5. Συστολή μήκους

Στην κλασική φυσική το μήκος ενός αντικειμένου είναι το ίδιο για όλους τους παρατηρητές ανεξάρτητα με την ταχύτητα που κινούνται ως προς το αντικείμενο όπως είδαμε στην παράγραφο 13.3. Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει στην πραγματικότητα, όπως αυτή περιγράφεται από τη θεωρία της σχετικότητας. Ας θεωρήσουμε τα συστήματα αναφοράς Oxyz και O΄x΄y΄z΄ του σχήματος 13.3. Όταν τα συστήματα ηρεμούν, οι παρατηρητές που βρίσκονται στα O και O΄ συγκρίνουν τις μετροταινίες που έχουν και τις βρίσκουν να έχουν και οι δυο μήκος L_o. Κατόπιν το σύστημα O΄x΄y΄z΄ τίθεται σε κίνηση προς τα δεξιά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\sigma$ ως προς το Oxyz. O παρατηρητής O τοποθετεί τη μετροταινία του κατά μήκος του άξονα x με το αριστερό άκρο της στο σημείο x_1 και το δεξιό άκρο στο σημείο x_2. Βλέπει λοιπόν ότι $x_2 - x_1 = L_o$. Επίσης ο παρατηρητής O΄, τοποθετώντας τη μετροταινία του καθ' όμοιο τρόπο με το αριστερό άκρο στο σημείο x_1' και το δεξιό στο σημείο x_2', βλέπει ότι $x_2' - x_1' = L_o$. Και οι δυο παρατηρητές βλέπουν τις μετροταινίες τους να έχουν μήκος L_o. Αυτό βέβαια σύμφωνα με το πρώτο αίτημα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας το αναμέναμε. Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα. Πόσο είναι το μήκος L της μετροταινίας του παρατηρητή O΄, καθώς αυτή μετρείται από τον παρατηρητή O; Πρέπει να τονίσουμε ότι ο παρατηρητής O προκειμένου να βρει το μήκος της κινούμενης μετροταινίας, πρέπει να παρατηρήσει (σημαδέψει) τα δυο άκρα της ταυτόχρονα, γιατί αλλιώς θα εύρισκε μήκη που θα εξαρτιόνταν από το χρονικό διάστημα κατά το οποίο διαφέρει το σημάδεμα των άκρων της κινούμενης μετροταινίας.



Σχ. 13.3

Έτσι αν τα σημάδια που παίρνει ο παρατηρητής Ο για την κινούμενη μετροταινία είναι στα σημεία, x''_1 τη χρονική στιγμή t_1 και x''_2 τη χρονική στιγμή t_2 και $t_1=t_2$, τότε τα αντίστοιχα σημάδια που παίρνει ο παρατηρητής Ο΄ για τη μετροταινία του (που ηρεμεί ως προς αυτόν) θα είναι x'_1 και x'_2 και θα ισχύει $x'_2-x'_1=L_o$. Αλλά από τους μετασχηματισμούς Lorentz, σχέσεις (13.5), βρίσκουμε ότι

$$x'_2=\gamma(x''_2-\upsilon_\sigma t_2)$$

$$x'_1=\gamma(x''_1-\upsilon_\sigma t_1)$$

και επειδή $t_1=t_2 \Rightarrow x'_2-x'_1=\gamma(x''_2-x''_1)$

ή $$L_o=\gamma L$$

ή $$\boxed{L=\frac{L_o}{\gamma}} \tag{13.8}$$

και επειδή $\gamma>1 \Rightarrow L<L_o$

Το φαινόμενο αυτό κατά το οποίο το κινούμενο «μήκος» ελαττώνεται ως προς ακίνητο παρατηρητή λέγεται **συστολή μήκους** και συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Σε κάθετες διευθύνσεις, επειδή έχουμε $y'=y$ και $z'=z$ δεν υπάρχει συστολή. Επομένως αφού όλοι οι παρατηρητές που κινούνται ως προς ένα «μήκος» θα βρίσκουν διάφορες τιμές αυτού, μόνο το μήκος L_o ως προς τον ακίνητο παρατηρητή είναι ένα μέγεθος σταθερό.

Πριν ακόμη διατυπωθεί η θεωρία της σχετικότητας από τον Einstein, οι Fitzgerald και Lorentz υπέθεσαν τη συστολή του μήκους κατά τη διεύθυνση της κίνησης, προκειμένου να ερμηνεύσουν το αποτέλεσμα του πειράματος Michelson-Morley.

Παράδειγμα

Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα μιας ράβδου μήκους 1 m που κινείται παράλληλα προς τον άξονά της, για να ελαττωθεί αυτό κατά 1 χιλιοστόμετρο;

Λύση

Από τη σχέση $L=\dfrac{L_o}{\gamma}$ έχουμε $L=0{,}999L_o$

ή $\dfrac{1}{\gamma}=0{,}999 \Rightarrow \sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}=0{,}999 \Rightarrow \dfrac{\upsilon}{c}=0{,}045 \Rightarrow \upsilon=0{,}045\ c=13416\ \dfrac{Km}{sec}$

Δηλαδή μια ταχύτητα που δεν έχει επιτευχθεί ως σήμερα. Επομένως στις καθημερινές ταχύτητες το μήκος L βρίσκεται ίσο με το L_o.

13.6. Διαστολή χρόνου

Οι δυο παρατηρητές Ο και Ο΄ του σχήματος 13.3, παρατηρούν ένα φαινόμενο που συμβαίνει στη θέση x. Ο παρατηρητής Ο μετράει τη διάρκεια του φαινομένου και τη βρίσκει $T_o = t_2 - t_1$, όπου t_1 η χρονική στιγμή που άρχισε το φαινόμενο, σύμφωνα με το ρολόϊ του και t_2 η χρονική στιγμή λήξης του φαινομένου. Ο παρατηρητής Ο΄ βρίσκει τη διάρκεια του φαινομένου $T = t_2' - t_1'$, όπου t_1' η χρονική στιγμή που άρχισε το φαινόμενο, σύμφωνα με το ρολόϊ του και t_2' η χρονική στιγμή λήξης του φαινομένου. Από τους μετασχηματισμούς Lorentz, σχέσεις (13.5) έχουμε

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{x\upsilon_\sigma}{c^2} \right)$$

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{x\upsilon_\sigma}{c^2} \right)$$

Επομένως

$$t_2' - t_1' = \gamma (t_2 - t_1)$$

ή

$$\boxed{T = \gamma T_o} \qquad (13.9)$$

Δηλαδή το χρονικό διάστημα, που διήρκεσε το φαινόμενο, οι δυο παρατηρητές το βρίσκουν διαφορετικό, ενώ κατά την κλασική φυσική θα το εύρισκαν ίδιο.

Αυτό το φαινόμενο κατά το οποίο ο χρόνος «τρέχει» πιο αργά στον κινούμενο παρατηρητή, ονομάζεται **διαστολή χρόνου**.

Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι ο παρατηρητής Ο΄ κινείται ως προς τον Ο με ταχύτητα $\upsilon_\sigma = 0{,}98c$, τότε βρίσκουμε $T = 5T_o$. Αυτό σημαίνει ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών τικ του ρολογιού του παρατηρητή Ο΄, ο παρατηρητής Ο θα το βρίσκει πενταπλάσιο. Αν λοιπόν μεταξύ δυο διαδοχικών τικ του ρολογιού του παρατηρητή Ο΄ αντιστοιχεί χρόνος 1 sec, ο παρατηρητής Ο θα το μετράει 5 sec. Έτσι το ρολόϊ που ηρεμεί στον παρατηρητή Ο κάνει 5 τικ για κάθε τικ του κινούμενου ρολογιού.

Και αυτό το φαινόμενο όπως και το φαινόμενο της συστολής του μήκους είναι αντιστρέψιμα, με την έννοια ότι κάθε παρατηρητής βρίσκει το ρολόϊ του άλλου, που κινείται ως προς αυτόν, να «τρέχει» αργά.

Πρέπει να τονιστεί ότι με τη λέξη «ρολόϊ» εννοούμε οποιοδήποτε μηχανισμό επαναλαμβάνει μια μεταβολή (εξέλιξη) σε τακτά χρονικά διαστήματα, είτε είναι ένα συνηθισμένο μηχανικό ρολόϊ, είτε είναι ένας κρύσταλλος χαλαζία, είτε είναι ένα ατομικό ρολόϊ με τα ταλαντευόμενα άτομα, είτε είναι η καρδιά του ανθρώπου με τους επαναλαμβανόμενους κτύπους της.

Η διαστολή του χρόνου, που στην καθημερινή ζωή δεν παρατηρείται αφού οι ταχύτητες είναι μικρές, έχει παρατηρηθεί σε στοιχειώδη σωματίδια της ύλης που τρέχουν με μεγάλες ταχύτητες. Η διαστολή του χρόνου ζωής των στοιχειωδών σωματιδίων τα κάνει ανιχνεύσιμα διότι διαφορετικά ήταν αδύνατο να παρατηρηθούν στο σύστημα ηρεμίας τους που ο παρατηρητής κινείται μαζί μ' αυτά και όπου ο χρόνος ζωής τους είναι ελάχιστος π.χ. 10^{-18} sec.

Κάτω από το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου υποκρύπτεται ως αιτία το δεύτερο αίτημα του Einstein περί της σταθερότητας της ταχύτητας διάδοσης του φωτός.

Παράδειγμα

Σ' ένα διαστημικό όχημα ο αστροναύτης για να κάνει μια εργασία χρειάζεται 2 min σύμφωνα με το ρολόϊ του. Αν το διαστημόπλοιο στο οποίο βρίσκεται ο αστροναύτης κινείται με ταχύτητα 0,3 c ως προς τη γη, ζητούνται α) ο χρόνος που χρειάζεται για να κάνει την εργασία καθώς το μετράει ένας παρατηρητής στη γη β) το διάστημα που διανύει το διαστημόπλοιο κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου καθώς μετρείται από τη γη.

Λύση

α) Ο χρόνος που αντιστοιχεί στη γη είναι $T = T_o\ \gamma = 2\text{min}\ \dfrac{1}{\sqrt{1-(0,3)^2}}$ ή $T = 2,1\text{min}$

β) Το διάστημα είναι $s = \upsilon\ T = 0,3\ 3\ 10^5\ \dfrac{\text{Km}}{\text{sec}}\ 2,1\text{min} = 11340000\text{Km}$

13.7. Ορμή

Το πρώτο αίτημα της σχετικότητας σε συνδυασμό με την ισχύ των μετασχηματισμών Lorentz επιβάλλει αναθεώρηση στους ορισμούς των μεγεθών που είχαν δοθεί στην κλασική φυσική. Έτσι η ορμή ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{\vec{J} = \gamma\ m_o\ \vec{\upsilon}} \qquad (13.10)$$

όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος και m_o η μάζα του στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το σώμα ηρεμεί. Η m_o λέγεται **μάζα ηρεμίας.** Για μικρές ταχύτητες η έκφραση αυτή της ορμής έχει ως όριο την αντίστοιχη έκφραση που δίνει την ορμή στην κλασική φυσική, δηλαδή $\vec{J} = m\vec{\upsilon}$ όπου η μάζα m θεωρείται μια σταθερά του σώματος. Ας θεωρήσουμε το σχήμα 13.4α που δίνει τη μεταβολή του γ με την ταχύτητα.

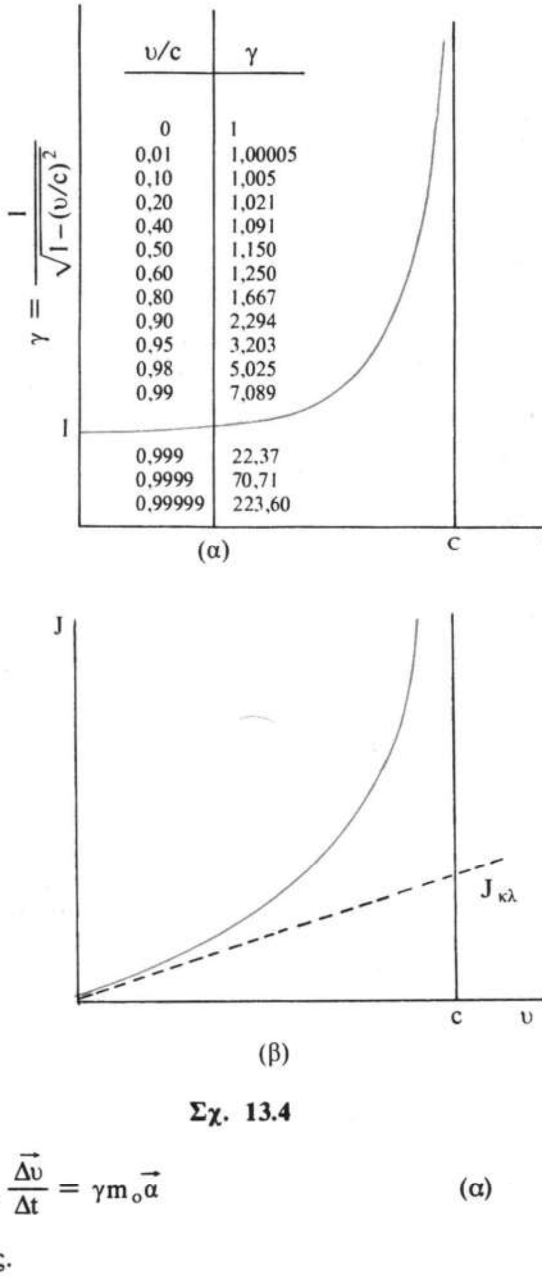
Τότε επειδή $J = \gamma\ m_o \upsilon$ έπεται ότι η ορμή απειρίζεται ασυμπτωτικά όταν $\upsilon \to c$, όπως δείχνει το σχήμα 13.4β.

Με το σύμβολο $J_{\kappa\lambda}$ εννοούμε την ορμή όπως δίνεται από τη σχέση $J_{\kappa\lambda} = m\upsilon$. Πρέπει να τονιστεί ότι η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει και στη σχετικότητα. Η δύναμη $\vec{F}$ δίνεται από τον τύπο

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t}$$

όπου $\Delta\vec{J}$ η μεταβολή της ορμής $\vec{J} = \gamma m_o \vec{\upsilon}$ στο μικρό χρόνο Δt.

Στην ειδική περίπτωση που η $\vec{\upsilon}$ μεταβάλλεται έτσι ώστε να διατηρείται σταθερό το μέτρο της υ (όπως στην ομαλή κυκλική κίνηση), η $\vec{F}$ παίρνει τη μορφή



υ/c	γ
0	1
0,01	1,00005
0,10	1,005
0,20	1,021
0,40	1,091
0,50	1,150
0,60	1,250
0,80	1,667
0,90	2,294
0,95	3,203
0,98	5,025
0,99	7,089
0,999	22,37
0,9999	70,71
0,99999	223,60

Σχ. 13.4

$$\vec{F} = \gamma\ m_o \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \gamma m_o \vec{\alpha} \qquad (\alpha)$$

όπου $\vec{\alpha}$ η επιτάχυνση του σώματος.

13.8. Συγχροκύκλοτρο

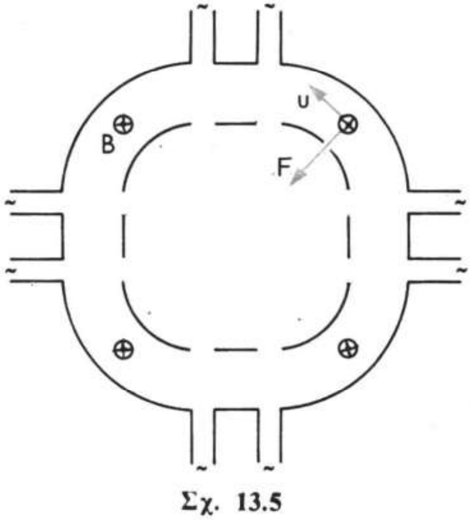
Στην περίπτωση που ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα προς την μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$, η

δύναμη Laplace που ασκείται στο σωματίδιο ισούται προς quB και σύμφωνα με την παραπάνω σχέση (α) είναι ίση και προς $\gamma m_o \alpha$. Δηλαδή $quB = \gamma m_o\ \alpha$ όπου $\alpha = \frac{\upsilon^2}{R}$ η κεντρομόλος επιτάχυνση του σωματιδίου.

Επομένως $q\upsilon B = \gamma m_o \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \quad J = \gamma m_o \upsilon = qBR$.

Με τη βοήθεια του τύπου $J = qBR$ υπολογίζεται η ορμή κατά τις (πυρηνικές) αντιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων. Η αντίδραση γίνεται συνήθως στο θάλαμο φυσαλίδων που βρίσκεται μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο. Το βλήμα και τα σωματίδια που παράγονται, κινούνται μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαγράφοντας τόξα κύκλων. Έτσι ξέροντας τα q και B και μετρώντας το R βρίσκουμε την ορμή των σωματιδίων. Τα βλήματα που πέφτουν στο στόχο βγαίνουν από τους σημερινούς μεγάλους επιταχυντές στοιχειωδών σωματιδίων όπως π.χ. το σύγχροτρο. Το σύγχροτρο είναι μια εξελιγμένη μορφή του κύκλοτρου. Επειδή τα σωματίδια που επιταχύνονται στο κύκλοτρο αποκτούν μεγάλες ταχύτητες, η μάζα τους αυξάνει, με αποτέλεσμα η συχνότητα περιστροφής τους να μειώνεται, όπως φαίνεται από την παράγραφο 4.10. Έτσι πρέπει η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης του κύκλοτρου να ελαττώνεται, δηλαδή να συγχρονίζεται με τη συχνότητα περιστροφής του σωματιδίου. Αυτή η μορφή του κύκλοτρου λέγεται συγχροκύκλοτρο. Μια μορφή του συγχροκύκλοτρου πιο οικονομική είναι το σύγχροτρο, όπου η κίνηση του σωματιδίου γίνεται με σταθερή ακτίνα και επομένως απαιτείται μικρότερος όγκος μαγνητικού πεδίου. Μια κάτοψη ενός σύγχροτρου δίνεται στο σχήμα 13.5.

Από το πρώτο σύγχροτρο που επιτάχυνε πρωτόνια σε ενέργεια 3 GeV (1 GeV= 10^9 eV) στο εργαστήριο Brookhaven, έχουμε φτάσει σήμερα στα 500 GeV με ακτίνα γύρω στο 1 Km (εργαστήριο Fermi) και η προοπτική είναι για ακόμη μεγαλύτερους επιταχυντές. Γιατί όσο μεγαλύτερη ενέργεια επιτυγχάνουμε τόσο βαθύτερα διεισδύουμε στα μυστικά του μικρόκοσμου.



Σχ. 13.5

Παράδειγμα

Ένα ηλεκτρόνιο συγκρούεται μετωπικά με πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_p = 0{,}60c$. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα υ_e του ηλεκτρονίου αν τα σωματίδια

παραμένουν σε ηρεμία μετά την κρούση. Δίδεται ότι η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου m_p είναι 1836 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου m_e.

Λύση

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{J}_{ολ} = 0 = \vec{J}_p + \vec{J}_e \Rightarrow \quad J_p = J_e$$

$$ή \; \gamma_p m_p \upsilon_p = \gamma_e m_e \upsilon_e$$

$$ή \quad \frac{m_p \upsilon_p}{\sqrt{1-(\upsilon_p/c)^2}} = \frac{m_e \upsilon_e}{\sqrt{1-(\upsilon_e/c)^2}}$$

$$ή \quad \frac{(1836)^2\,(0{,}60c)^2}{1-(0{,}60)^2} = \frac{\upsilon_e^2}{1-(\upsilon_e/c)^2}$$

$$ή \quad \upsilon_e = 0{,}9999997c$$

Στο παράδειγμα αυτό η κλασική φυσική μέσω της σχέσης $m_p\upsilon_p = m_e\upsilon_e$ θα έδινε για το ηλεκτρόνιο ταχύτητα $\upsilon_e = 1101{,}6c$

13.9. Ενέργεια

Η ενέργεια Ε ενός κινουμένου σωματιδίου ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{E = \gamma m_o c^2} \tag{13.11}$$

όπου m_o η **μάζα ηρεμίας** του σωματιδίου, δηλαδή η τιμή της μάζας του στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το σωματίδιο είναι ακίνητο.

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί

$$E = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} m_o \upsilon^2 + m_o c^2$$

Για μικρές ταχύτητες υ του σωματιδίου (οπότε το $\gamma \rightarrow 1$) η σχέση αυτή γίνεται

$$E = \frac{1}{2} m_o \upsilon^2 + m_o c^2$$

Δηλαδή η ενέργεια του σωματιδίου αποτελείται από δυο όρους. Τον ένα όρο $\frac{1}{2} m_o \upsilon^2$ που εκφράζει την ενέργεια λόγω της κίνησης του σωματιδίου και τον άλλο όρο $m_o c^2$ που εκφράζει την ενέργεια που ενυπάρχει στο σωματίδιο και που τον ονομάζουμε **ενέργεια ηρεμίας E_o.**

Επομένως η ενέργεια Ε μπορεί να γραφεί

$$\boxed{E = E_\kappa + E_o} \qquad (13.12)$$

όπου

$$\boxed{E_\kappa = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} m_o \upsilon^2} \qquad (13.13)$$

η κινητική ενέργεια του σωματιδίου.

Σύμφωνα με την (13.12) η κινητική ενέργεια γράφεται

$$E_\kappa = E - E_o$$

$$\text{ή} \quad E_\kappa = \gamma m_o c^2 - m_o c^2$$

$$\text{ή} \quad \boxed{E_\kappa = (\gamma - 1) m_o c^2} \qquad (13.14)$$

Η γραφική παράσταση της E_κ φαίνεται στο σχ. 13.6.
Αφού η ποσότητα $E_o = m_o c^2$ εκφράζει την ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου, τότε η ενέργεια Ε θα εκφράζεται με ανάλογο τύπο. Δηλαδή

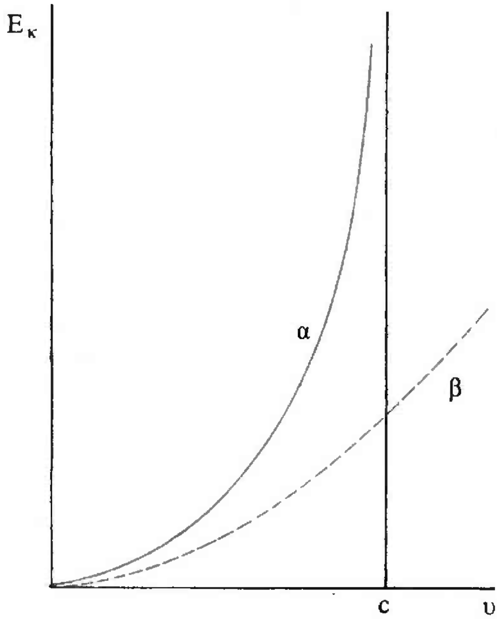
$$\boxed{E = m\ c^2} \qquad (13.15)$$

όπου σύμφωνα με την (13.11), προκύπτει ότι

$$\boxed{m = \gamma m_o = \frac{m_o}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}} \qquad (13.16)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει μεταβολή της μάζας ενός σώματος με την ταχύτητά του. Η εφαρμογή επομένως σταθερής δύναμης σ' ένα σώμα δεν προκαλεί σταθερή επιτάχυνση αυτού, αφού η ταχύτητα του σώματος έχει ανώτατο όριο το c. Η εφαρμογή σταθερής δύναμης αυξάνει συνεχώς την ορμή του σώματος.

Η σχέση (13.15) υπονοεί μια νέα ερμηνεία της μάζας και της ενέργειας, μεγέθη που στη κλασική φυσική θεωρούνται διαφορετικά. Η μάζα περικλείει ενέργεια στην οποίαν μπορεί να μετατραπεί και η ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε μάζα. Η αρχή της αφθαρσίας της ύλης και η αρχή διατήρησης της ενέργειας ενοποιούνται στην πραγματικότητα σε μια αρχή, την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για παράδειγμα όταν ένας πυρήνας U^{235} υφίσταται σχάση, η μάζα των προϊόντων της σχάσης είναι μικρότερη από τη μάζα του αρχικού πυρήνα. Ένα ποσό μάζας έχει εξαφανισθεί και στη θέση του έχει εμφανισθεί ένα ισοδύναμο ποσό ενέργειας με τη μορφή κινητικής ενέργειας των προϊόντων της σχάσης. Για κάθε Kgr ουράνιου, ένα gr μάζας εξαφανίζεται και η ελευθερούμενη ενέργεια είναι



Σχ. 13.6. Μεταβολή της κινητικής ενέργειας E_κ με την ταχύτητα υ. Η καμπύλη α παριστάνει τη σχετικιστική κινητική ενέργεια και η καμπύλη β την κλασική. Για μικρές ταχύτητες οι δύο καμπύλες πλησιάζουν η μία την άλλη.

$$E=(10^{-3}\text{Kgr})\ (3\ 10^{8}\ \text{m/sec})^2=9\ 10^{13}\ \text{Joule}$$

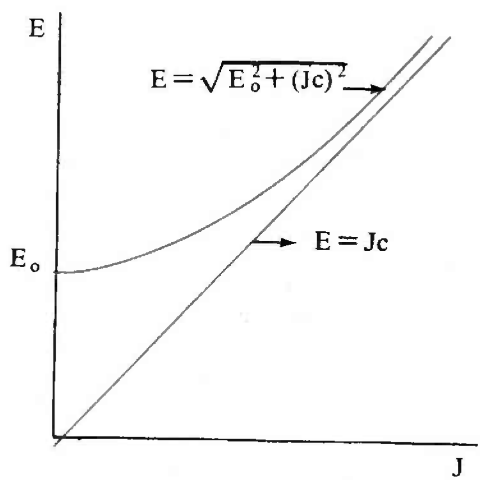
Δηλαδή με την μετατροπή 1 gr σε ενέργεια, παίρνουμε τόση ενέργεια όση δίνει το μεγαλύτερο εργοστάσιο της ΔΕΗ σε μια μέρα.

Στη φυσική η ορμή είναι μέγεθος πιο θεμελιώδες από την ταχύτητα, για παράδειγμα ισχύει αρχή διατήρησης ορμής αλλά όχι διατήρησης ταχύτητας.
Γι' αυτό είναι πιο πρόσφορο να εκφράζουμε την ολική ενέργεια E σε συνάρτηση με την ορμή παρά με την ταχύτητα. Από τη σχέση $J=\gamma m_o \upsilon \Rightarrow J^2=\gamma^2 m_o^2 \upsilon^2 \Rightarrow$

$$c^2J^2=c^2\gamma^2m_o^2\upsilon^2=$$

$$=\gamma^2(m_oc^2)^2\ \frac{\upsilon^2}{c^2}=$$

$$=\gamma^2(m_oc^2)^2\ \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)=$$



Σχ. 13.7

$$=\gamma^2E_o^2-E_o^2\Rightarrow(Jc)^2=E^2-E_o^2$$

$$\text{ή} \quad \boxed{E^2 = E_o^2 + (Jc)^2} \qquad (13.17)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι σωματίδιο με μάζα ηρεμίας $m_o = 0$ έχει ενέργεια

$$E = Jc \qquad (13.18)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (13.17) παριστάνεται στο σχήμα 13.7.

Παράδειγμα

Να βρεθε η ορμή και η ταχύτητα ενός πρωτονίου του οποίου η ενέργεια είναι διπλάσια της ενέργειας ηρεμίας.
Δίνεται μάζα ηρεμίας πρωτονίου 938,28 MeV/c^2

Λύση

Από τη σχέση (13.18) $E = Jc \Rightarrow J = E/c$. Επομένως αν η ενέργεια μετρείται σε MeV, η ορμή μετρείται σε MeV/c.

Από τη σχέση (13.17) έχουμε $J = \sqrt{\dfrac{E^2 - E_o^2}{c^2}}$ αλλά $E = 2E_o$ οπότε

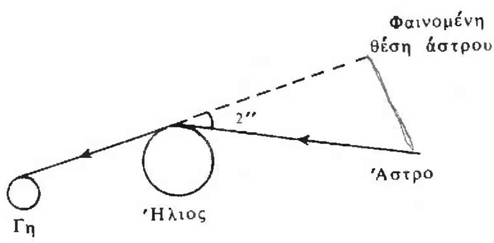
$$J = \sqrt{\frac{3E_o^2}{c^2}} = \sqrt{3}\,\frac{E_o}{c} = \sqrt{3}\cdot 938{,}28\,\frac{MeV}{c} = 1625\,\frac{MeV}{c}$$

Από τον ορισμό της ορμής $J = \gamma m_o \upsilon \Rightarrow \sqrt{3}\cdot 938\,\dfrac{MeV}{c} = \gamma 938\,\dfrac{MeV}{c^2}\,\upsilon$

ή $\sqrt{3} = \gamma\,\dfrac{\upsilon}{c} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{\upsilon}{c}\,\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \Rightarrow \dfrac{\upsilon}{c} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \Rightarrow \upsilon = 0{,}866c$

13.10. Γενική θεωρία της σχετικότητας.

Η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μια θεωρία βαρύτητας η οποία εξηγεί γεγονότα τα οποία η θεωρία βαρύτητας του Newton δεν μπορεί να εξηγήσει. Π.χ. έχει παρατηρηθεί ότι, σχ. 13.8, οι ακτίνες φωτός και γενικά τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έλκονται από τη μάζα, κάτι που μπορεί να ερμηνεύσει μόνο η γενική θεωρία της σχετικότητας.



Σχ. 13.8

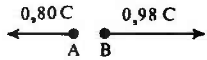
Η γενική θεωρία της σχετικότητας διατυπώθηκε από τον Einstein 11 χρόνια μετά την εμφάνιση της ειδικής θεωρίας και σαν θεω-

ρία βαρύτητας αποτελεί βάση για πρότυπα περιγραφής του σύμπαντος. Είναι ακόμη μια θεωρία ανοικτή για το λόγο ότι οι προβλέψεις της είναι δύσκολο ακόμη να επαληθευτούν. Π.χ. η πρόβλεψη της ύπαρξης μαύρων οπών στο διάστημα, δηλαδή περιοχών όπου τα φαινόμενα βαρύτητας είναι έντονα, είναι δύσκολο να ελεγχθεί.

Ασκήσεις

1. Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz, δείξτε ότι η ποσότητα z^2+y^2+ $+x^2-c^2t^2$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

2. Ο πυρήνας ενός ατόμου αρχικά σε ηρεμία, αποσυντίθεται σε δυο σωματίδια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



και όπου οι ταχύτητες έχουν μετρηθεί από ακίνητο παρατηρητή στη γη. Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου Α ως προς ένα παρατηρητή που κινείται όπως το Β;

(Απ. 0,998c)

3. Ένας πύραυλος που κατευθύνεται κατ' ευθείαν προς τη σελήνη περνάει κοντά από τη γη με ταχύτητα 0,8c. α) Πόσο διαρκεί το ταξίδι γη-σελήνη σύμφωνα μ' ένα παρατηρητή στη γη, β) Ποια είναι η απόσταση γης-σελήνης σύμφωνα με τον επιβάτη του πυραύλου, γ) Πόσο διαρκεί το ταξίδι σύμφωνα με τον επιβάτη. Δίνεται απόσταση γης-σελήνης $3{,}84\ 10^8$m

(Απ.: α) 1,6 sec β) $2{,}3\ 10^8$m γ) 0,96 sec)

4. Οι ραδιενεργοί πυρήνες διασπώνται σε μικρότερα σωματίδια. Αν έχουμε N ραδιενεργούς πυρήνες και μετά χρόνο t έχουν μείνει N/2 πυρήνες αδιάσπαστοι τότε, ο χρόνος t λέγεται χρόνος ημίσειας ζωής των πυρήνων.

Μια ομάδα από N ραδιενεργούς πυρήνες κινούμενη με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}85c$, αφού διανύσει μια απόσταση $s = 32$m, έχει απομείνει η μισή διότι τα μισά σωματίδια διασπάσθηκαν. Ποιος ο χρόνος ημίσειας ζωής των πυρήνων στο σύστημα ηρεμίας των;

(Απ. $6{,}6\ 10^{-8}$sec)

5. Τα πιόνια (π) είναι στοιχειώδη σωματίδια με μάζα μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου. Παράγονται κατά το βομβαρδισμό καταλλήλων στόχων με υψηλής ενέργειας πρωτόνια και εγκαταλείπουν το στόχο με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}991c$ υπό μορφή δέσμης. Αν ο χρόνος ημίσειας ζωής των πιονίων είναι $1{,}77\ 10^{-8}$sec, να ευρεθεί σε πόση απόσταση από το στόχο ο αριθμός αυτών έχει πέσει στο μισό του αρχικού.

(Απ. 39,2 m)

6. Δυο δορυφόροι, με την ίδια μάζα ηρεμίας 4000 Kgr κινούνται ο καθένας με ταχύτητα 8 Km/sec ως προς τη γη. Πλησιάζουν, συγκρούονται και παραμένουν ενωμένοι σ' ένα νέο σώμα. Ποια η αύξηση στη μάζα ηρεμίας του νέου σώματος αν θεωρήσουμε ότι όλη η κινητική τους ενέργεια μετατρέπεται σε μάζα;

(**Απ.** 2,8 mgr)

7. Ένα πρωτόνιο με μάζα ηρεμίας 938,28 MeV/c^2 κινείται α) με ταχύτητα 0,5c, β) με ταχύτητα 0,99c.
Ποια η κινητική ενέργεια των πρωτονίου σύμφωνα με τη κλασική και τη σχετικιστική φυσική και στις δυο περιπτώσεις.

(**Απ.** α) 117,3 MeV 140,7 MeV β) 459,8 MeV 5723,5 MeV)

8. Στους μεγάλους σημερινούς επιταχυντές στοιχειωδών σωματιδίων έχουν επιτευχθεί ενέργειες α) για το ηλεκτρόνιο 20 GeV, β) για το πρωτόνιο 1500 GeV. Σε ποιες ταχύτητες αντιστοιχούν αυτές οι ενέργειες;
Η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου είναι 0,511 MeV = $0{,}511\ 10^6$eV. Η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου είναι 938 MeV. 1 GeV = 10^9eV

9. α) Ένα σωματίδιο με ολική ενέργεια $E \neq 0$ έχει μάζα ηρεμίας μηδέν. Δείξτε ότι κινείται με την ταχύτητα του φωτός.

β) Ένα σωματίδιο με ολική ενέργεια $E \neq 0$ κινείται με την ταχύτητα του φωτός. Δείξτε ότι η μάζα ηρεμίας είναι μηδέν.

10. Δυο σώματα με ίσες μάζες ηρεμίας και ίσες ταχύτητες συγκρούονται πλαστικά και το νέο σώμα που δημιουργείται ηρεμεί. Με ποια ταχύτητα εκινούντο τα σώματα, αν το νέο σώμα έχει διπλάσια μάζα ηρεμίας από τα δυο σώματα μαζί και υποθέσουμε ότι κατά τη σύγκρουση δεν εμφανίζεται άλλη μορφή ενέργειας;

(**Απ.** 0,866c)

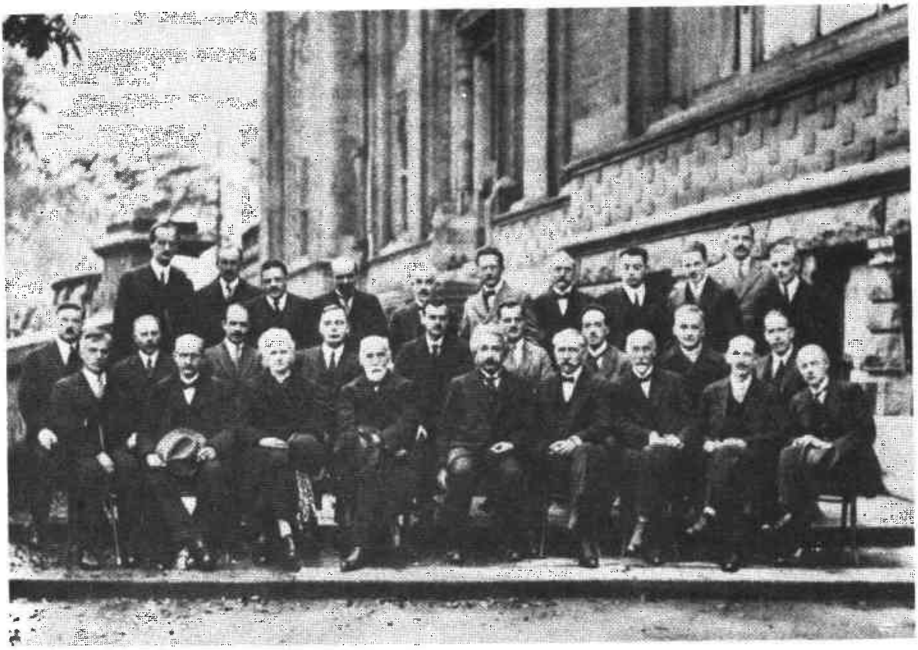
11. Ένα πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}05c$. Με ποια ταχύτητα υ πρέπει να κινείται ένα ηλεκτρόνιο για να έχει την ίδια κινητική ενέργεια με το πρωτόνιο; Δίδεται ότι η μάζα του πρωτονίου είναι 1836 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου.

(**Απ.** 0,95c)

12. α) Δείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός ηλεκτρονίου, με κινητική ενέργεια $E_\kappa = 8$ MeV, που κινείται κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B, μπορεί να προσεγγισθεί από την έκφραση $R = E_\kappa/qBc$ όπου q το φορτίο.

β) Δείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός πρωτονίου, με κινητική ενέργεια $E_\kappa = 8$MeV, που κινείται όπως το ηλεκτρόνιο, μπορεί να προσεγγισθεί από την έκφραση $R = \sqrt{2E_\kappa E_0'}/qBc$ όπου E_0' η ενέργεια ηρεμίας του πρωτονίου.
Δίνονται: ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου $E_0 = 0{,}51$ MeV
ενέργεια ηρεμίας πρωτονίου $E_0' = 938{,}28$ MeV.

14
Κβαντική Φυσική



Η μεγαλύτερη σύναξη ταλέντων φυσικής, Βρυξέλες 1927. Οι περισσότεροι απ' αυτούς είναι τιμημένοι με το Βραβείο Nobel. Από αριστερά προς τα δεξιά.

Πρώτη σειρά : Langmuir, Planck, Curie, Lorentz, Einstein, Langevin, Guye, Wilson, Richardson

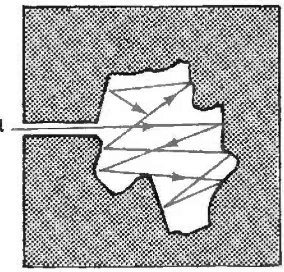
Δεύτερη σειρά: Debye, Knudsen, Bragg, Kramers, Dirac, Compton, de Broglie, Born, Bohr

΄Ορθιοι : Piccard, Henriot, Ehrenfest, Herzen, Donder, Schrödinger, Verschaffelt, Pauli, Heisenberg, Fowler, Brillouin

14.1. Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Το 1900 ξεκίνησε από τον Planck μια επανάσταση στη φυσική η οποία ολοκληρώθηκε 28 χρόνια αργότερα με τη γέννηση της κβαντικής θεωρίας. Η κβαντική φυσική μαζί με τη σχετικότητα αποτελούν τα δυο βάθρα στα οποία στηρίζεται το οικοδόμημα της νεώτερης φυσικής. Η κβαντική φυσική ασχολείται με τα φαινόμενα μικρής κλίμακας, δηλαδή ερμηνεύει τη συμπεριφορά της ύλης στις μικρές διαστάσεις των ατόμων και των υπατομικών σωματιδίων.

Ένα από τα λίγα προβλήματα στα οποία η κλασική φυσική (Μηχανική του Newton και ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell) δεν μπορούσε να δώσει ικανοποιητική εξήγηση, ήταν η ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Ως **μέλαν σώμα** θεωρούμε εκείνο που απορροφάει όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει πάνω του. Ένα μέλαν σώμα μπορεί να προσεγγιστεί άριστα από την κοιλότητα που δείχνει το σχήμα 14.1. Κάθε ακτινοβολία που περνάει από την οπή α και εισέρχεται μέσα στην κοιλότητα, ανακλάται στην ανώμαλη επιφάνεια αυτής μέχρι να απορροφηθεί πλήρως. Έτσι η οπή α στο σχ. 14.1 είναι ένα μέλαν σώμα.



Σχ. 14.1

Λέμε ότι η κοιλότητα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία όταν η ακτινοβολία που απορροφάει είναι ίση με την ακτινοβολία που εκπέμπει στον ίδιο χρόνο. Αυτό γίνεται όταν έχει αποκατασταθεί σταθερή θερμοκρασία στην κοιλότητα. Τότε το μικρό ποσό ακτινοβολίας το οποίο εξέρχεται από την οπή α, λέγεται **ακτινοβολία μέλανος σώματος** και μπορεί να αναλυθεί σε μήκη κύματος και να αποδοθεί γραφικά η ενέργεια που ακτινοβολείται ανά sec από το μέλαν σώμα, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος λ.

Αν με τη συνάρτηση $f(\lambda,T)$ παραστήσουμε το ποσόν της ακτινοβολίας μέλανος σώματος ανά μονάδα επιφανείας, ανά μονάδα χρόνου και με μήκη κύματος μεταξύ λ και $\lambda + \Delta\lambda$ τότε οι καμπύλες του σχήματος 14.2 παριστάνουν τη μεταβολή της $f(\lambda,T)$ σε συνάρτηση με το μήκος κύματος λ. Από το σχήμα φαίνεται ότι η μορφή των καμπύλων εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

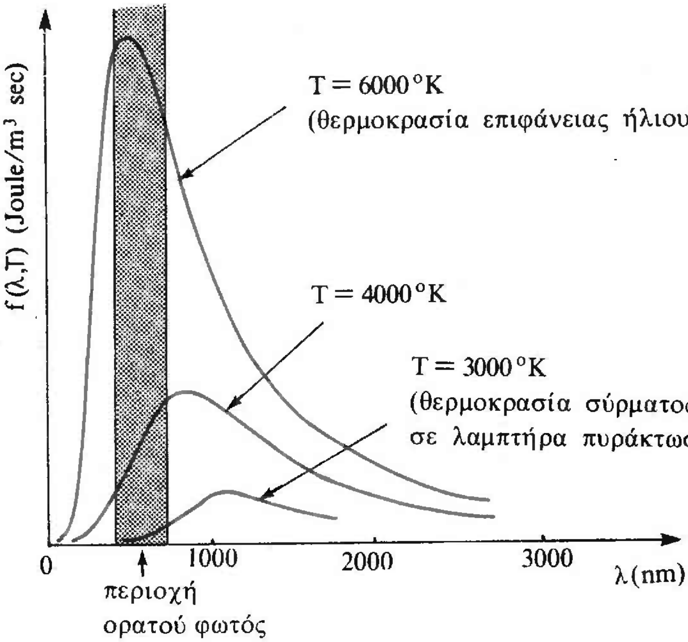
Το εμβαδόν μεταξύ κάθε καμπύλης και του άξονα των λ παριστάνει την ακτινοβολούμενη ισχύ R ανά μονάδα επιφάνειας του μέλανος σώματος, που περιέχει όλα τα μήκη κύματος και που αντιστοιχεί σε ορισμένη θερμοκρασία αυτού.

Η ακτινοβολούμενη ισχύς R βρέθηκε ότι ακολουθεί ένα νόμο που είναι

γνωστός ως **νόμος Stefan-Boltzmann** και ο οποίος έχει τη μορφή

$$\boxed{R = \sigma T^4} \qquad (14.1)$$

όπου σ μια σταθερά που έχει μονάδες $W/m^2\ (°K)^4$.



Σχ. 14.2

Πράγματι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη των 6000 °K είναι 16 φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν που αντιστοιχεί στην καμπύλη των 3000 °K.

Επίσης βρέθηκε ότι μεταξύ του μήκους κύματος λ_m, που αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης και της θερμοκρασίας για την οποία έχει ληφθεί η καμπύλη, υπάρχει η σχέση:

$$\boxed{\lambda_m T = \sigma\tau\alpha\vartheta.} \qquad (14.2)$$

που είναι γνωστή ως **νόμος του Wien**. Δηλαδή τα μεγέθη λ_m και T είναι αντίστροφα ανάλογα. Αυτό σημαίνει ότι όταν η θερμοκρασία του μέλανος σώματος αυξάνεται, τότε το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται το μεγαλύτερο ποσοστό της ακτινοβολίας μικραίνει.

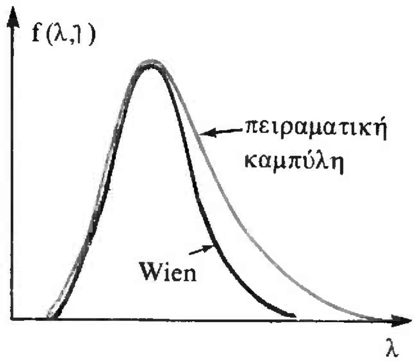
14.2. Προσπάθειες ερμηνείας της ακτινοβολίας μέλανος σώματος

Στα τέλη του περασμένου αιώνα έγιναν σοβαρές προσπάθειες να ερμηνευ-

θούν οι καμπύλες του σχήματος 14.2, δηλαδή να βρεθεί η αναλυτική μορφή της συνάρτησης f(λ,T). Θα αναφέρουμε τις κυριώτερες απ' αυτές.

Το 1893 ο Γερμανός φυσικός Wien στηριζόμενος σε κλασικούς θερμοδυναμικούς συλλογισμούς βρήκε μια μορφή για τη συνάρτηση f(λ,T) η οποία συμφωνούσε με τις πειραματικές καμπύλες μόνο στο τμήμα που αφορά τα μικρά μήκη κύματος, σχ. 14.3.

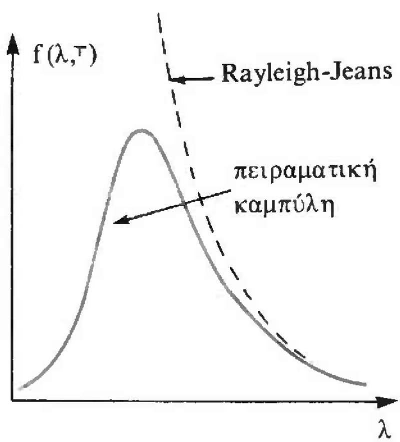
Το 1900 αναπτύχθηκε για την ερμηνεία της f(λ,T) η θεωρία των Rayleigh-Jeans. Σύμφωνα με αυτήν, πηγή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι τα ηλεκτρικά φορτία που υπάρχουν στα τοιχώματα της κοιλότητας. Αυτά συμπεριφέρονται ως απλοί αρμονικοί ταλαντωτές και μπορούν να εκπέμπουν και να απορροφούν ακτινοβολία καθένας με τη χαρακτηριστική του συχνότητα ταλάντωσης. Επειδή λοιπόν στα τοιχώματα της κοιλότητας υπάρχει πολύ μεγάλο πλήθος από τέτοιους ταλαντωτές με ανάλογο πλήθος συχνοτήτων, η ακτινοβολία εμφανίζεται να έχει συνεχές φάσμα συχνοτήτων. Όπως ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής ορισμένης συχνότητας μπορεί να έχει οποιαδήποτε ενέργεια μεταξύ 0 και μιας ανώτατης τιμής, έτσι και οι ταλαντωτές της κοιλότητας μπορούσαν να εκπέμπουν ή να απορροφούν ακτινοβολία με οποιαδήποτε ενέργεια μεταξύ 0 και μιας ανώτατης τιμής. Η μορφή της f(λ,T) που προέκυψε βάσει της θεωρίας αυτής εξηγούσε μόνο το τμήμα των καμπύλων που αντιστοιχεί στα μεγάλα μήκη κύματος σχ. 14.4.



Σχ. 14.3

Έτσι η προσπάθεια να ερμηνευθούν οι καμπύλες με βάση έννοιες της κλασικής φυσικής οδήγησε σε αδιέξοδο.

Το 1900 ο Γερμανός φυσικός Max Planck παρατήρησε ότι αν οι αρμονικοί ταλαντωτές, που υπέθεσε ο Rayleigh, εκπέμπουν ή απορροφούν ενέργεια όχι **συνεχώς** αλλά **διάκριτα**, τότε η συνάρτηση f(λ,T) που προκύπτει από θεωρητικούς υπολογισμούς έχει τέτοια μορφή που ερμηνεύει τις καμπύλες του σχήματος 14.2 σε όλη την έκταση.



Σχ. 14.4

Η βασική αυτή υπόθεση του Planck περιγράφεται από τον τύπο:

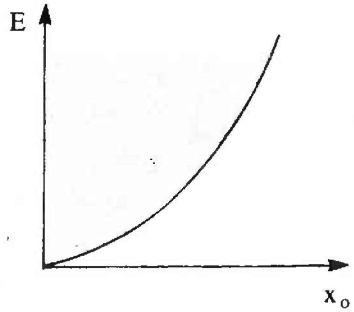
$$E_n = nh\nu \quad n = 0,1,2,3,... \qquad (14.3)$$

όπου E_n η ενέργεια που έχει ένας αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ν και h μια σταθερά η οποία ονομάζεται σταθερά του Planck και είναι ίση με $6{,}626\ 10^{-34}$ Joule sec.

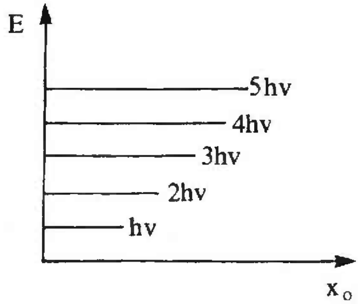
Επομένως η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να πάρει τις τιμές 0, hν, 2hν... . Οι τιμές της ενέργειας ενός ταλαντωτή είναι **διάκριτες** και ονομάζονται **ενεργειακές στάθμες του ταλαντωτή.**

Έτσι στην κλασική φυσική ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής με πλάτος x_o έχει ολική ενέργεια $E = \frac{1}{2} Dx_o^2$. Η Ε μπορεί να πάρει **οποιαδήποτε** τιμή μεταξύ 0 και μιας μέγιστης. Αποδίδεται δε γραφικά από τη **συνεχή** καμπύλη του σχ. 14.5α.

Σύμφωνα με τον Planck η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή παίρνει μόνο διάκριτες τιμές (είναι δηλαδή **κβαντισμένη**) οι οποίες είναι πολλαπλάσια της ποσότητας hν (quantum), σχ. 14.5β. Κατά την απορρόφηση ενέργειας ο απλός αρμονικός ταλαντωτής μεταπηδά από μια τιμή ενέργειας π.χ. 3hν σε μια ανώτερη π.χ. 4hν. Κατά την εκπομπή ενέργειας ο ταλαντωτής μεταπηδά από μια τιμή ενέργειας π.χ. 5hν σε μια κατώτερη π.χ. 4hν. Συνεπώς η απορρόφηση και η εκπομπή ενέργειας από έναν αρμονικό ταλαντωτή γίνεται κατά ποσά hν, σε αντίθεση με την κλασική φυσική που δέχεται ότι η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια σαν κύμα εκπέμπεται και απορροφάται κατά συνεχή τρόπο από τα άτομα.



(α)



(β)

Σχ. 14.5

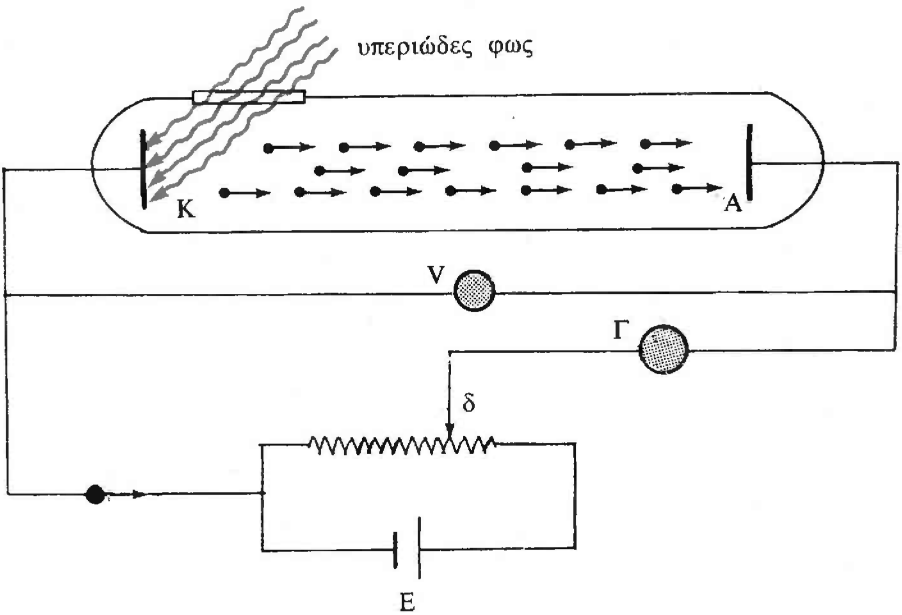
Παρόλο που κάθε ταλαντωτής της κοιλότητας εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία σε ορισμένες συχνότητες, το φάσμα της ακτινοβολίας είναι συνεχές λόγω του μεγάλου πλήθους των ταλαντωτών.

Ο Planck σύζευξε κατά κάποιο τρόπο τις δυο κλασικές θεωρίες των Wien και Rayleigh-Jeans, κάνοντας μια ριζοσπαστική τομή στις ιδέες που υπήρχαν ως τότε για την ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα. Παρόλα αυτά όμως ο ίδιος δεν αμφισβήτησε τον κυματικό χαρακτήρα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, πράγμα που έγινε από τον Einstein στην ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

14.3. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Το 1887 ο Hertz παρατήρησε ότι όταν υπεριώδες φως πέφτει πάνω σε ορισμένα μέταλλα (π.χ. νάτριο, ψευδάργυρος κτλ.) τότε απ' αυτά εκπέμπονται ηλεκτρόνια που ονομάσθηκαν **φωτοηλεκτρόνια** και το φαινόμενο ονομάσθηκε **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.**

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μπορεί να μελετηθεί με την πειραματική διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα 14.6.



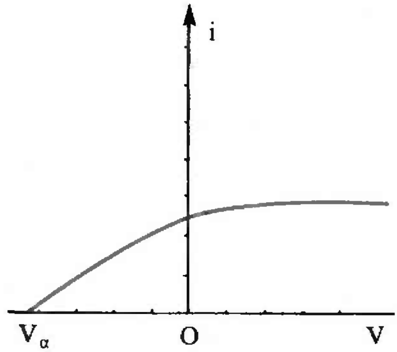
Σχ. 14.6

Η διάταξη αποτελείται από αερόκενο σωλήνα που στα άκρα του έχει μεταλλικά ηλεκτρόδια. Το ένα απ' αυτά είναι καλυμένο με λεπτό φύλο από κάποιο από τα παραπάνω μέταλλα και ονομάζεται φωτοκάθοδος. Το υπεριώδες φως διέρχεται από ένα παράθυρο από χαλαζία και προσπίπτει στη φωτοκάθοδο. Τα φωτοηλεκτρόνια που εκπέμπονται έλκονται από την άνοδο και έτσι σχηματίζεται ένα ρεύμα (φωτοηλεκτρικό) που μετράει το γαλβανόμετρο Γ, σχ. 14.6. Η τάση V που εφαρμόζεται μεταξύ ανόδου-καθόδου μετρείται με το βολτόμετρο V και μπορεί να μεταβάλλεται μέσω του δρομέα δ.

Όπως δείχνει το πείραμα η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος, για ένα συγκεκριμένο μέταλλο της επιφάνειας της φωτοκαθόδου, εξαρτάται από την τάση V, την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και τη συχνότητά της.

Για μια ορισμένη συχνότητα και ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας το ρεύμα μεταβάλλεται με την τάση V όπως δείχνει το σχ. 14.7.

Όπως φαίνεται από τη γραφική αυτή παρτάσταση όταν αυξάνεται η τάση V αυξάνεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα και όταν όλα τα εκπεμπόμενα φωτοηλεκτρόνια φθάνουν στην άνοδο, το φωτοηλεκτρικό ρεύμα αποκτά μέγιστη τιμή η οποία δεν αυξάνεται με την τάση. Επίσης από την ίδια γραφική παράσταση φαίνεται ότι και για $V=0$ το ρεύμα i δεν είναι μηδέν γιατί ένας σημαντικός αριθμός φωτοηλεκτρονίων έχει αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να φθάσουν στην άνοδο. Αν στο κύκλωμα του σχήματος 14.6 αντιστραφεί ο τρόπος σύνδεσης της πηγής Ε, τότε υπάρχει μια τιμή της τάσης για την οποία το φωτοηλεκτρικό ρεύμα μηδενίζεται. Αυτή η τάση ονομάζεται **τάση αποκοπής** V_α.



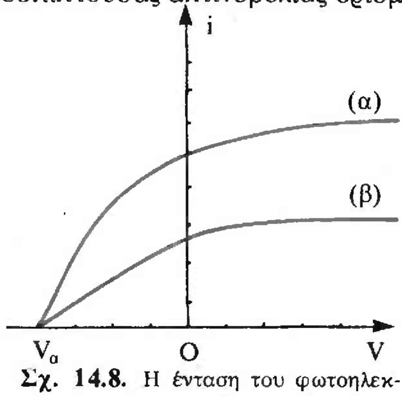
Σχ. 14.7. Μεταβολή της έντασης του φωτοηλεκτρικού ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση.

Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη κινητική ενέργεια που έχουν τα φωτοηλεκτρόνια όταν εκπέμπονται, είναι μικρότερη ή ίση με eV_α, δηλαδή

$$\frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2 \leqslant eV_\alpha$$

όπου m και e η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου αντίστοιχα.

Η μεταβολή της έντασης του φωτοηλεκτρικού ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση για διαφορετικές εντάσεις της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ορισμένης συχνότητας φαίνεται στο σχ. 14.8. όπου η ένταση της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στην καμπύλη (β) είναι το μισό αυτής που αντιστοιχεί στην καμπύλη (α). Όπως φαίνεται από το σχ. 14.8 η τάση αποκοπής V_α είναι ανεξάρτητη από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.



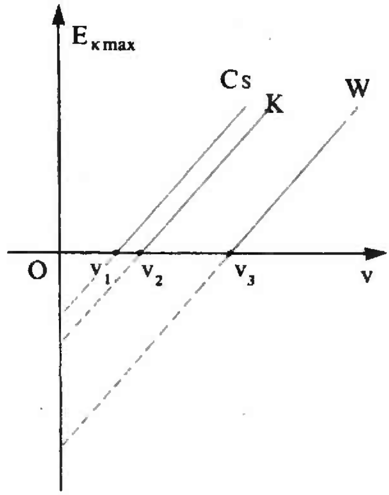
Σχ. 14.8. Η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος είναι ανάλογη της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η ένταση που αντιστοιχεί στην καμπύλη (α) είναι διπλάσια αυτής που αντιστοιχεί στην (β).

Η τάση αποκοπής και συνεπώς η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων, εξαρτάται όπως δείχνει το πείραμα, από τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και από το μέταλλο της επιφάνειας της φωτοκαθόδου. Στο σχήμα 14.9 έχει αποδοθεί γραφικά η

μεταβολή της μέγιστης κινητικής ενέργειας $E_{\kappa max} = \frac{1}{2} m\upsilon^2_{max}$ με τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας για τα μέταλλα Καίσιο, Κάλιο, Βολφράμιο.

Όπως φαίνεται από το σχ. 14.9 για κάθε μέταλλο της επιφάνειας της φωτοκαθόδου υπάρχει μια ορισμένη συχνότητα για την οποία η $E_{\kappa max}$ γίνεται μηδέν και συνεπώς μηδενίζεται και το φωτοηλεκτρικό ρεύμα.

Η συχνότητα αυτή ονομάζεται **συχνότητα κατωφλίου $\nu_{o\rho}$** και είναι ανεξάρτητη από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.



Σχ. 14.9

Από τη μελέτη των καμπύλων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

▶ Εκπομπή φωτοηλεκτρονίων γίνεται μόνον όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερης της $\nu_{o\rho}$, σχ. 14.9.

▶ Η ένταση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος (αριθμός φωτοηλεκτρονίων ανά sec) είναι ανάλογη της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, σχ. 14.8.

▶ Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων μεταβάλλεται γραμμικά με τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, σχ. 14.9 και είναι ανεξάρτητη από την έντασή της.

▶ Η εκπομπή των φωτοηλεκτρονίων γίνεται αμέσως μόλις η ακτινοβολία πέσει πάνω στη φωτοκάθοδο.

Τα συμπεράσματα αυτά δεν μπορούν να ερμηνευθούν με την κλασική φυσική διότι:

1ο Σύμφωνα με την κλασική φυσική, η ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας κατανέμεται ομοιόμορφα στα ηλεκτρόνια της επιφάνειας της φωτοκαθόδου και απορροφάται απ' αυτά συνεχώς μέχρις ότου αποκτήσουν ενέργεια αρκετή ώστε να υπερνικήσουν τις ελκτικές δυνάμεις των πυρήνων και να γίνουν φωτοηλεκτρόνια. Επειδή όμως ο αριθμός των ηλεκτρονίων της φωτοκαθόδου είναι πολύ μεγάλος, είναι δύσκολο να αποκτήσει ένα ηλεκτρόνιο το απαιτούμενο ποσό ενέργειας ώστε να γίνει φωτοηλεκτρόνιο. Συνεπώς όταν η ένταση της ακτινοβολίας είναι μικρή δεν πρέπει να εκπέμπεται κανένα φωτοηλεκτρόνιο, ή για να εκπεμφθεί πρέπει να περάσει πολύς χρόνος σε αντίθεση με τα πειραματικά δεδομένα.

2ο Σύμφωνα με την κλασική φυσική δεν έπρεπε να υπάρχει οριακή συχνότητα, αφού όλες οι ακτινοβολίες ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους, συνεισφέρουν στο να αποκτήσουν τα ηλεκτρόνια της επιφάνειας της φωτοκαθόδου την απαιτούμενη ενέργεια για να αποδεσμευθούν απ' αυτή.

3ο Το πειραματικό δεδομένο ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, έρχεται σε αντίθεση με την κλασική φυσική η οποία προβλέπει ότι όταν αυξάνεται η ένταση της ακτινοβολίας, αυξάνεται η ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια και συνεπώς πρέπει αυτά να εξέρχονται με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

Ενώ συνεχείς έλεγχοι των πειραματικών δεδομένων επιβεβαίωναν τα συμπεράσματα που εκθέσαμε και την αδυναμία τις κλασικής φυσικής να τα ερμηνεύσει, οι ιδέες του Planck για την ασυνέχεια στην εκπομπή και την απορρόφηση της ακτινοβολίας δεν είχαν γίνει αποδεκτές.

Ο Einstein κάνοντας αποδεκτή την ιδέα του Planck, ότι τα άτομα εκπέμπουν και απορροφούν την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατά κβάντα, την διεύρυνε υποθέτοντας ότι **η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (ηλεκτρομαγνητικό κύμα) είναι η ίδια συμπυκνωμένη σε δέματα ενέργειας (κβάντα) τα οποία ονομάσθηκαν φωτόνια.** Η ενέργεια Ε των φωτονίων σχετίζεται άμεσα με τη συχνότητα ν του ηλεκτρομαγνητικού κύματος μέσω της σχέσης

$$E = h\,\nu \qquad (14.4)$$

Η υπόθεση αυτή του Einstein βρίσκεται σε πλήρη αντίθεση με την κλασική φυσική σύμφωνα με την οποία το φως και γενικά η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως είχε υποτεθεί από το Maxwell και είχε επαληθευτεί πειραματικά από τον Hertz.

Η ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινόμενου παρουσιάστηκε από τον Einstein το 1905, βασίζεται στην υπόθεση των φωτονίων και τα κύρια σημεία της είναι τα ακόλουθα. Για να αποδεσμευθεί ένα ηλεκτρόνιο από τη φωτοκάθοδο απαιτείται ενέργεια $W_{\varepsilon\xi}$, η οποία ονομάζεται έργο εξαγωγής, είναι ανεξάρτητη της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και είναι χαρακτηριστική για το μέταλλο της επιφάνειας της φωτοκαθόδου. Η ενέργεια που προσδίνει ένα φωτόνιο ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε ένα ηλεκτρόνιο είναι hν και αν $h\nu > W_{\varepsilon\xi}$ τότε το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από το μέταλλο με κινητική ενέργεια E_κ που ισούται με

$$\boxed{E_\kappa = \frac{1}{2}\,m\upsilon^2 = h\nu - W_{\varepsilon\xi}} \qquad (14.5)$$

με την προϋπόθεση ότι θεωρείται αμελητέα κάθε άλλη απώλεια ενέργειας όπως π.χ. να συγκρουσθεί το ηλεκτρόνιο με ιόντα κατά την έξοδό του από το μέταλλο.

Η σχέση (14.5) είναι γνωστή ως **φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein** και απ' αυτή προκύπτουν όλα τα συμπεράσματα που αναφέραμε. Έτσι αν

$h\nu < W_{\varepsilon\xi}$ ή $\nu < W_{\varepsilon\xi}/h$ τότε δεν είναι δυνατό να αποδεσμευτούν ηλεκτρόνια από την επιφάνεια της φωτοκαθόδου. Το πηλίκο $W_{\varepsilon\xi}/h$ έχει διαστάσεις συχνότητας και είναι η συχνότητα κατωφλίου $\nu_{o\varrho}$, δήλαδή,

$$\nu_{o\varrho} = \frac{W_{\varepsilon\xi}}{h} \tag{14.6}$$

Όταν $h\nu = W_{\varepsilon\xi}$ τότε τα ηλεκτρόνια εξέρχονται με κινητική ενέργεια ίση με μηδέν, αλλά έλκονται από την άνοδο και δημιουργείται φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Για $h\nu > W_{\varepsilon\xi}$ τότε $\nu > \nu_{o\varrho}$, οπότε τα ηλεκτρόνια έχουν αρκετή κινητική ενέργεια ώστε να φθάσουν στην άνοδο ακόμα και αν η διαφορά δυναμικού είναι μηδέν ή η πηγή έχει συνδεθεί αντίθετα. Επίσης για $\nu > \nu_{o\varrho}$, όταν αυξάνει η ένταση της ακτινοβολίας πληθαίνει ο αριθμός των φωτονίων που προσπίπτουν ανά μονάδα χρόνου στην κάθοδο, αυξάνει ο αριθμός των φωτοηλεκτρονίων και έτσι αυξάνει η ένταση του ρεύματος, όπως φαίνεται στις καμπύλες του σχήματος 14.8.

Στην περίπτωση της ανάστροφης σύνδεσης της πηγής, όταν μηδενίζεται το ρεύμα τότε ισχύει

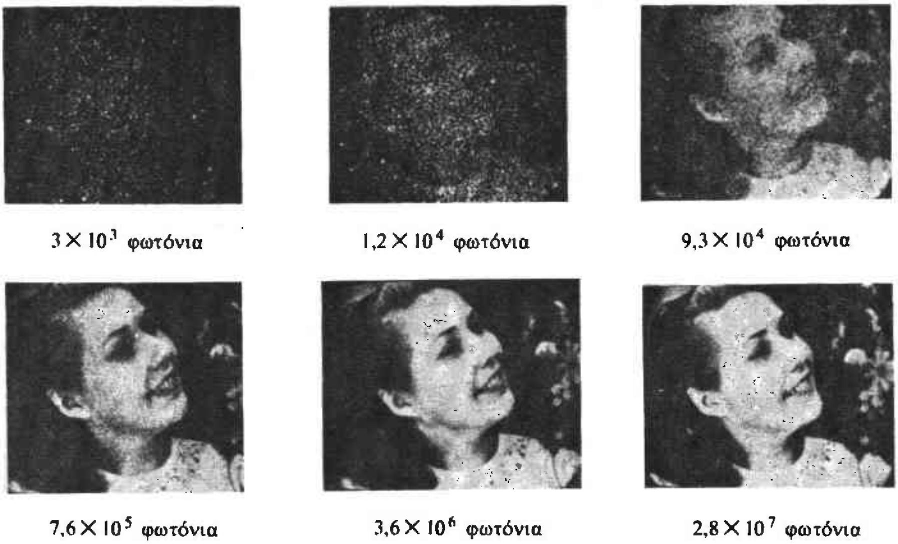
$$E_{\kappa max} = h\nu - W_{\varepsilon\xi} = eV_{\alpha} \Rightarrow V_{\alpha} = \frac{h\nu}{e} - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e} \tag{14.7}$$

Η σχέση (14.7) είναι πρώτου βαθμού και η γραφική της παράσταση αποδίδει πλήρως τη γραμμική εξάρτηση της τάσης V_{α} από τη συχνότητα ν όπως δείχνει η γραφική παράσταση των πειραματικών δεδομένων στο σχήμα 14.9.

Το πειραματικό δεδομένο ότι τα φωτοηλεκτρόνια εκπέμπονται αμέσως μόλις προσπέσει η ακτινοβολία στην κάθοδο, δικαιολογείται εύκολα γιατί η ενέργεια που απαιτείται γι' αυτό προσφέρεται συγκεντρωμένη υπό τη μορφή του φωτονίου.

Η πλήρης ερμηνεία των συμπερασμάτων και ο πειραματικός έλεγχος της φωτοηλεκτρικής εξίσωσης δικαίωσαν πλήρως την υπόθεση του Einstein ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (ηλεκτρομαγνητικά κύματα) είναι φωτόνια και ότι υπό τη μορφή αυτή απορροφάται από την ύλη σε συμφωνία με την υπόθεση του Planck.

Η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, η οποία όπως ορίστηκε στην παράγραφο 12.3 εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρει το κύμα ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου, αποδίδει τον αριθμό των φωτονίων τα οποία διέρχονται από μοναδιαία επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου. Αυτό συμφωνεί με την εικόνα 14.10 στην οποία το ίδιο πρόσωπο έχει φωτογραφηθεί, μέσω κατάλληλης διάταξης, με φως του οποίου η ένταση αυξάνεται σταδιακά.



Σχ. 14.10

Παράδειγμα

Για ένα ορισμένο μέταλλο που χρησιμοποιείται στη φωτοκάθοδο, η τάση αποκοπής μεταβάλλεται με τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση.

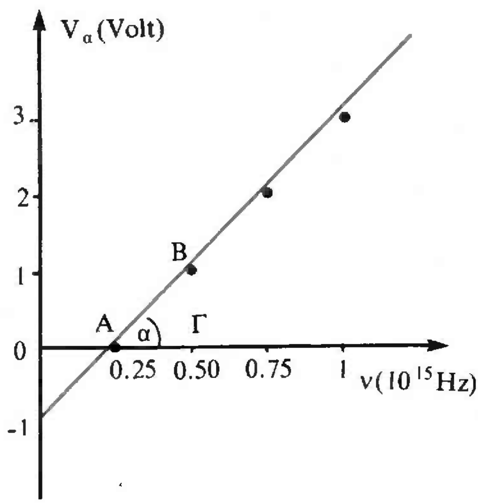
(Οι τελείες αντιστοιχούν στις τιμές που μετρήθηκαν και βάσει αυτών έχει χαραχθεί η ευθεία).

Από τη γραφική παράσταση να υπολογιστούν:

1) Το έργο εξαγωγής του μετάλλου.

2) Η τιμή της σταθεράς του Planck.

Δίνεται φορτίο ηλεκτρονίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$Cb.



Λύση

1) Σύμφωνα με την εξίσωση (14.7) πρέπει $V_\alpha = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}$

και για $\nu = 0 \Rightarrow V_\alpha = -\frac{W_{\varepsilon\xi}}{e} \Rightarrow \quad W_{\varepsilon\xi} = -V_\alpha e.$

Αντικαθιστώντας $V_\alpha = -1$ Volt προκύπτει: $W_{\varepsilon\xi} = 1$ eV

2) Η σταθερά του Planck θα υπολογιστεί από την κλίση της ευθείας. Αν V_α και V'_α δυο τιμές της τάσης αποκοπής που αντιστοιχούν στις συχνότητες ν και ν', οι εξισώσεις που τις δίνουν είναι

$$V_\alpha = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}$$

$$\text{και} \quad V'_\alpha = \frac{h}{e}\nu' - \frac{W_{\varepsilon\xi}}{e}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις προκύπτει:

$$V_\alpha - V'_\alpha = \frac{h}{e}(\nu - \nu') \Rightarrow \frac{h}{e} = \frac{V_\alpha - V'_\alpha}{\nu - \nu'}$$

Επιλέγοντας τις συντεταγμένες V_α και ν του σημείου Α της ευθείας και τις συντεταγμένες V'_α και ν' ενός άλλου σημείου π.χ. του Β, τότε ο λόγος $\frac{V_\alpha - V'_\alpha}{\nu - \nu'}$ είναι η εφαπτομένη της γωνίας α του τριγώνου ΑΒΓ.

Από το τρίγωνο υπολογίζεται ότι εφα $= \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{0{,}25 \cdot 10^{15}}$ Volt/Hz.

Άρα $\frac{h}{e} = \frac{1}{0{,}25 \cdot 10^{15}}$ Volt/Hz $\Rightarrow h = \frac{1}{0{,}25 \cdot 10^{15}}\, 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb Volt/Hz $\Rightarrow$

$h = 6{,}4 \cdot 10^{-34}$ Joule sec.

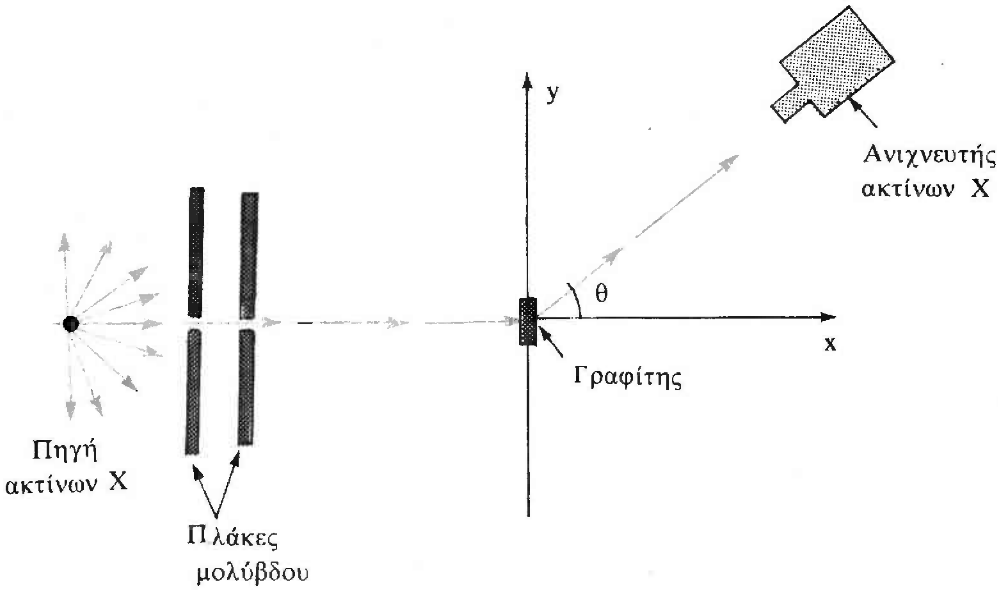
14.4. Φαινόμενο Compton.

Μια άλλη επιβεβαίωση της παραδοχής ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι φωτόνια δόθηκε από τον Α. Compton το 1923.

Ο Compton παρατήρησε ότι όταν μια δέσμη ακτίνων Χ μήκους κύματος λ έπεφτε πάνω σε ένα κομμάτι γραφίτη, σχήμα 14.11, τότε ο ανιχνευτής έδειχνε την ύπαρξη ακτίνων Χ με μήκη κύματος λ και λ' όπου λ' > λ και ότι το λ' μεταβάλλεται με την γωνία θ. Χρησιμοποιώντας ακτίνες Χ με μήκος κύματος $\lambda = 0{,}708$ Å, υπολόγισε από τα πειραματικά δεδομένα τη διαφορά $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$

για διάφορες γωνίες θ, όπως παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί.

$\Delta\lambda(10^{-13}m)$	θ
7	45°
23	90°
39	135°



Σχ. 14.11

Η ύπαρξη στην ανακλώμενη δέσμη ακτίνων X με μήκος κύματος $\lambda' > \lambda$ ήταν αδύνατο να ερμηνευθεί με βάση την κλασική άποψη για τις ακτίνες X, ότι δηλαδή αυτές είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα, γιατί τότε τα ηλεκτρόνια του γραφίτη έπρεπε να εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση της ίδιας συχνότητας με αυτή που έχουν οι προσπίπτουσες ακτίνες. Έτσι όμως θα επανεκπέμπονταν ακτίνες X που η συχνότητα και το μήκος κύματός τους θα ήταν ίδια με αυτά της προσπίπτουσας δέσμης.

Ο Compton για να ερμηνεύσει τα πειραματικά δεδομένα έκανε αποδεκτή την άποψη ότι όταν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αλληλεπιδρά με την ύλη, εμφανίζεται με τη μορφή φωτονίων και υπέθεσε ότι **τα φωτόνια συγκρούον-**

ται με τα ελεύθερα* ηλεκτρόνια του γραφίτη σύμφωνα με τους νόμους της Μηχανικής.

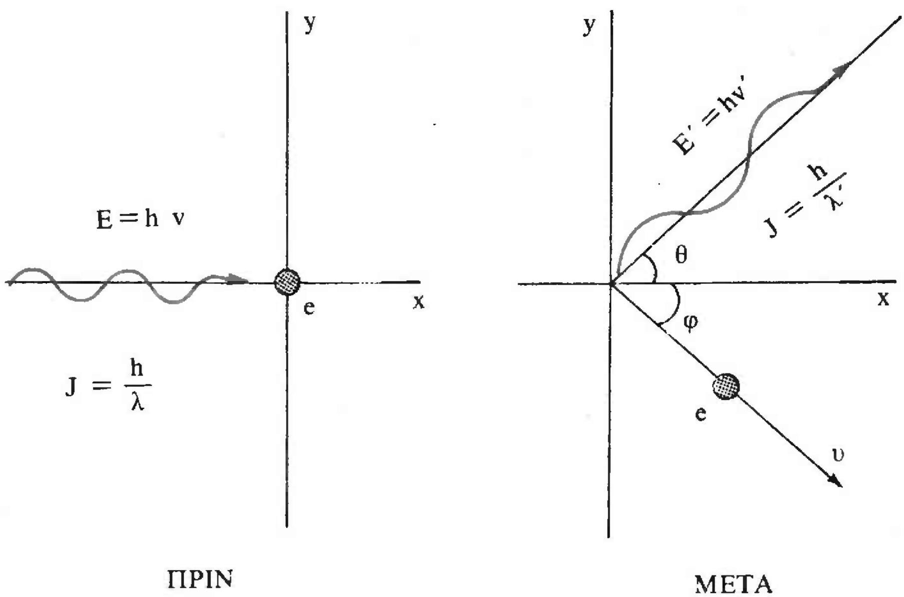
Στα φωτόνια η ειδική θεωρία της σχετικότητας αποδίδει ορμή J που υπολογίζεται ως εξής.

Από τη σχέση (13.17) $E^2 = E_o^2 + (Jc)^2$ και επειδή τα φωτόνια έχουν $E_o = 0$ προκύπτει ότι

$$J = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \boxed{J = \frac{h}{\lambda}} \qquad (14.8)$$

Μια κρούση ενός φωτονίου με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο φαίνεται στο σχήμα 14.12, όπου έχουν σχεδιαστεί οι διευθύνσεις στις οποίες κινούνται το φωτόνιο που προκύπτει από την κρούση και το ηλεκτρόνιο.

Κατά την κρούση του φωτονίου με το ηλεκτρόνιο ένα μέρος από την αρχική ενέργεια του κβάντουμ (E = hν) μεταφέρεται στο ηλεκτρόνιο, ενώ το



Σχ. 14.12

* Στην προκειμένη περίπτωση ελεύθερα ηλεκτρόνια θεωρούνται εκείνα στα οποία η ενέργεια που απαιτείται για την απομάκρυνσή τους από το άτομο, είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια των φωτονίων των ακτίνων X.

φωτόνιο που προκύπτει έχει ενέργεια ($E' = h\nu'$) μικρότερη από την αρχική. Έτσι έχουμε:

$$E' < E \quad \text{ή} \quad h\nu' < h\nu \quad \text{ή} \quad \nu' < \nu \quad \text{ή} \quad \frac{c}{\lambda'} < \frac{c}{\lambda} \quad \text{ή} \quad \lambda' > \lambda$$

πράγμα που εξηγεί γιατί στην επανεκπεμπόμενη δέσμη υπάρχουν ακτίνες Χ με μήκος κύματος λ΄ μεγαλύτερο από το αρχικό λ.

Αν εφαρμοστούν οι αρχές διατήρησης της ορμής και της ενέργειας για την κρούση του φωτονίου με το ηλεκτρόνιο και χρησιμοποιηθεί η ειδική θεωρία της σχετικότητας, μπορεί να υπολογισθεί η διαφορά μεταξύ των μηκών κύματος λ΄ και λ. Έτσι βρέθηκε ότι:

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_o c}(1 - \text{συν}\theta)} \qquad (14.9)$$

όπου m_o η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου. Όπως φαίνεται από τη σχέση αυτή το Δλ εξαρτάται από τη γωνία θ και συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα, αν αντικατασταθούν τα h, m_o, c από τις τιμές τους και το θ πάρει τιμές από αυτές που δίνονται στον πίνακα. (βλέπε παράδειγμα 1).

Η ύπαρξη στην επανεκπεμπόμενη δέσμη ακτίνων Χ με μήκος κύματος ίσο με το αρχικό, μπορεί να ερμηνευθεί πάλι με τη βοήθεια της σχέσης (14.9), αν θεωρήσουμε ότι το φωτόνιο των ακτίνων Χ συγκρούεται με ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο. Επειδή αυτό δεν μπορεί να απομακρυνθεί από το άτομο, η μάζα του σώματος με το οποίο συγκρούεται το φωτόνιο είναι η μάζα του ατόμου που είναι τουλάχιστον 10^4 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Έτσι η διαφορά Δλ θα είναι της τάξης 10^{-4} Å και δεν μπορεί να ανιχνευθεί πειραματικά. (βλέπε παράδειγμα 2).

Σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι η ερμηνεία του φαινομένου Compton απέδειξε την ορθότητα όχι μόνο της υπόθεσης του Einstein, ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι φωτόνια, αλλά και της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί η διαφορά Δλ, αν η γωνία θ είναι 90° και να συγκριθεί με τις τιμές του πίνακα.
Δίνονται: $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Joule sec, $m_o = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ Kgr, $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec.

Λύση

Αντικαθιστώντας στη σχέση 14.9 έχουμε:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}(1-\sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ 3\cdot 10^{8}}(1-\sigma\upsilon\nu 90^{o})m \Rightarrow \Delta\lambda = 24{,}2\cdot 10^{-13}m$$

Η τιμή αυτή συμφωνεί με αυτή που δίνεται στον πίνακα.

Παράδειγμα 2

Αν υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο συγκρούεται με ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο, να εκτιμήσετε με τη βοήθεια της σχέσης 14.9 την τάξη μεγέθους της διαφοράς Δλ. Δίνονται:

$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$Kgr, $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Joule sec και $c = 3\cdot 10^{8}$m/sec.

Λύση

Αν Μ είναι ο μαζικός αριθμός του ατόμου, η μάζα του είναι Μ m_p όπου m_p η μάζα του πρωτονίου.

Αντικαθιστώντας στη σχέση 14.9 έχουμε

$$\Delta\lambda = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{M\ 1{,}67\cdot 10^{-27}\ 3\cdot 10^{8}}(1-\sigma\upsilon\nu\theta)m$$

$$\Delta\lambda = \frac{1{,}32}{M}(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\times 10^{-15}m \quad \acute{\eta} \quad \Delta\lambda \simeq 10^{-5}\ \text{Å}.$$

Μεταβολή του μήκους κύματος κατά 10^{-5} Å, όταν οι ακτίνες Χ έχουν μήκη κύματος της τάξης του Å, σημαίνει ότι η προσπίπτουσα και η επανεκπεμπόμενη δέσμη έχουν το ίδιο μήκος κύματος.

Πρόβλημα

Με τη βοήθεια των αρχών διατήρησης της ενέργειας και της ορμής να εξαχθεί ο τύπος (14.9) του φαινομένου Compton.

Λύση

Το προσπίπτον φωτόνιο έχει ενέργεια hν και ορμή

με μέτρο $J = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Το εξερχόμενο φωτόνιο έχει ενέργεια hν΄ και μέτρο ορμής $J' = \frac{h}{\lambda'}$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας γράφεται

$$h\nu + E_o = h\nu' + E \qquad (1)$$

όπου E_o και E η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου και η ενέργεια αυτού μετά την κρούση.

Η (1) γράφεται:

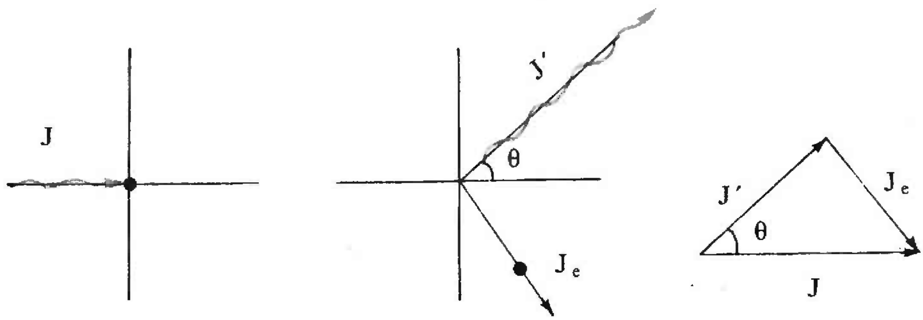
$$h\nu - h\nu' = E - E_o \qquad (2)$$

ή

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' = E^2 + E_o^2 - 2EE_o$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (13.17)

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' = E_o^2 + (J_e c)^2 + E_o^2 - 2EE_o \qquad (3)$$



Πριν την κρούση   Μετά την κρούση   Διάγραμμα ορμών

Η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται

$$\vec{J}' + \vec{J}_e = \vec{J}$$

ή $\vec{J} - \vec{J}' = \vec{J}_e$

ή $J^2 + J'^2 - 2JJ'\,\text{συν}\theta = J_e^2$ ή $J^2c^2 + J'^2c^2 - 2JJ'c^2\text{συν}\theta = J_e^2c^2$ ή σύμφωνα με τη σχέση (13.18) $h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\,\text{συν}\theta = (J_e c)^2$ (4)

Αντικαθιστώντας στη (3) το $(J_e c)^2$ από την (4) έχουμε

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' = 2E_o^2 + h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\,\text{συν}\theta - 2EE_o$$

ή $-2h^2\nu\nu' = -2h^2\nu\nu'\,\text{συν}\theta + 2E_o^2 - 2EE_o$ ή $-2h^2\nu\nu'(1-\text{συν}\theta) = -2E_o(E - E_o)$

ή λαμβάνοντας υπόψη τη (2) $h^2\nu\nu'(1-\text{συν}\theta) = m_o c^2(h\nu - h\nu')$ ή

$$\frac{h}{m_o c}(1-\text{συν}\theta) = \frac{c(\nu-\nu')}{\nu\nu'} = \lambda' - \lambda$$

14.5. Ατομικό πρότυπο του Bohr

Η κατανόηση των διεργασιών που γίνονται στα άτομα κατά την εκπομπή ή την απορρόφηση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, σχετίζεται άμεσα με τη γνώση της δομής των ατόμων. Μετά την αποδοχή της κβάντωσης των ενεργειακών σταθμών και της σωματιδιακής συμπεριφοράς του φωτός, τα ατομικά πρότυπα έπρεπε να είναι σε συμφωνία με τις νέες αυτές αλήθειες.

Το 1911 ο Rutherford αναλύοντας τα πειραματικά δεδομένα που προέκυπταν από το βομβαρδισμό λεπτών μεταλλικών φύλων με σωματίδια α κατέληξε στο πλανητικό πρότυπο των ατόμων σύμφωνα με το οποίο τα ηλεκτρόνια περιφέρονται γύρω από τον πυρήνα όπως οι πλανήτες γύρω από τον ήλιο.

Ο πυρήνας του ατόμου έχει διάμετρο της τάξης 10^{-15}m και φέρει το θετικό ηλεκτρικό φορτίο ενώ τα ηλεκτρόνια περιφέρονται σε κυκλικές τροχιές διαμέτρου της τάξης 10^{-10}m. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων του πυρήνα και έτσι το άτομο εμφανίζεται ηλεκτρικά ουδέτερο.

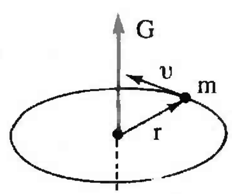
Το πρότυπο αυτό αν και ερμήνευε τα πειραματικά δεδομένα για τις αποκλίσεις των σωματιδίων α δεν μπορούσε να γίνει αποδεκτό για τον εξής λόγο.

Σύμφωνα με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell αφού τα ηλεκτρόνια κινούνται σε κυκλική τροχιά και συνεπώς έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση, πρέπει να ακτινοβολούν. Τότε όμως η ενέργεια των ηλεκτρονίων και συνεπώς η ακτίνα της τροχιάς τους θα μίκραινε συνεχώς και τελικά θα έπεφταν πάνω στον πυρήνα σε αντίθεση με το ίδιο το πρότυπο.

Την αντίφαση αυτή του προτύπου του Rutherford έλυσε ο Niels Bohr το 1913, χρησιμοποιώντας στοιχεία της κλασικής φυσικής και τα συμπεράσματα των εργασιών των Planck και Einstein. Συγκεκριμένα ο Bohr διατύπωσε αξιωματικά (χωρίς να υπάρχει αιτιολόγηση) τις ακόλουθες τρεις προτάσεις:

I. Ένα ηλεκτρόνιο σ' ένα άτομο μπορεί να κινείται γύρω από τον πυρήνα σε καθορισμένες κυκλικές τροχιές σταθερής ακτίνας, υπό την επίδραση δυνάμεων Coulomb, σύμφωνα με τους νόμους του Newton, χωρίς όμως να εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Οι τροχιές αυτές ονομάζονται επιτρεπτές και η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε κάθε μία απ' αυτές παραμένει σταθερή.

II. Επιτρεπτές τροχιές είναι αυτές για τις οποίες η στροφορμή* του



* Σε ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r με ταχύτητα $\vec{υ}$, αποδίδουμε ένα διανυσματικό μέγεθος που λέγεται στροφορμή $\vec{G}$ και το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς, σημείο εφαρμογής το κέντρο του κύκλου, φορά τέτοια που να συμφωνεί με τη φορά δεξιόστροφου κοχλία και μέτρο G = mυr.

ηλεκτρονίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ποσότητας $h/2\pi$ όπου h η σταθερά του Planck. Έτσι για ένα ηλεκτρόνιο που κινείται σε τροχιά ακτίνας r, ισχύει:

$$\boxed{m\upsilon r = nh/2\pi} \qquad n = 1,2,3,... \qquad (14.10)$$

όπου m, υ η μάζα και η ταχύτητα του ηλεκτρονίου και n ακέραιος αριθμός που ονομάζεται κβαντικός αριθμός της τροχιάς r.

III. Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία εκπέμπεται ή απορροφάται κατά κβάντα όταν το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει από μια επιτρεπτή τροχιά σε μία άλλη. Η συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται ή απορροφάται είναι:

$$\nu = \frac{E_{αρχ} - E_{τελ}}{h} \qquad (14.11)$$

όπου $E_{αρχ}$ η ενέργεια του ηλεκτρονίου στην αρχική του τροχιά και $E_{τελ.}$ η ενέργεια στην τελική.

Αν $E_{αρχ} > E_{τελ}$ γίνεται εκπομπή ενώ αν $E_{αρχ} < E_{τελ}$ γίνεται απορρόφηση ενέργειας από το άτομο.

Οι παραπάνω προτάσεις συγκροτούν ένα πρότυπο ατόμου του οποίου η συμπεριφορά είναι σύμφωνη με το ότι οι ενεργειακές καταστάσεις είναι κβαντισμένες και η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία εκπέμπεται ή απορροφάται κατά κβάντα.

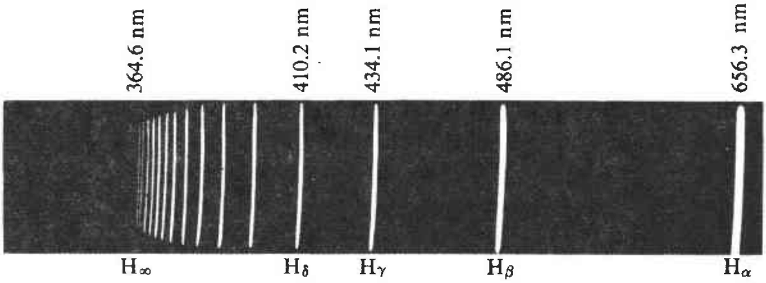
Σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr, όταν το άτομο δεν υφίσταται την επίδραση εξωτερικών αιτίων τα οποία μπορούν να μεταβάλλουν την ενεργειακή κατάσταση των ηλεκτρονίων, π.χ. ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, τότε τα ηλεκτρόνια περιφέρονται στις επιτρεπτές τροχιές στις οποίες έχουν την ελάχιστη ενέργεια. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η ενέργεια του ατόμου, αν αγνοήσουμε την ενέργεια λόγω μεταφοράς ή περιστροφής, γίνεται ελάχιστη και η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το άτομο ονομάζεται **θεμελιώδης**.

14.6. Ερμηνεία του φάσματος εκπομπής του Υδρογόνου σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr

Το ατομικό πρότυπο του Bohr χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία στον προσδιορισμό του μήκους κύματος των ακτινοβολιών που εκπέμπονται από διηγερμένα άτομα Η. Όπως γνωρίζουμε, αν ένας γυάλινος σωλήνας που περιέχει Η σε χαμηλή πίεση* συνδεθεί σε υψηλή τάση (π.χ. δευτερεύον

* Σε συνθήκες χαμηλής πίεσης η πυκνότητα είναι τόσο μικρή ώστε η συμπεριφορά του αερίου να χαρακτηρίζεται από τη συμπεριφορά των ατόμων του και όχι από τη συμπεριφορά των μορίων του.

επαγωγικού πηνίου) τότε εκπέμπει ακτινοβολία, η οποία αν αναλυθεί σε φασματοσκόπιο δίνει γραμμικό φάσμα όπως αυτό που εικονίζεται στο σχήμα 14.13.



Σχ. 14.13

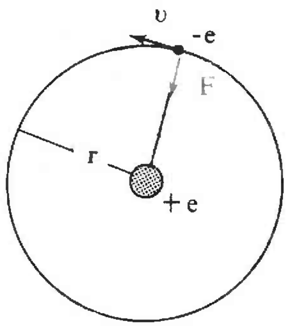
Ας θεωρήσουμε ένα άτομο Η. Αυτό αποτελείται από ένα πρωτόνιο γύρω από το οποίο περιστρέφεται σε μία από τις επιτρεπτές τροχιές το μοναδικό ηλεκτρόνιο, σχ. 14.14.

Σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr στο ηλεκτρόνιο ασκείται δύναμη Coulomb που έχει μέτρο

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{r^2} \qquad (14.12)$$

Η δύναμη αυτή είναι η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη της κυκλικής κίνησης, που σύμφωνα με τη κλασική σχέση $F = m\gamma$ έχει μέτρο.

$$F = \frac{m\upsilon^2}{r} \qquad (14.13)$$



Σχ. 14.14

Η ακτίνα της επιτρεπτής τροχιάς καθορίζεται από τη δεύτερη πρόταση του Bohr και γι' αυτήν θα ισχύει:

$$m\upsilon r = n\,\frac{h}{2\pi} \qquad n = 1,2,3,... \qquad (14.14)$$

Από τις σχέσεις (14.12), (14.13) και (14.14) βρίσκεται ότι οι ακτίνες των επιτρεπτών τροχιών και οι ταχύτητες του ηλεκτρονίου σ' αυτές, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$r = \varepsilon_0 \frac{n^2h^2}{\pi m e^2} \quad (14.15)$$

και

$$\upsilon = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2}{2nh} \quad (14.16)$$

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E_\kappa = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

και

$$E_\Delta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

που λόγω των σχέσεων (14.15) και (14.16) γράφονται:

$$E_\kappa = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2} \quad (14.17)$$

και

$$E_\Delta = -\frac{2}{\varepsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2} \quad (14.18)$$

Η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε μια επιτρεπτή τροχιά που καθορίζεται από τον κβαντικό αριθμό n είναι:

$$E = E_\Delta + E_\kappa = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2} \qquad n = 1,2,3,... \quad (14.19)$$

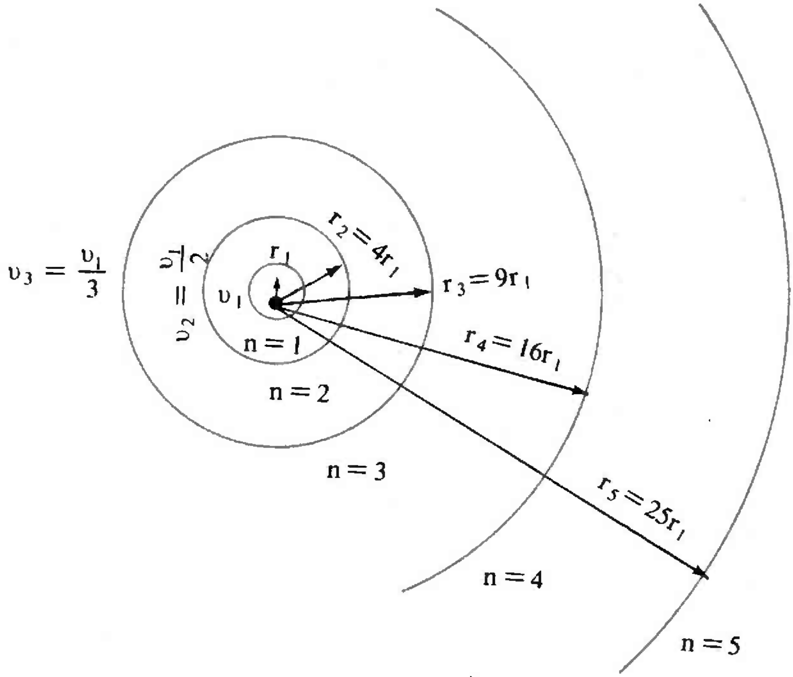
Επειδή ο πυρήνας έχει μάζα πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου και συνεπώς θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω απ' αυτόν, η ενέργεια του ατόμου δίνεται από τη σχέση (14.19)*. Το πρόσημο μείον στη σχέση αυτή εκφράζει το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο είναι δεσμευμένο στον πυρήνα και ότι για να αυξηθεί η μεταξύ τους απόσταση πρέπει να προσφερθεί εξωτερικά ενέργεια.

Στο σχήμα 14.15 έχουν σχεδιασθεί σε μεγέθυνση οι ακτίνες των επιτρεπτών τροχιών του ηλεκτρονίου στο άτομο του H. Με r_1 και υ_1 συμβολίζονται η ακτίνα και η ταχύτητα που προκύπτουν από τις σχέσεις (14.15) και (14.16), για n = 1.

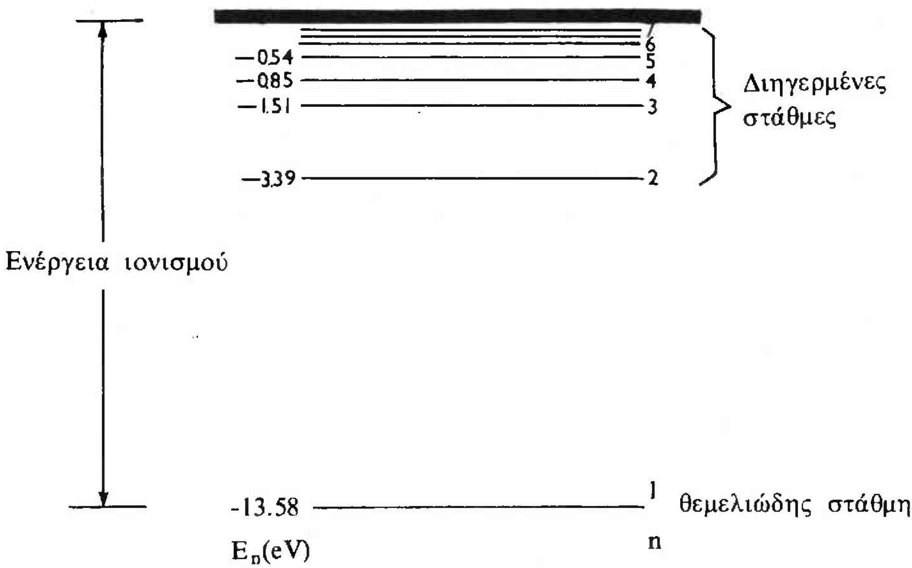
Εξάλλου οι τιμές της ενέργειας του ατόμου του H (ενεργειακές στάθμες) μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση (14.19) και να αποδοθούν γραφικά όπως φαίνεται στο σχήμα 14.16.

---

* Η κινητική ενέργεια του ατόμου λόγω μεταφοράς και περιστροφής θεωρείται αμελητέα.



Σχ. 14.15



Σχ. 14.16

Όπως φαίνεται από το σχήμα 14.16 οι ενεργειακές στάθμες είναι διάκριτες για μικρούς κβαντικούς αριθμούς, ενώ για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς γίνονται πολύ πυκνές ώστε η ενέργεια του ατόμου να αυξάνει σχεδόν συνεχώς. Τότε όμως το ηλεκτρόνιο βρίσκεται τόσο μακρυά από τον πυρήνα ώστε το άτομο να θεωρείται ιονισμένο. Η ενέργεια που απαιτείται για να ιονιστεί ένα άτομο ονομάζεται ενέργεια ιονισμού.

Από τη σχέση (14.19) φαίνεται ότι η ενέργεια του ατόμου του Η είναι ελάχιστη για $n = 1$, γιατί τότε η Ε παίρνει τη μέγιστη αρνητική της τιμή. Η ενεργειακή κατάσταση που αντιστοιχεί σε $n = 1$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση του ατόμου και σ' αυτήν η ακτίνα της επιτρεπτής τροχιάς είναι ελάχιστη όπως φαίνεται και από τη σχέση (14.15).

Οι υπόλοιπες ενεργειακές καταστάσεις ονομάζονται διηγερμένες, γιατί για να βρεθεί το άτομο σ' αυτές πρέπει να επιδράσει σ' αυτό εξωτερικό αίτιο, π.χ. ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, ώστε να απορροφηθεί το απαιτούμενο για τη διέγερση κβάντουμ ενέργειας. Οι διηγερμένες καταστάσεις είναι ασταθείς με την έννοια ότι το άτομο δεν παραμένει σ' αυτές για πολύ χρόνο, αλλά αμέσως μεταπίπτει σε καταστάσεις μικρότερης ενέργειας μέχρις ότου επιστρέψει στη θεμελιώδη του κατάσταση, στην οποία μπορεί να παραμένει επ' άπειρο εφόσον δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση.

Έστω ότι το άτομο βρίσκεται στη διηγερμένη κατάσταση $E_{αρχ}$ η οποία χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό $n_α$ και αφού εκπέμψει ένα φωτόνιο καταλήγει στην κατάσταση $E_{τελ}$, η οποία χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό $n_τ$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (14.11) η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου θα είναι

$$\nu = \frac{1}{h}\left(E_{αρχ} - E_{τελ}\right)$$

και το αντίστοιχο μήκος κύματος λ θα είναι

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\left(E_{αρχ} - E_{τελ}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (14.19) προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8c\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{n_τ^2} - \frac{1}{n_α^2}\right)} \qquad (14.20)$$

Τα μήκη κύματος του ατόμου Η που προσδιορίζονται από την τελευταία σχέση βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Έτσι π.χ. το μήκος κύματος που προσδιορίζεται από τη σχέση (14.20) για $n_τ = 2$ και $n_α = 3$ είναι $\lambda = 656{,}3 \cdot 10^{-9}$ m και υπάρχει στο φάσμα εκπομπής του Η που εικονίζεται στο σχήμα 14.13.

Με τη σχέση (14.20) υπολογίστηκαν με ακρίβεια όχι μόνο οι γραμμές του φάσματος εκπομπής του Η αλλά και άλλων στοιχείων τα οποία στην εξωτερική τους στοιβάδα έχουν μόνο ένα ηλεκτρόνιο όπως τα Na, K, κλπ.

Όμως το ατομικό πρότυπο του Bohr δεν μπορεί να γίνει πλήρως αποδεκτό γιατί οι προβλέψεις του σε άτομα που έχουν περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια στην εξωτερική τους στοιβάδα, π.χ. He, δεν επαληθεύονται πειραματικά.

Παράδειγμα

Δίνεται η σχέση $E = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2}$ $\quad n = 1,2,3,...$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών να δείξετε ότι οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του ωΗ είναι:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\,\text{eV} \qquad n = 1,2,3,...$$

2) Με βάση τη σχέση αυτή να επαληθευτούν οι τιμές των ενεργειακών σταθμών που δίνονται στο σχήμα 14.16.

3) Ένα άτομο Η βρίσκεται στη διηγερμένη κατάσταση $n=3$. Υπολογίστε το μήκος κύματος του φωτονίου ή των φωτονίων που θα προκύψουν κατά την αποδιέγερση του ατόμου. Δίνονται: $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,Cb^2N^{-1}m^{-2}$, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}Cb$, $m = 9{,}11\cdot10^{-31}Kg$, $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Joule sec.

Λύση

1) Αντικαθιστώντας στη σχέση που δίνεται έχουμε:

$$E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}\frac{me^4}{8h^2}\frac{1}{n^2} \qquad n = 1,2,3,...$$

$$E_n = -\frac{1}{(8{,}85\ 10^{-12})^2}\ \frac{9{,}11\ 10^{-31}\ (1{,}6\ 10^{-19})^4}{8\ (6{,}62\ 10^{-34})^2}\ \frac{1}{n^2}\ \text{Joule}$$

$$E_n = -\frac{2{,}18\ 10^{-18}}{n^2}\ \text{Joule} \Rightarrow E_n = \frac{-2{,}18\ 10^{-18}\ \text{Joule}}{1{,}6\ 10^{-19}\ \text{Joule/eV}}\ \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\,\text{eV} \qquad n = 1,2.3,...$$

2) Με αντικατάσταση στη σχέση αυτή έχουμε

$$E_1 = -\frac{13.6}{1^2}\ eV = -13.6\ eV \text{ θεμελιώδης κατάσταση}$$

$$E_2 = -\frac{13.6}{2^2}\ eV = -3.4\ eV \text{ πρώτη διηγερμένη}$$

$$E_3 = -\frac{13.6}{3^2}\ eV = -1.51\ eV \text{ δεύτερη διηγερμένη}$$

και ούτω καθεξής.

3) Από την $n = 3$ το άτομο μπορεί να μεταπέσει κατευθείαν στην $n = 1$, ή να μεταπέσει στην $n = 2$ και κατόπιν στην $n = 1$. Στην πρώτη περίπτωση θα γίνει εκπομπή ενός φωτονίου και στην δεύτερη δύο.

Τα μήκη κύματος θα είναι:
Στην πρώτη περίπτωση ($n = 3 \rightarrow n = 1$)

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{ch}{hv} = \frac{ch}{E_3 - E_1}$$

με αντικατάσταση:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8\ 6.62 \cdot 10^{-34}}{[-1.51 - (-13.6)]1.6 \cdot 10^{-19}}\ m \Rightarrow \lambda = 1{,}026 \cdot 10^{-7} m, \text{ ή } \lambda = 1026\ \text{Å}$$

Στην περίπτωση που μεταπίπτει από $n = 3 \rightarrow n = 2$ και στη συνέχεια από $n = 2 \rightarrow n = 1$ με ανάλογο τρόπο βρίσκεται ότι τα αντίστοιχα μήκη κύματος είναι:

$\lambda = 6.56 \cdot 10^{-7}$ m, ή $\lambda = 6560$ Å

$\lambda = 1.21 \cdot 10^{-7}$ m, ή $\lambda = 1210$ Å

14.7. Η αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την ύλη

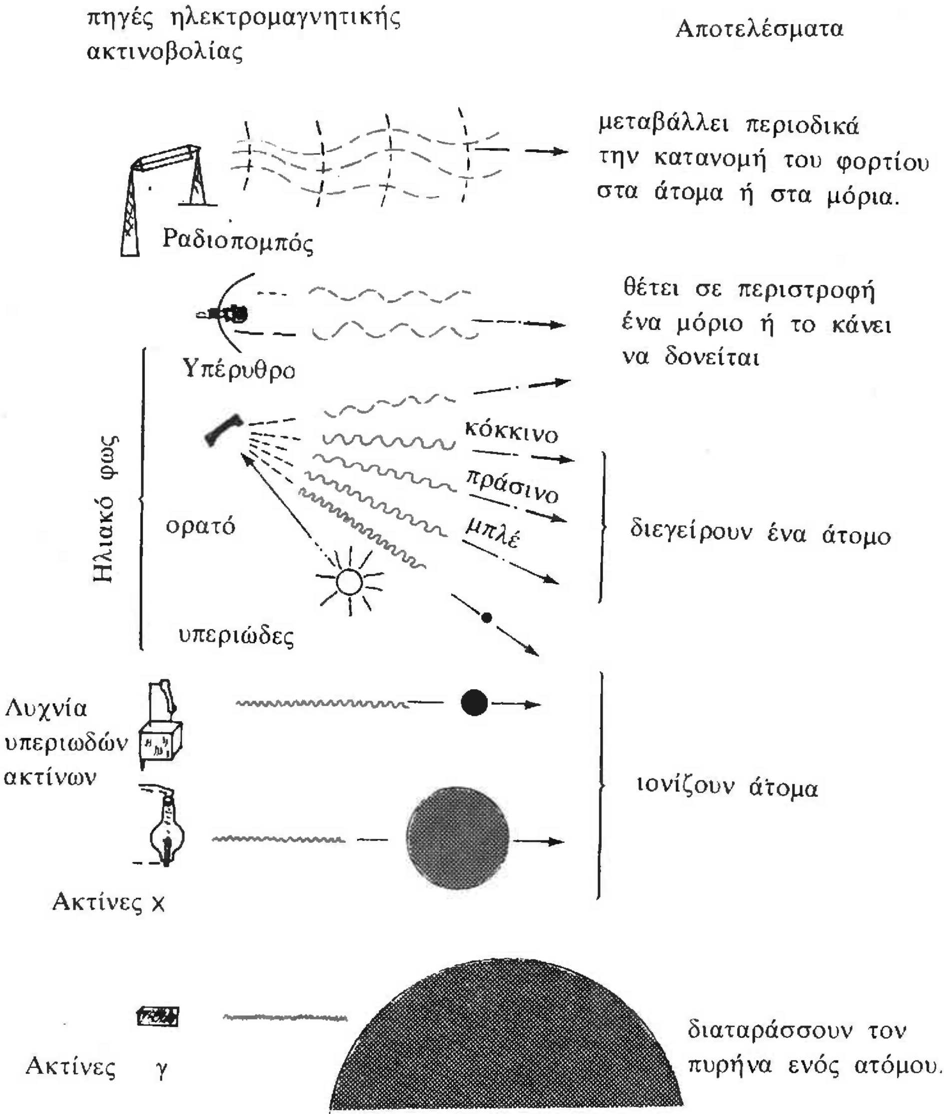
Μετά την αποδοχή του πρότυπου του Bohr, η αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την ύλη μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από την νέα εικόνα που έχει σχηματιστεί για τη δομή της ύλης και για την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

΄Οπως φαίνεται από τις σχέσεις $E = hv$ και $J = hv/c$, η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου καθορίζονται από τη συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Για το λόγο αυτό η αλληλεπίδραση των φωτονίων με τα άτομα ή τα μόρια και συνεπώς με την ύλη, θα καθορίζεται από τη συχνότητα του φωτονίου και τις τιμές των ενεργειακών σταθμών των ατόμων ή των μορίων.

Στο σχήμα 14.17 αποδίδεται σχηματικά η ενέργεια των φωτονίων για διάφορες συχνότητες και το αποτέλεσμα που μπορούν να επιφέρουν.

΄Οπως φαίνεται από το σχήμα αυτό η ακτινοβολία των ραδιοπομπών και η υπέρυθρη ακτινοβολία επηρεάζουν μόνο την κινητική κατάσταση των ατόμων ή των μορίων.

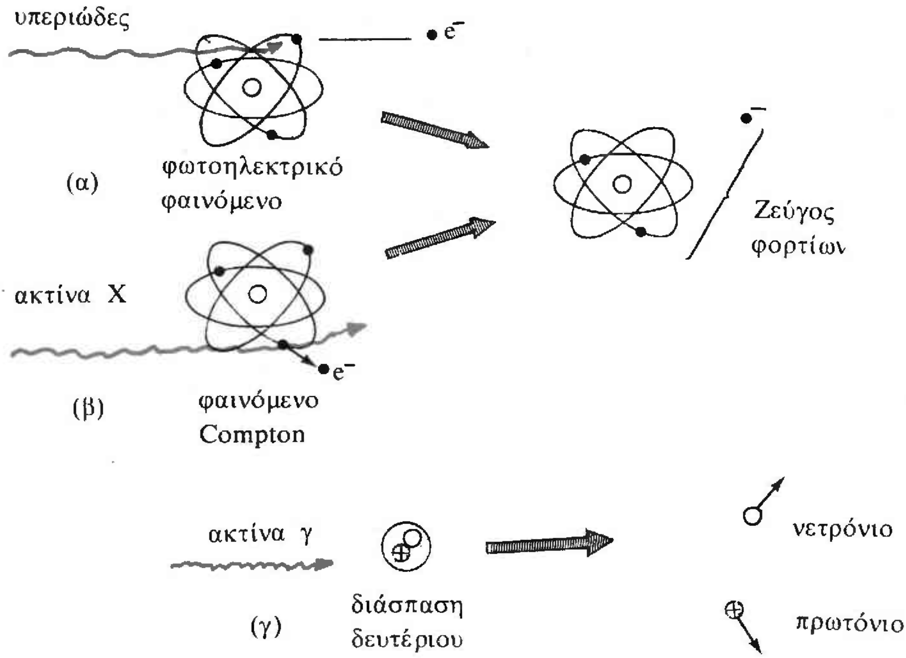
Όπως προκύπτει από το σχήμα 14.17, τα φωτόνια της ορατής ακτινοβολίας μπορεί να προκαλέσουν διέγερση ατόμων και συνεπώς να επαναπεμφθεί ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Αυτό οφείλεται στο ότι η ενέργεια των



Σχ. 14.17. Ο όγκος των σφαιρών έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να δείχνει την ενέργεια των κβάντα κάθε είδους ακτινοβολίας.

φωτονίων αυτής της ακτινοβολίας είναι συγκρίσιμη με τις τιμές των ενεργειακών σταθμών των ατόμων.

Η υπεριώδης ακτινοβολία έχει φωτόνια μεγαλύτερης ενέργειας γιαυτό η αλληλεπίδρασή της με τα άτομα μπορεί να οδηγήσει στον ιονισμό τους. Επίσης μπορεί να οδηγήσει στην απομάκρυνση ηλεκτρονίων από μέταλλα (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο σχήμα 14.18α).



Σχ. 14.18

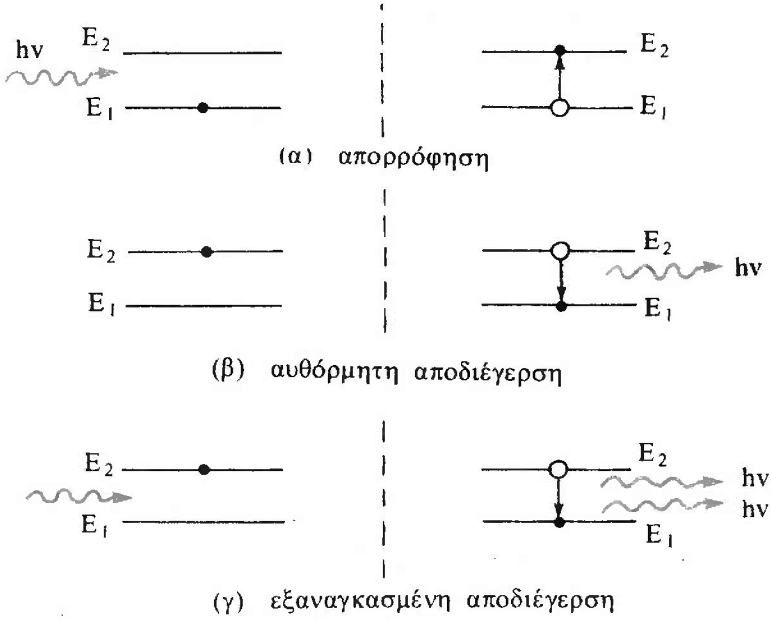
Τα φωτόνια των ακτίνων Χ έχουν τόσο μεγάλη ενέργεια ώστε όχι μόνο μπορούν να απομακρύνουν ηλεκτρόνια από υλικά τα οποία δεν είναι μέταλλα π.χ. γραφίτης, αλλά το υπόλοιπο μέρος της ενέργειάς τους να γίνει ένα νέο φωτόνιο (φαινόμενο Compton σχήμα 14.18β).

Τέλος οι ακτίνες γ έχουν ενέργεια ικανή να διασπάσει ένα πυρήνα όπως π.χ. συμβαίνει στη διάσπαση του δευτέριου που είναι ισότοπο του υδρογόνου και του οποίου ο πυρήνας αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο, σχήμα 14.18γ.

14.8. Αυθόρμητη και εξαναγκασμένη εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας-L a s e r

Ας θεωρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό ατόμων του ίδιου στοιχείου (π.χ. αέριο

Ne, Ar) τα οποία έχουν ενεργειακές καταστάσεις E_1 (θεμελιώδη) E_2, E_3 κ.λ.π. και έστω ότι με την επίδραση εξωτερικού αιτίου, π.χ. ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, τα άτομα διεγείρονται. Αν η συχνότητα της ακτινοβολίας επιλεγεί κατάλληλα είναι δυνατό να διεγερθούν τα άτομα στην ίδια ενεργειακή κατάσταση. Έτσι π.χ. για συχνότητα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ν που ικανοποιεί τη σχέση $h\nu = E_2 - E_1$ τα άτομα του αερίου θα μεταβούν στην ενεργειακή κατάσταση E_2, σχ. 14.19α. Στη διηγερμένη κατάσταση τα άτομα παραμένουν ελάχιστο χρόνο και με εκπομπή φωτονίου συχνότητας ν αποδιεγείρονται και επιστρέφουν στη θεμελιώδη τους κατάσταση E_1. Η αποδιέγερση των ατόμων που γίνεται από μόνη της (χωρίς την επίδραση εξωτερικού αιτίου) ονομάζεται **αυθόρμητη** και αποδίδεται στο σχήμα 14.19β.



Σχ. 14.19. Σχηματική παράσταση της αλληλεπίδρασης των φωτονίων με τα άτομα που βρίσκονται στις ενεργειακές καταστάσεις E_1 και E_2.

Λόγω του μεγάλου αριθμού των ατόμων, η αυθόρμητη εκπομπή χαρακτηρίζεται από τον τυχαίο χρονικά τρόπο με τον οποίο αποδιεγείρονται τα άτομα και συνεπώς η εκπομπή των φωτονίων δε γίνεται την ίδια χρονική στιγμή.

Η αποδιέγερση των ατόμων μπορεί επίσης να γίνει με την επίδραση των φωτονίων της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η αποδιέγερση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη** και κατ' αυτήν η εκπομπή του φωτονίου λόγω της αποδιέγερσης από E_2 σε E_1 γίνεται ταυτόχρονα με την αλληλεπίδραση του φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας με το διηγερμένο άτομο. Έτσι κατά την εξαναγκασμένη αποδιέγερση προσπίπτει ένα φωτόνιο και εκπέμπονται δύο όπως φαίνεται στο σχήμα 14.19γ.

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε για τις διαδικασίες εκπομπής και απορρόφησης, όταν στο σύνολο των ατόμων προσπίπτει ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας (π.χ. v_1) προκύπτει ακτινοβολία της ίδιας συχνότητας της οποίας τα φωτόνια μπορεί να προέρχονται 1ον από την προσπίπτουσα ακτινοβολία (όσα δεν απορροφήθηκαν από τα άτομα), 2ον από αυθόρμητη αποδιέγερση και 3ον από εξαναγκασμένη αποδιέγερση.

Όπως έχει αποδειχθεί ο τύπος της αποδιέγερσης καθορίζεται από τον πληθυσμό των ατόμων που βρίσκονται στη διηγερμένη κατάσταση E_2 σε σχέση με τον πληθυσμό αυτών που βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση E_1.

Όταν οι πληθυσμοί αυτοί είναι ίσοι, τα φωτόνια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι εξίσου πιθανό να απορροφηθούν από τα μη διηγερμένα άτομα, ή να προκαλέσουν εξαναγκασμένη αποδιέγερση. Αν όμως ο πληθυσμός των ατόμων στην διηγερμένη κατάσταση είναι μεγαλύτερος από τον πληθυσμό στη θεμελιώδη, τότε τα φωτόνια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι πιθανότερο να προκαλέσουν εξαναγκασμένη αποδιέγερση. Επειδή στη φύση όλα τα συστήματα τείνουν στην κατάσταση ισορροπίας, που είναι κατάσταση της ελάχιστης ενέργειας, είναι απίθανο να ευρίσκονται στη διηγερμένη κατάσταση περισσότερα άτομα απ' ότι στη θεμελιώδη.

Είναι όμως δυνατό με κατάλληλη μέθοδο να επιτευχθεί ώστε να είναι περισσότερα τα διηγερμένα άτομα από αυτά που είναι στη θεμελιώδη. Τότε η κατάσταση αυτή ονομάζεται **αντιστροφή πληθυσμών.**

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο ατόμων στο οποίο έχει επιτευχθεί αντιστροφή πληθυσμών μεταξύ των ενεργειακών καταστάσεων E_1 και E_2. Αν φωτόνια συχνότητας v_1 ($hv_1 = E_2 - E_1$) προσπέσουν στο αέριο, θα εκπεμφθούν φωτόνια της ίδιας συχνότητας, λόγω της εξαναγκασμένης αποδιέγερσης και η ακτινοβολία που θα προκύψει θα περιλαμβάνει πολύ περισσότερα φωτόνια απ' ότι η προσπίπτουσα. Δηλαδή θα παρατηρηθεί ενίσχυση της ακτινοβολίας. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδικασία Laser από τα αρχικά των αγγλικών λέξεων "light amplification by stimulated emission of radiation" που η ερμηνεία τους είναι: ενίσχυση φωτός με εξαναγκασμένη εκπομπή ακτινοβολίας. Η προκύπτουσα από τη διαδικασία αυτή ακτινοβολία ονομάζεται ακτινοβολία Laser.

Λόγω του τρόπου που παράγεται η ακτινοβολία Laser έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

1) Είναι μονοχρωματική δηλαδή το φάσμα της αποτελείται μόνο από μια λεπτή φασματική γραμμή.

2) Είναι σύμφωνη, δηλαδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που την αποτελούν δεν έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο ότι όλα τα φωτόνια της ακτινοβολίας δεν έχουν μεταξύ τους χρονικές καθυστερήσεις.

3) Μια δέσμη της διαδίδεται στο χώρο χωρίς να μεταβάλλεται η διαμετρός της για μεγάλες αποστάσεις. Έτσι μια πολύ λεπτή δέσμη προσσεγγίζει ικανοποιητικά την έννοια της φωτεινής ακτίνας.

4) Επειδή η δέσμη μπορεί να γίνει πολύ λεπτή, η ισχύς της θα συγκεντρώνεται σε πολύ μικρή επιφάνεια και έτσι η ένταση της ακτινοβολίας γίνεται πολύ μεγάλη.

Λόγω αυτών των χαρακτηριστικών οι ακτινοβολίες Laser έχουν πάρα πολλές εφαρμογές στην επιστημονική έρευνα και στην τεχνολογία. Έτσι π.χ. Laser χρησιμοποιούνται για την τήξη και τη συγκόλληση μετάλλων, για τον προσδιορισμό του φάσματος εκπομπής ή απορρόφησης διαφόρων ουσιών, για τη μέτρηση μεγάλων αποστάσεων με ελάχιστο σφάλμα. Σημαντικές επίσης είναι οι εφαρμογές των Laser στην ιατρική όπου χρησιμοποιούνται για να γίνονται καυτηριάσεις, καταστροφή καρκινογόνων ιστών, θεραπεία της αποκόλλησης του αμφιβληστροειδή κ.ά. Επίσης Laser χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες ενώ αναμένεται να χρησιμοποιηθούν στην ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη.

Οι διατάξεις οι οποίες δίνουν ακτινοβολία Laser χρησιμοποιούν αέρια π.χ. He, Ne, Ar, CO_2 κ.ά. στερεά όπως ημιαγωγοί, κρύσταλλοι Ρουβιδίου κ.ά. Η ισχύς της ακτινοβολίας μπορεί να είναι οποιασδήποτε τάξης μεταξύ 10^{-3} Watt και 10^6 Watt. Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι η θεωρητική μελέτη της διαδικασίας Laser είχε γίνει από τον Einstein το 1917 ενώ το πρώτο Laser κατασκευάστηκε το 1960. Η καθυστέρηση αυτή οφείλεται στη δυσκολία ευρέσεως τεχνικής που να επιτυγχάνει την αντιστροφή των πληθυσμών.

14.9. Υλικά κύματα

Τον ίδιο χρόνο που επαληθεύτηκε από τον Compton η υπόθεση του Einstein για τη σωματιδιακή συμπεριφορά της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μια νέα πιο επαναστατική υπόθεση διατυπώθηκε από ένα νεαρό Γάλλο φυσικό τον Louis de Broglie. Συγκεκριμένα αυτός ξεκινώντας από το ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παρουσίαζαν σωματιδιακή συμπεριφορά, διατύπωσε την άποψη ότι τα κινούμενα σωματίδια έχουν κυματική συμπεριφορά, ότι δηλαδή συμπεριφέρονται όπως τα κύματα.

Τα κύματα αυτά ο Louis de Broglie τα ονόμασε **υλικά κύματα** και λαμβάνοντας υπόψη την ειδική θεωρία της σχετικότητας υπολόγισε ότι το μήκος κύματος λ που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο που κινείται με ορμή J είναι:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{J} = \frac{h}{m\upsilon}} \qquad (14.21)$$

όπου m και υ η μαζα και η ταχύτητα του σωματιδίου.

Συγκρίνοντας τη σχέση (14.21) με τη (14.8) που συνδέει την ορμή του φωτονίου με το μήκος κύματος του αντίστοιχου ηλεκτρομαγνητικού κύματος, βλέπουμε ότι είναι ίδιες και ότι αναφέρονται σε φυσικές οντότητες που έχουν κυματικό (λ) και σωματιδιακό (J) χαρακτήρα.

Ποια είναι όμως η κλίμακα των φαινομένων στα οποία η κυματική συμπεριφορά των σωματιδίων γίνεται εμφανής; Ας εξετάσουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

α) Ένα βλήμα μάζας 5 gr που κινείται με ταχύτητα 400 m/sec έχει σύμφωνα με τη σχέση (14.21) μήκος κύματος

$$\lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-35}\ \text{m}$$

Επειδή δεν μπορεί να ανιχνευτεί πειραματικά κύμα με μήκος κύματος της τάξης του 10^{-35}, δεχόμαστε ότι στο μακρόκοσμο δε γίνεται εμφανής η κυματική φύση των σωμάτων.

β) Ένα ηλεκτρόνιο που έχει κινητική ενέργεια $E = 1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Joule έχει ορμή $J = \sqrt{2\, m_e E}$ και μήκος κύματος

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E}} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$$

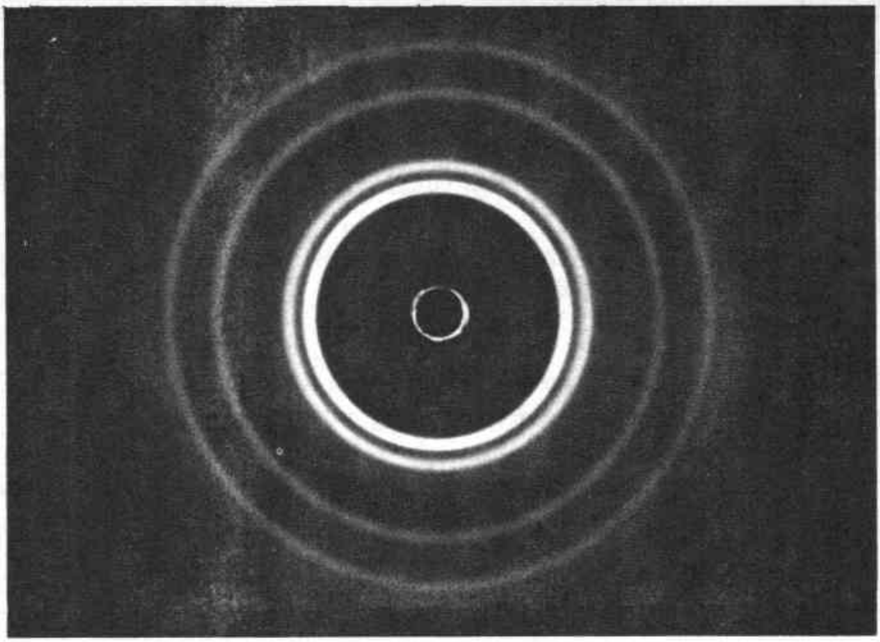
που είναι στην περιοχή του μήκους κύματος των ακτίνων X και συνεπώς τα μήκη κύματος τέτοιων ηλεκτρονίων μπορεί να μετρηθούν πειραματικά.

Άρα αν λοιπόν υπάρχουν τα υλικά κύματα πρέπει η συμπεριφορά τους να γίνεται εμφανής σε φαινόμενα στα οποία γίνεται εμφανής η κυματική συμπεριφορά των ακτίνων X.

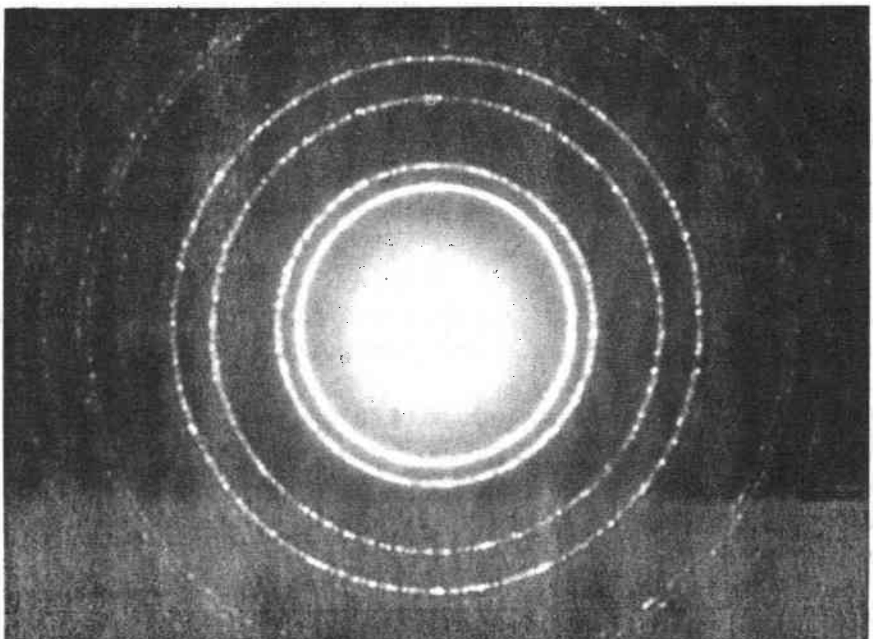
Ήταν γνωστό πριν από τη διατύπωση της υπόθεσης του de Broglie ότι όταν ακτίνες X προσπίπτουν σε κρυσταλλικό σώμα εμφανίζεται το φαινόμενο της περίθλασης και ότι αν πίσω από το κρυσταλλικό σώμα τοποθετηθεί κατάλληλο φωτογραφικό φίλμ σχηματίζονται δακτύλιοι όπως αυτοί του σχήματος 14.20.

Ο Thomson το 1927 προκειμένου να ελέγξει την υπόθεση του de Broglie κατηύθηνε δέσμη ηλεκτρονίων της ίδιας ενέργειας πάνω σε κρυσταλλικό σώμα και στη φωτογραφική πλάκα σχηματίστηκαν δακτύλιοι όπως αυτοί του σχήματος 14.21.

Από τη σύγκριση των φωτογραφιών 14.20 και 14.21 γίνεται προφανής η κυματική συμπεριφορά των σωματιδίων. Επίσης με άλλα πειράματα υπολογίστηκε το μήκος κύματος των υλικών σωματιδίων και βρέθηκε ότι είναι σε συμφωνία με τη σχέση (14.21) και συνεπώς η υπόθεση του de Broglie για τα υλικά κύματα έγινε αποδεκτή.

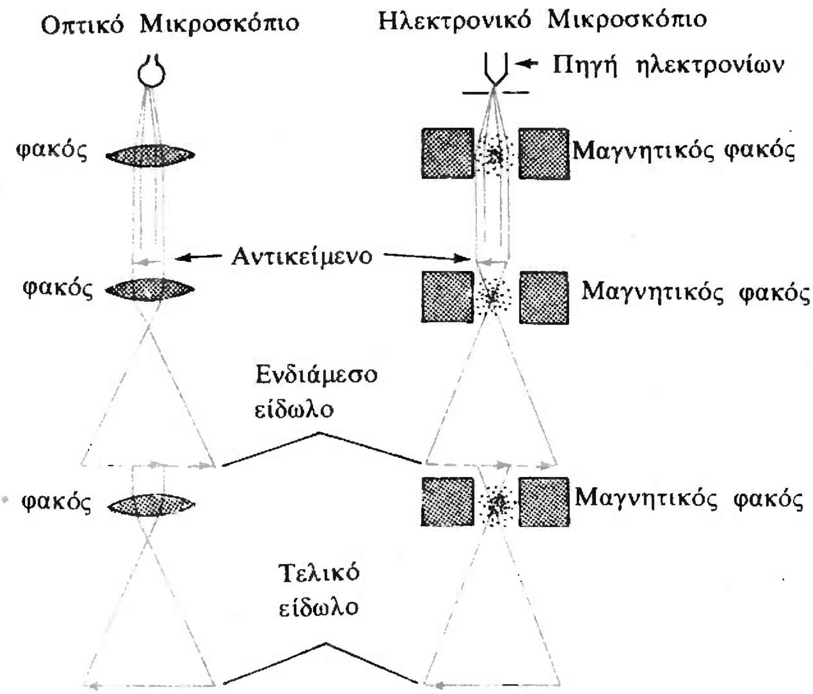


Σχ. 14.20. Περίθλαση ακτίνων X μήκους κύματος λ = 0,71 Å σε στόχο από λεπτό φύλο αλουμινίου.



Σχ. 14.21. Περίθλαση δέσμης ηλεκτρονίων ενεργείας 600 eV σε στόχο από φύλο αλουμινίου.

Άμεση εφαρμογή της κυματικής συμπεριφοράς των σωματιδίων έχουμε στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, σχ. 14.22.



Σχ. 14.22

Όπως φαίνεται από το σχήμα 14.22 η διαδικασία σχηματισμού του ειδώλου (εστίαση, μεγέθυνση κλπ.) είναι ίδια και για το οπτικό και για το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, ενώ το πρώτο χρησιμοποιεί ηλεκτρομαγνητικά κύματα και το δεύτερο υλικά κύματα δηλαδή τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων που χρησιμοποιήθηκαν για το πείραμα της περίθλασης που έδωσε τη φωτογραφία του σχήματος 14.21. Δίνονται: $1eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Joule, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Joule sec, μάζα ηλεκτρονίου $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ Kgr.

Λύση

Όπως προκύπτει από τον τίτλο του σχ. 14.21 η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι $E = 600$ eVή $E = 600 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Joule $= 9{,}6 \cdot 10^{-17}$ Joule.

Η ορμή J των ηλεκτρονίων συνδέεται με την κινητική τους ενέργεια E μέσω της κλασικής σχέσης $E = \frac{J^2}{2m_e}$ (επειδή η κινητική ενέργεια είναι μικρή δε χρησιμοποιούμε σχετικιστικές σχέσεις) από την οποία προκύπτει $J = \sqrt{2m_e E}$. Άρα το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = \frac{h}{J} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι $\lambda = 5 \cdot 10^{-11}\mathrm{m} = 0.5$ Å.

14.10. Αρχή της αντιστοιχίας

Από τη μελέτη των προηγουμένων παραγράφων προκύπτει ότι για να ερμηνευθούν διάφορα φαινόμενα του μικρόκοσμου έγιναν αποδεκτές προτάσεις που βρίσκονται σε αντίθεση με την κλασική φυσική. Έτσι για να ερμηνευθεί η ακτινοβολία του μέλανος σώματος έγινε αποδεκτό ότι η ενέργεια ενός συστήματος, π.χ. άτομο, δεν αυξάνεται συνεχώς αλλά κατά άλματα μεταξύ τιμών που είναι διάκριτες και καθορισμένες. Επίσης έγινε αποδεκτό ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει σωματιδιακή συμπεριφορά όταν αλληλεπιδρά με την ύλη, ότι δηλαδή η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι φωτόνια, τα οποία έχουν χαρακτηριστικά σωματιδίων, όπως ορμή. Ακόμα η εικόνα των κινουμένων σωματιδίων άλλαξε και αντικαταστάθηκε από τα υλικά κύματα.

Οι παραπάνω προτάσεις συγκροτούν τη θεωρία των κβάντα η οποία είναι ένα φυσικό πρότυπο στην περιοχή του μικρόκοσμου. Η θεωρία αυτή έχει βέβαια την πειραματική επαλήθευση αλλά έρχεται σε αντίθεση με την κλασική φυσική η οποία όχι μόνο έχει την αντίστοιχη πειραματική επαλήθευση, αλλά έχει ακόμα υπέρ αυτής και την επαλήθευση μέσω της απ' ευθείας παρατήρησης των διαφόρων φαινομένων που συμβαίνουν γύρω μας.

Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι για την πλήρη περιγραφή της φύσης χρειάζονται δύο θεωρίες, η κλασική φυσική και η θεωρία των κβάντα. Αυτό όμως θα έθετε σε αμφισβήτηση την ισχύ και των δύο αυτών θεωριών. Αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει είναι ότι κάθε μια θεωρία επαληθεύεται πειραματικά στην περιοχή των φαινομένων για την ερμηνεία των οποίων δημιουργήθηκε και δεν μπορεί να ισχύει σε άλλες περιοχές. Κάθε νεώτερη θεωρία όμως πρέπει να μην έρχεται σε αντίφαση με την παλιά αλλά να την εμπεριέχει σαν μια οριακή περίπτωση. Αυτό για παράδειγμα συμβαίνει με την ειδική θεωρία της σχετικότητας από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις της

κλασικής φυσικής όταν οι ταχύτητες είναι μικρές συγκρινόμενες με την ταχύτητα του φωτός.

Ειδικότερα η σχέση της θεωρίας των κβάντα με την κλασική φυσική καθορίζεται από την **αρχή της αντιστοιχίας** σύμφωνα με την οποία οι νόμοι της θεωρίας των κβάντα συμπίπτουν με τους νόμους της κλασικής φυσικής για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς.

Πράγματι ας θεωρήσουμε ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας για το οποίο η σταθερά του ελατηρίου είναι $K = 20 N/m$ η μάζα $m = 0,1$ Kgr και το οποίο εκτελεί ταλαντώσεις πλάτους $x_o = 2 \cdot 10^{-2}$ m. Η ενέργεια του συστήματος σύμφωνα με τη θεωρία των κβάντα θα είναι $E = nh\nu$ όπου n ο κβαντικός αριθμός και ν η συχνότητα της ταλάντωσης. Η συχνότητα ν είναι

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = 2,25 \text{ Hz}$$

Η ενέργεια του συστήματος είναι επίσης,

$$E = \frac{1}{2} K x_o^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Joule}$$

Άρα ο κβαντικός αριθμός n θα είναι:

$$n = \frac{E}{h\nu} = 2,69 \cdot 10^{30}$$

Αν το σύστημα αποβάλει ένα κβάντουμ ενέργειας, η μεταβολή στην ενέργειά του είναι $\Delta E = h\nu$ και η ποσοστιαία μεταβολή της ενέργειάς του είναι:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{nh\nu} = \frac{1}{n} \simeq 10^{-30}$$

Η μεταβολή αυτή στην ενέργεια του συστήματος είναι τόσο μικρή που δε δύναται να παρατηρηθεί. Έτσι αντί το πλάτος της ταλάντωσης να μικραίνει κατά άλματα λόγω αποβολής ενέργειας, μικραίνει κατά συνεχή τρόπο όπως προβλέπει η κλασική φυσική.

Άρα λοιπόν στα φαινόμενα του μακρόκοσμου, για τα οποία ο αριθμός των ενεργειακών καταστάσεων είναι πολύ μεγάλος, δε γίνεται εμφανές ότι η ενέργεια είναι κβαντισμένη και ότι οι μεταβολές στην ενέργεια γίνονται με εκπομπή ή απορρόφηση κβάντων, αλλά ότι η ενέργεια μεταβάλλεται συνεχώς.

Επειδή για τα φαινόμενα του μακρόκοσμου η τάξη μεγέθους της δράσης (ενέργεια × χρόνος) είναι πάρα πολύ μεγάλη συγκρινόμενη με την τάξη μεγέθους της σταθεράς του Planck, συμπεραίνουμε ότι για τα φαινόμενα εκείνα για τα οποία $h \to 0$ η κβαντική φυσική συμπίπτει με την κλασική φυσική.

$$\lim_{h \to 0} (\text{κβαντικής θεωρίας}) \to \text{κλασική φυσική}$$

Αυτό σημαίνει ότι για την περιγραφή της φύσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία μόνο θεωρία, η κβαντική, γιατί περιέχει και την κλασική φυσική, η οποία προκύπτει απ' αυτήν σαν οριακή περίπτωση.

Ερωτήσεις - Ασκήσεις

Στις ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού θα θεωρούνται γνωστά, όπου χρειάζονται, τα εξής μεγέθη.

$h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Joule sec

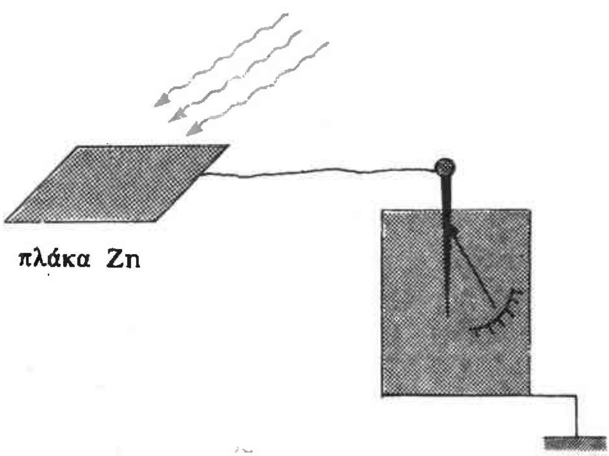
$c = 3 \cdot 10^{8}$ m/sec

ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου 0,511 MeV

ενέργεια ηρεμίας πρωτονίου 938 MeV

$1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Joule

1. Το σύστημα που εικονίζεται αποτελείται από ηλεκτροσκόπιο το οποίο είναι συνδεμένο με πλάκα ψευδαργύρου. Η πλάκα αρχικά είναι φορτισμένη με Ι) θετικό



ηλεκτρικό φορτίο. ΙΙ) αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο. Ποια μεταβολή θα επέλθει στην ένδειξη του ηλεκτροσκόπιου αν η πλάκα φωτισθεί για αρκετό χρόνο με υπεριώδες.

φως; (Ο ιονισμός του αέρα που περιβάλλει την πλάκα να θεωρηθεί αμελητέος).

2. Ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m, προσπίπτει σε επιφάνεια λιθίου για την οποία το έργο εξαγωγής είναι 2,3 eV. Να υπολογιστούν:

α) Η συχνότητα κατωφλίου $\nu_{o\varrho}$.
β) Η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων.
γ) Η τάση αποκοπής.

(**Απ.** α) $5{,}57 \cdot 10^{14}$ Hz β) $2{,}8 \cdot 10^{-20}$ Joule γ) 0,175 Volt)

3. Αναφερόμαστε στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και ζητάμε α) την τάση αποκοπής για προσπίπτουσα ακτινοβολία με μήκος κύματος 400 nm, αν το έργο εξαγωγής είναι 1,8 eV, β) τη μέγιστη ταχύτητα των εκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων από τη φωτοκάθοδο. Δίνεται η μάζα του ηλεκτρονίου $9{,}11 \cdot 10^{-31}$Kgr.

(**Απ.** α) 1,3 Volt β) $6{,}8 \cdot 10^{5}$ m/sec)

4. Εάν το 5% της ενέργειας που προσφέρεται σε ένα ηλεκτρικό λαμπτήρα θερμαινόμενου νήματος, ακτινοβολείται σε μήκη κύματος ορατού φωτός, πόσα «ορατά» φωτόνια εκπέμπονται ανά sec από ένα λαμπτήρα ισχύος 75 Watt; Υποθέστε ότι το μήκος κύματος του ορατού φωτός που εκπέμπεται είναι 560 nm.

(**Απ.** 10^{19})

5. Μια επιφάνεια από καίσιο είναι σε απόσταση 2m από μια σημειακή φωτεινή πηγή ισχύος 1 mW που εκπέμπει φως ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις. Υποθέτουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο μπορεί να απορροφήσει ενέργεια σε μια κυκλική έκταση όση το άτομο που έχει ακτίνα περίπου 10^{-10} m. Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να εξαχθεί το ηλεκτρόνιο από την επιφάνεια είναι 1,96 eV. Πόσος χρόνος απαιτείται για να απορροφήσει το ηλεκτρόνιο αυτή την ενέργεια και επομένως να εγκαταλείψει την επιφάνεια, σύμφωνα με την κλασική φυσική που δέχεται ότι η ενέργεια από τη φωτεινή πηγή διασκορπίζεται σε σφαιρικά μέτωπα κύματος ομοιόμορφα.

(**Απ.** 6 μέρες)

6. Το φωτοευπαθές υλικό που χρησιμοποιείται στα φωτογραφικά φιλμ είναι συνήθως βρωμιούχος άργυρος (AgBr). Για να αποτυπωθεί σ' ένα τέτοιο φιλμ το είδωλο ενός αντικειμένου πρέπει το φως που προέρχεται από το αντικείμενο να προσπέσει στο φιλμ και να διασπάσει το μόριο AgBr στα άτομά του. (Η διαδικασία είναι πιο πολύπλοκη, αλλά το αποτέλεσμα είναι ποιοτικά αυτό που αναφέρεται). Η ενέργεια του φωτονίου που απαιτείται για τη διάσπαση ενός μορίου AgBr είναι E = 1,04 eV.

α) Υπολογίστε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του φωτονίου το οποίο έχει ενέργεια ακριβώς ίση με αυτή που απαιτείται για τη διάσπαση ενός μορίου AgBr.

β) Μπορεί στο φιλμ να αποτυπωθεί το είδωλο αντικειμένου το οποίο ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας 100 MHz;

γ) Εξηγείστε γιατί τη νύχτα στο φιλμ αποτυπώνεται η φλόγα ενός κεριού όχι όμως και η κεραία ενός πομπού τηλεόρασης που ακτινοβολεί ισχύ 50 KW σε συχνότητα 100 MHz.

7. Όταν η επιφάνεια ενός μετάλλου φωτίζεται κατάλληλα, εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια. Χρησιμοποιώντας πειραματική διάταξη ανάλογη με αυτή του σχήματος 14.6 πάρθηκαν οι ακόλουθες μετρήσεις για τη μεταβολή της τάσης αποκοπής σε συνάρτηση με το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινβολίας.

λ(nm)	366	405	436	492	546	579
V_α(Volt)	1,48	1,15	0,93	0,62	0,36	0,24

1) Γιατί η τάση αποκοπής αυξάνεται όταν μειώνεται το μήκος κύματος;

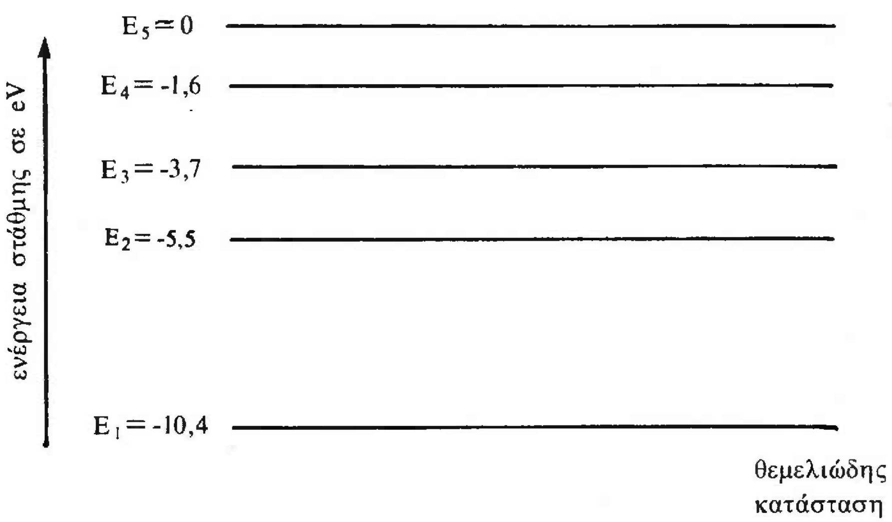
2) Σχεδιάστε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη μεταβολή της V_α σε συνάρτηση με τη συχνότητα ν της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

3) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης υπολογίστε τη συχνότητα κατωφλίου $\nu_{o\rho}$, το έργο εξαγωγής και την τιμή της σταθεράς του Planck.

Δίνεται φορτίο ηλεκτρονίου $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

(**Απ.** 3) $4{,}6 \cdot 10^{14}$Hz, 1,9 eV, $6{,}24 \cdot 10^{-34}$ Joule sec)

8. Μερικές από τις πιθανές ενεργειακές στάθμες (τιμές ολικής ενέργειας) του ατόμου του Υδραργύρου εικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα.



Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο ολικής ενέργειας 9 eV συγκρούεται με ένα άτομο υδραργύρου το οποίο βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση. Ποια από τις παρακάτω τιμές ενέργειας μπορεί να έχει το ηλεκτρόνιο μετά την κρούση; (Επειδή η μάζα του ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρή σχετικά με τη μάζα του ατόμου του Hg, θεωρείστε ότι η ορμή του τελευταίου δε μεταβάλλεται).

α) 0,2 eV β) 1,4 eV γ) 2,3 eV δ) 3,5 eV

(**Απ.** α,γ)

9. Στο άτομο του Hg της προηγούμενης άσκησης προσπίπτει φωτόνιο ενέργειας 9 eV. Ποια από τις ακόλουθες τιμές συχνότητας μπορεί να έχει το φωτόνιο μετά την κρούση. (Θεωρείστε ότι η ορμή του ατόμου του Hg δε μεταβάλλεται).

α) $4{,}92 \cdot 10^{13}$ Hz β) $5{,}66 \cdot 10^{14}$ Hz γ) $1 \cdot 10^{15}$ Hz δ) $2{,}2 \cdot 10^{15}$ Hz.

(**Απ.** α,β,γ)

10. Ας υποθέσουμε ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμβαίνει με ηλεκτρόνια του ατόμου του Η που έχει ενέργεια ιονισμού 13,6 eV. Αν το φωτοηλεκτρόνιο κινείται κατά την κατεύθυνση που προσπίπτει το φωτόνιο, με μήκος κύματος 2 Å ($1Å = 10^{-8}$cm), ζητούνται η ενέργεια και η ορμή α) του ηλεκτρονίου και β) του πρωτονίου.

(**Απ.** α) 6201 eV $7{,}96 \cdot 10^4$eV/c β) 3,3 eV $7{,}90 \cdot 10^4$ eV/c)

11. Αποδείξτε ότι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν μπορεί να συμβεί για ελεύθερα ηλεκτρόνια.

12. Ακτίνες Χ με μήκος κύματος $1Å = 10^{-10}$ m κτυπούν στόχο από άνθρακα και η εξερχόμενη ακτινοβολία μετρείται σε γωνία 90° ως προς την προσπίπτουσα. Ζητούνται: α) η μετατόπιση $\Delta\lambda$ του μήκους κύματος μεταξύ της εξερχόμενης και της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και β) η κινητική ενέργεια του ελευθέρου ηλεκτρονίου μετά την κρούση. Δίνεται μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου $m_o = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$Kgr.

(**Απ.** α) 0,024Å β) 291 eV)

13. Αναφερόμαστε στην προηγούμενη άσκηση. Να βρεθεί το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου που έγινε κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Το ποσοστό αυτό να υπολογιστεί και για ακτίνες Χ με μήκος κύματος 0,1Å. Τι συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί από τους δυο αυτούς υπολογισμούς;

(**Απ.** 2,3%, 19,3%)

14. Ένα φωτόνιο με μήκος κύματος 2Å αλληλεπιδρά με το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου. Τότε συμβαίνει φαινόμενο Compton και το ηλεκτρόνιο κινείται κατά την κατεύθυνση που προσπίπτει το φωτόνιο. Ζητείται η ενέργεια α) του ηλεκτρονίου β) του εξερχομένου φωτονίου.

(**Απ.** α) 146 eV β) 6069 eV)

15. Απλό εκκρεμές μήκους 10 cm φέρει μάζα 5 gr και τίθεται σε κίνηση μεταξύ των ακραίων θέσεων που σχηματίζουν γωνία 0,1 rad με την κατακόρυφη. Λόγω της αντίστασης του αέρα το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται. Μπορούμε να ανιχνεύσουμε τα κβαντικά άλματα στην ενέργεια του εκκρεμούς καθώς το πλάτος μειώνεται;

$$(g = 9{,}8 \ \ \mathrm{m/sec^2})$$

Η εξέλιξη της κβαντικής θεωρίας χρονολογικά

1900 Εξήγηση της ακτινοβολίας μέλανος σώματος
Max Planck (Βραβείο Nobel 1918)

1900 Ανακάλυψη ότι η ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων ήταν ανεξάρτητη της έντασης του προσπίπτοντος φωτός
Philip von Lenard (Βραβείο Nobel 1905)

1905 Εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου
Albert Einstein (Βραβείο Nobel 1921)

1907 Εξήγηση των ειδικών θερμοτήτων των στερεών με τη βοήθεια της κβάντωσης της ενέργειας
Albert Einstein

1913 Κβαντισμένο πρότυπο του ατόμου του υδρογόνου
Niels Bohr (Βραβείο Nobel 1922)

1916 Πειραματικές μελέτες του φωτοηλεκτρικού φαινομένου
Robert Millikan (Βραβείο Nobel 1923)

1923 Ανακάλυψη και εξήγηση των κρούσεων μεταξύ φωτονίων και ηλεκτρονίων Arthur Compton (Βραβείο Nobel 1927)

1924 Πρόταση ότι τα ηλεκτρόνια έχουν ένα συνδυασμένο μήκος κύματος
Louis de Broglie (Βραβείο Nobel 1929)

1925 Μαθηματική θεωρία της κυματομηχανικής
Erwin Schrödinger (Βραβείο Nobel 1933)

1925 Μαθηματική θεωρία της μηχανικής πινάκων
Werner Heisenberg (Βραβείο Nobel 1932)

1926 Στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης
Max Born (Βραβείο Nobel 1954)

1927 Η αρχή της απροσδιοριστίας
Werner Heisenberg

1927 Παρατήρηση περίθλασης ηλεκτρονίων από κρυστάλλους
Clinton Davisson (Βραβείο Nobel 1937)

1928 Σχετικιστική θεωρία της κβαντομηχανικής και η πρόβλεψη του ποζιτρονίου
Paul Dirac (Βραβείο Nobel 1933)

15. Προοπτικές της Φυσικής

Από τη μελέτη της ύλης, έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί τύποι συμπεριφοράς που πιστεύεται ότι προκαλούνται από τέσσερα διαφορετικά είδη δυνάμεων.

- ▶ την ισχυρή πυρηνική δύναμη που είναι η ισχυρότερη από όλες και που εξασκείται π.χ. μεταξύ των πρωτονίων και των νετρονίων που συγκροτούν τον πυρήνα
- ▶ την ηλεκτρομαγνητική δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε σώματα που φέρουν ηλεκτρικό φορτίο. Σ᾽αυτήν οφείλεται π.χ. η συγκρότηση του ατόμου
- ▶ την ασθενή πυρηνική δύναμη στην οποία οφείλεται η διάσπαση των σωματιδίων, όπως είναι η β διάσπαση των πυρήνων
- ▶ τη βαρυτική δύναμη που εξασκείται μεταξύ των μαζών και που είναι υπεύθυνη π.χ. για τις κινήσεις των άστρων.

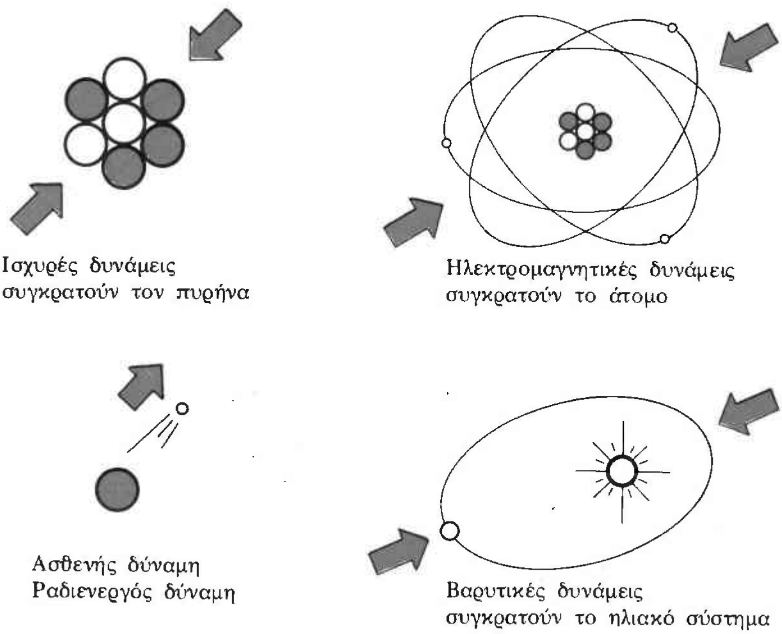
Αν στη βαρυτική δύναμη αποδώσουμε τιμή 1, τότε, η ασθενής πυρηνική δύναμη έχει τιμή 10^{28}, η ηλεκτρομαγνητική δύναμη έχει τιμή 10^{38} και η ισχυρή πυρηνική δύναμη έχει τιμή 10^{40}.

Από την εποχή του Εμπεδοκλή που πρώτος μίλησε για τα βασικά συστατικά τα οποία πίστευε ότι συγκροτούν το σύμπαν (αήρ, ύδωρ, πυρ, γη), το όνειρο του ανθρώπου είναι η κατανόηση της πολυπλοκότητας της φύσης με όσο το δυνατό λιγότερους ενοποιούς όρους. Από την άποψη αυτή, στην ιστορία της φυσικής στέκουν μαζί τρία ονόματα, Newton, Maxwell, Einstein ως οι μεγαλύτεροι συνθέτες και ενοποιοί όλων των εποχών. Πριν 300 περίπου χρόνια ο Newton ταύτισε και ενοποίησε τη γήϊνη βαρύτητα (τη δύναμη που κάνει τα μήλα να πέφτουν) με την ουράνια βαρύτητα (τη δύναμη που συγκρατεί τους πλανήτες σε τροχιά γύρω από τον ήλιο). Διακόσια χρόνια αργότερα ο Maxwell ενοποίησε τις δυνάμεις του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού. Το 1905 ο Einstein ενοποίησε το χώρο και το χρόνο και 11 χρόνια αργότερα κατάφερε να δείξει ότι η νευτωνική βαρύτητα είναι εκδήλωση της τολμηρής αυτής ενοποίησης.

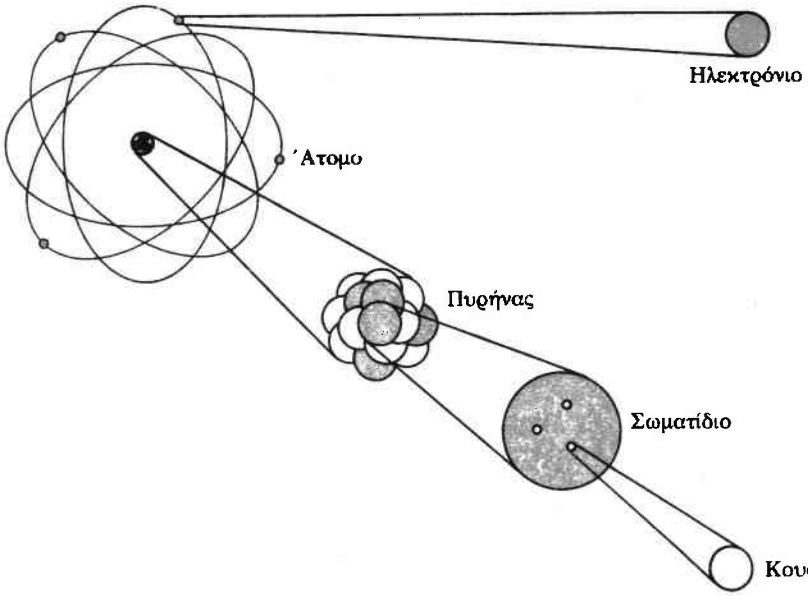
Το μεγάλο όνειρο των φυσικών είναι η ενοποίηση των δυνάμεων της φύσης. Πρόσφατες θεωρίες έχουν ενοποιήσει την ασθενή πυρηνική δύναμη και την ηλεκτρομαγνητική, σε μια δύναμη, την ηλεκτρασθενή. Η θεωρία που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μέσω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης είναι η κβαντική χρωματοδυναμική. Νέες δημοφιλείς θεωρίες όπως οι μεγαλειώδεις ενοποιημένες θεωρίες προσπαθούν να συζεύξουν την κβαντική χρωματοδυναμική με τις ηλεκτρασθενείς δυνάμεις. Μία από τις συνέπειες των θεωριών αυτών είναι ότι το πρωτόνιο διασπάται σε χρόνο 10^{32} έτη (μια χρονική περίοδος πολύ μεγαλύτερη από την ηλικία του σύμπαντος). Ίσως η διάσπαση του πρωτονίου επηρεάζεται από την παρουσία μαγνητικών μονοπόλων. Υπάρχουν τέτοια μονόπολα; Η δομή της ύλης δεν είναι αυτή που ξέραμε πριν 25 χρόνια. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια δεν είναι πλέον στοιχειώδη. Έχουν δομή. Αποτελούνται από quarks και ως τώρα εξ υποψήφια είδη quarks έχουν επισημανθεί. Σήμερα πιστεύεται ότι τα quarks μαζί με τα εξ λεπτόνια (e, ν_e, μ, ν_μ, τ, ν_τ) είναι τα βασικά δομικά συστατικά της ύλης. Ενεργούν ως σημειακές

πηγές πεδίων δυνάμεων και δεν υπάρχει προς το παρόν ένδειξη ότι αυτά τα σωματίδια μπορούν να διαιρεθούν περαιτέρω. Είναι επομένως αυτά τα τελικά στοιχειώδη σωματίδια της ύλης;

Αυτά είναι μερικά από τα ερωτηματικά στα οποία καλείται σήμερα να δώσει απάντηση η σύγχρονη φυσική. Ο δρόμος προς την αλήθεια είναι μακρύς και τραχύς. Θα χρειασθεί και υλική υποδομή (ήδη είναι υπό σχεδιασμό κυκλικός επιταχυντής σωματιδίων ακτίνας 40 km) και πνευματική υποδομή υψηλής ποιότητας για να συνεχισθεί η πορεία του ανθρώπου προς τη γνώση, που απ'αυτόν εξαρτάται αν θα χρησιμοποιηθεί για το καλό της ανθρωπότητας.



Οι δυνάμεις στη φύση



Η συγκρότηση της ύλης

Διάφορα μεγέθη στη φύση

	Έκταση (m)	Χρόνος (sec)	Ενέργεια (Joule)
			— Ενεργειακό ισοδύναμο ($E = mc^2$) της μάζας του ήλιου.
-10^{40}			— Ενέργεια ελευθερούμενη ημερησίως από το γαλαξία μας.
			— Κινητική ενέργεια εκ περιφοράς της γης. — Ημερήσια ακτινοβολουμένη ενέργεια από τον ήλιο.
-10^{30}	— Το γνωστό τμήμα του σύμπαντος		
-10^{20}	— Διάμετρος του γαλαξία μας		— Ημερήσια ηλιακή ενέργεια που φθάνει στη γη.
	— Διάμετρος περιφοράς της γης	— Ηλικία σύμπαντος — Περίοδος περιστροφής του γαλαξία μας.	— Ενέργεια ενός ισχυρού σεισμού — Ημερήσια παραγωγή ΔΕΗ — Σημείωση
-10^{10}	— Διάμετρος ηλίου	— Αιών	
	— Ύψος όρους Έβερεστ		— Κινητική ενέργεια ενός γρήγορου αυτοκινήτου
-10^{0}	— Ύψος ανθρώπου	— Περίοδος καρδιακών παλμών	
	— Το πάχος αυτής της σελίδας — Μεγαλομόρια	— Χρόνος ζωής ενός διηγερμένου ατόμου	
-10^{-10}	— Άτομα		— Ενέργεια ($E = mc^2$) ενός πρωτονίου
	— Πυρήνες — Στοιχειώδη σωματίδια	— Περίοδος περιστροφής μορίου — Περίοδος ενός κύματος ακτίνων Χ	— Ενέργεια για να παραχθεί ένα ζεύγος ιόντων
-10^{-20}		— Χρόνος απαιτούμενος να διασχίσει το φως έναν ατομικό πυρήνα.	— Κινητική ενέργεια ανά μόριο και ανά βαθμό Kelvin

Σημείωση: Ηλιακή ενέργεια που προσπίπτει ημερησίως πάνω σε έκταση 5 Km^2. Ενέργεια παραγόμενη από την καύση 7000 ton κάρβουνου. Ενέργεια ισοδύναμη ($E = mc^2$) με 1 gr ύλης.

Φυσικές σταθερές

Ταχύτητα φωτός	c	$2{,}998 \times 10^{8}$ m/sec
Φορτίο ηλεκτρονίου	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$ Cb
Σταθερά Avogadro	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Μονάς ατομικής μάζας	u	$1{,}661 \times 10^{-27}$ Kgr (= 1/12 μάζα του ατόμου ^{12}C)
Μάζα ηλεκτρονίου	m_e	$9{,}110 \times 10^{-31}$ Kgr = 0,511 MeV/c^2
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$ Kgr = 938,3 MeV/c^2
Μάζα νετρονίου	m_n	$1{,}675 \times 10^{-27}$ Kgr = 939,6 MeV/c^2
Μάζα πρωτονίου προς μάζα ηλεκτρονίου	m_p/m_e	1836
Φορτίο προς μάζα ηλεκτρονίου	e/m_e	$1{,}759 \times 10^{11}$ Cb/Kgr
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ε_o	$8{,}854 \times 10^{-12}$ Cb^2 N^{-1} m^{-2}
Διαπερατότητα του κενού	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
Σταθερά του Planck	h	$6{,}626 \times 10^{-34}$ Joule sec
Σταθερά του Boltzmann	k	$1{,}381 \times 10^{-23}$ Joule/°K
Παγκόσμια σταθερά των αερίων	R	8,314 Joule/mol °K $= 8{,}205 \times 10^{-2} \dfrac{\text{lit atm}}{\text{mol °k}}$
Σταθερά της παγκόσμιας έλξης	G	$6{,}672 \times 10^{-11}$ N m^2/kgr^2
Σταθερά Coulomb	K_c	8,99 10^9 Nm^2/Cb^2
Πυκνότητα του αέρα υπό κανονικές συνθήκες		1,293 Kgr/m^3

Φυσικοί λογάριθμοι

$$\ln x = 2{,}3026 \ \log x$$

ln 1 = 0	ln 6 = 1,7917
ln 2 = 0,6931	ln 7 = 1,9459
ln 3 = 1,0986	ln 8 = 2,0794
ln 4 = 1,3863	ln 9 = 2,1972
ln 5 = 1,6094	ln 10 = 2,3026

Αστρονομικά δεδομένα

Γη

Ακτίνα ισημερινού	$6{,}378 \times 10^6$ m
Πολική ακτίνα	$6{,}357 \times 10^6$ m
Ακτίνα σφαίρας που έχει τον όγκο της γης	$6{,}371 \times 10^6$ m
Μέση ταχύτητα περιφοράς περί τον ήλιο	$2{,}977 \times 10^4$ m/sec
Ηλιακή σταθερά (ηλιακή ενέργεια που προσπίπτει κάθετα στη μονάδα επιφανείας της γης ανά μονάδα χρόνου	$0{,}84 \times 10^3$ Watt/m^2
Μέση απόσταση από τον ήλιο	$1{,}49 \times 10^{11}$ m
Μάζα	$5{,}98 \times 10^{24}$ Kgr
Πυκνότητα (μέση)	5520 Kg/m^3
Ταχύτητα διαφυγής	11,2 Km/sec

Ήλιος

Μάζα	$1{,}971 \times 10^{30}$ Kgr
Πυκνότητα (μέση)	1420 Kg/m^3
Επιτάχυνση της βαρύτητας	274,4 m/sec^2
Ταχύτητα διαφυγής	618 Km/sec
Ακτινοβολούμενη ισχύς	$3{,}90 \times 10^{26}$ Watt

Σελήνη

Μάζα	$7{,}347 \times 10^{22}$ Kgr
Απόσταση από τη γη	$3{,}84 \times 10^8$ m
Πυκνότητα (μέση)	3360 Kgr/m^3
Περίοδος περιστροφής περι τη γη	27,32 μέρες
Επιτάχυνση της βαρύτητας	1,67 m/sec^2
Ταχύτητα διαφυγής	2,38 Km/sec

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γωνία θ					Γωνία θ				
Μοίρες	Ακτίνια	ημ θ	συν θ	εφ θ	Μοίρες	Ακτίνια	ημ θ	συν θ	εφ θ
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000					
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	46	0.8029	0.7193	0.6947	1.0355
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	47	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724
3	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	48	0.8378	0.7431	0.6691	1.1106
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	49	0.8552	0.7547	0.6561	1.1504
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	50	0.8727	0.7660	0.6428	1.1918
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	51	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	52	0.9076	0.7880	0.6157	1.2799
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	53	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	54	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	55	0.9599	0.8192	0.5736	1.4281
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	56	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826
12	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	57	0.9948	0.8387	0.5446	1.5399
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	58	1.0123	0.8480	0.5299	1.6003
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	59	1.0297	0.8572	0.5150	1.6643
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	60	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	61	1.0647	0.8746	0.4848	1.8040
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	62	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	63	1.0996	0.8910	0.4540	1.9626
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	64	1.1170	0.8988	0.4384	2.0503
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	65	1.1345	0.9063	0.4226	2.1445
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	66	1.1519	0.9135	0.4067	2.2460
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	67	1.1694	0.9205	0.3907	2.3559
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	68	1.1868	0.9272	0.3746	2.4751
24	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	69	1.2043	0.9336	0.3584	2.6051
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	70	1.2217	0.9397	0.3420	2.7475
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	71	1.2392	0.9455	0.3256	2.9042
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	72	1.2566	0.9511	0.3090	3.0777
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	73	1.2741	0.9563	0.2924	3.2709
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	74	1.2915	0.9613	0.2756	3.4874
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	75	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	76	1.3265	0.9703	0.2419	4.0108
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	77	1.3439	0.9744	0.2250	4.3315
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	78	1.3614	0.9781	0.2079	4.7046
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	79	1.3788	0.9816	0.1908	5.1446
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	80	1.3963	0.9848	0.1736	5.6713
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	81	1.4137	0.9877	0.1564	6.314
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	82	1.4312	0.9903	0.1392	7.115
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	83	1.4486	0.9925	0.1219	8.144
39	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	84	1.4661	0.9945	0.1045	9.514
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	85	1.4835	0.9962	0.0872	11.430
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	86	1.5010	0.9976	0.0698	14.301
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	87	1.5184	0.9986	0.0523	19.081
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	88	1.5359	0.9994	0.0349	28.636
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	89	1.5533	0.9998	0.0175	57.290
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	90	1.5708	1.0000	0.0000	∞

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Σχετικιστική κινηματική, Κώστας Γ. Ζάχος, Αθήνα 1982.
2) Einstein - Infeld.
Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική.
Μετάφραση Ευτ. Μπιτσάκη. Εκδόσεις «ΔΩΔΩΝΗ» 1978.
3) Halliday Resnick Φυσική. Μετάφραση Πνευματικού, Πεπονίδη. Μέρος Α και Β. Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός. Αθήνα 1976.
4) Fundamentals of Physics, Halliday - Resnick, Second Edition, Extended, John Wiley & Sons Inc. 1981.
5) Elementary Modern Physics, R. Weidner - R. Sells, 3rd edition 1982.
6) University Physics, A. Hudson - R. Nelson, 1982, Harcourt Brace Jovanovich, Inc.
7) Physics, J. Orear, Collier Mamillan international editions, 1979.
8) The Feynman lectures on Physics, Feynman R, Leighton R, Sands M (1963) Volume I Addison - Wesley.
9) Advanced Placement and College Board Achievement Test in Physics. Arco Publishing Company Inc. New York 1978.
10) Atam P. Arya, Introductory College Physics. Collier Macmillan International Editions. New York 1979.
11) Berkeley Physics Course, Volume 1 Mechanics, Second Edition. Mc Graw - Hill Company, New York, 1973.
12) Cessa J, Treherne G, Ronlet B. Physique Classe terminale E, F. Nathan, Paris - VIe, 1967.
13) Duncan T. Adcanced Physics. Materials and Mechanics, 2nd edition. John Murray, London, 1981.
14) Duncan T. Advanced Physics. Fields, Waves and Atoms, second edition. John Murray. London, 1981.
15) Jarvis A and Gregory C. A Level Physics Questions. Heinemann Educational Books. London, 1982.
16) Milward A. Objective Tests in O Level Physics. John Murray. London 1979.
17) Muncaster R. A Level Physics. Stanley Thorens (Publishers) LTD 1981.
18) Nelkon and Parker. Advanced Level Physics. Forth edition. Heinemann Educational Books. London, 1977.
19) Nuffield Advanced Science: Physics: Students' book Unit 3. Field and Potential. Published for the Nuffield Foundation by Penguin Books. Middlesex. England,
England, 1974.
20) Nuffield Advanced Science: Physics: Students' book Unit 7. Magnetic Fields. Published for the Nuffield Foundation by Logman Group Limited. London, 1977.
21) Physics. Physical Science Study Commitee. D.C. Heath Company. Boston, 1960.
22) Richards, Sears, Wehr, Zemansky Modern University Physics. Addison - Wesley Publishing Company, Inc. Amsterdam. Ninth Printing 1975.

23) Ridsdale Electric Circuits for Engineering Technology. Mc Graw-Hill Book Company New York, 1976.
24) Rogers E. Physics for the Inquiring Mind (The Methods, Nature and Philosophy of Physical Science) Princeton, New Jersey. Princeton University Press. Twelfth Printing 1977.
25) Sears, Zemansky, Youg. College Physics, Eifth Edition. Addison - Wesley Publishing Company Amsterdam, 1980.
26) Toh. K, Tan. S Objective Questions in Physics for Advanced Level. Heinemann Educational Books London, 1978.
27) Wenhan, Dorling, Shell, Taylor. Physics, Concepts and Models. Addison - Wesley Publishers Limited. London, 1972.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κ.Α. ΕΚΔΟΣΗ ΙΑ΄ 1993 ΑΝΤΙΤΥΠΑ 60.000 ΑΡ. ΣΥΜΒ. 2048/4-5-93
ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΑΦΟΙ Κ. ΖΕΡΒΟΥ ΟΕ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Δ. ΒΑΣΙΛΑΚΟΣ & ΣΙΑ Ε.Π.Ε.

ISBN 960-06-0281-6